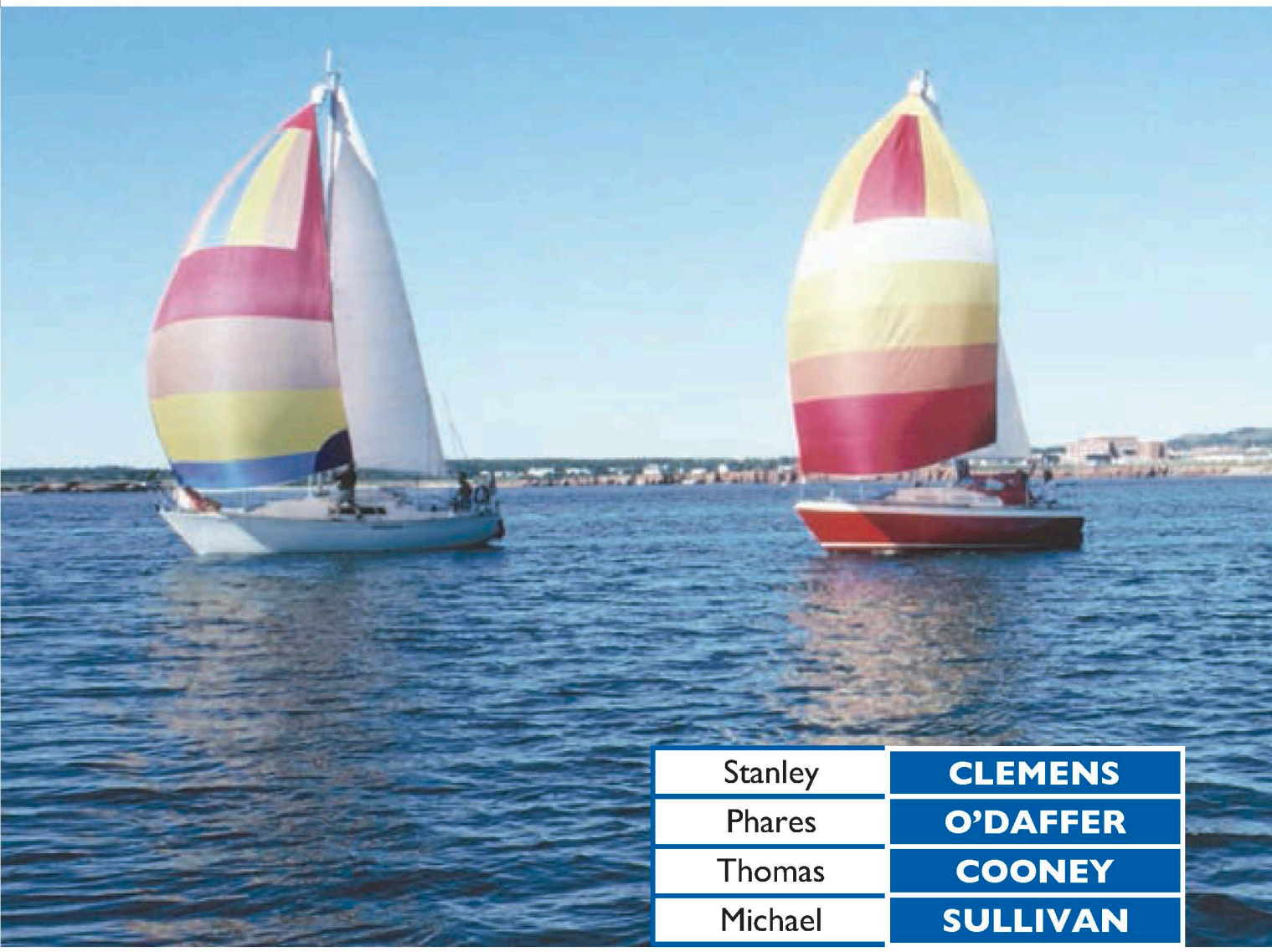
Geometría y Trigonometría



Stanley CLEMENS
Phares O'DAFFER
Thomas COONEY
Michael SULLIVAN

PEARSON Custom Publishing ®

UNITEC

Geometría y trigonometría

Geometría y trigonometría

Stanley R. Clemens
Phares G. O'Daffer
Illinois State University
Thomas J. Cooney
University of Georgia
ISBN 968-444-283-1

Michael Sullivan
Chicago State University
ISBN 968-880-964-0

Agradecimiento especial por la adaptación de esta obra a:
Karim Martínez Cerrato
Coordinadora del departamento Físico-Matemático
Universidad Tecnológica Centroamericana

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

CLEMENS, O'DAFFER, COONEY y SULLIVAN

Geometría y trigonometría
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1525-5
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 752

Authorized adaptation from the English language edition, entitled *Geometry with applications and problem solving,* by *Stanley R. Clemens,. Phares G. O'Daffer* and *Thomas J. Cooney,* published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V., Copyright „ 1986. ISBN 0201812606; and *Precalculus* 4th edition by Michael Sullivan, copyright © 1996, ISBN 0132285940. All rights reserved.

Adaptación autorizada de la obra *Geometry with applications and problem solving,* de la autoria *Stanley R. Clemens, Phares G. O'Daffer y Thomas J. Cooney* ,publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V., Copyright „ 1986. ISBN 0201812606; y *Precalculus 4ª edición* de *Michael Sullivan,* copyright © 1996, ISBN 0132285940. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Editora: María Elena Zahar Arellano
e-mail: maria.zahar@pearson.com
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

PRIMERA EDICIÓN, 2008

D.R. @ 2008 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° Piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Custom Publishing es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 10: 970-26-1525-9
ISBN 13: 978-970-26-1525-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

Estimados estudiantes y docentes de UNITEC:

Me da mucho gusto saludarles y poner en sus manos este libro de texto que es parte de un innovador proyecto dirigido a Ustedes.

La Universidad Tecnológica Centroamericana está comprometida desde 1987, año de su fundación, con la calidad y la excelencia académica al punto de ser un estilo de vida en permanente mejora, que les involucra a Ustedes y también a los recursos y metodologías de enseñanza y aprendizaje propios de las diversas carreras profesionales que ofrecemos.

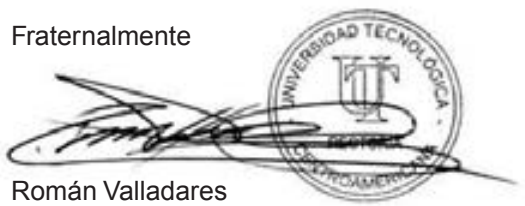
A inicios de los 90's UNITEC incorporó el modelo educativo centrado en el estudiante y apoyado en tecnologías de vanguardia para dar respuesta a los retos que el mundo global plantea, a tal punto que actualmente esta Universidad forma profesionales y ciudadanos en Honduras que sean capaces de desenvolverse competitiva y exitosamente en los escenarios del mundo globalizado.

La alianza estratégica que hemos emprendido con el Grupo Editorial Pearson es garante de la calidad que encontrarán, no sólo en los contenidos temáticos de los libros de texto con estándares internacionales, sino también en su diseño didáctico y a la incorporación de los recursos que permitirán el trabajo autónomo y personalizado vía web, tan característico del estilo de aprendizaje en la sociedad del siglo XXI.

Este esfuerzo complementa la sistemática profesionalización de los docentes mediante el Sistema de Excelencia en la Enseñanza, conocido como Programa SENECA, que les posibilita el perfeccionamiento de su práctica, convirtiéndose en el sello de la docencia en UNITEC.

Auguro condiciones muy favorables donde el aprendizaje será inevitable, no solo durante sus años de formación profesional sino durante toda su existencia: Que les persiga el deseo por avanzar, por descubrir nuevas cosas, por ampliar el conocimiento acerca de lo que somos y a dónde vamos, pero sobre todo ayudando a construir el camino que elegimos ¡Que cosechen muchos éxitos y satisfacciones!

Fraternalmente



Román Valladares
Rector de UNITEC

CONTENIDO

TEMA 1 **CAPÍTULO 5** Funciones trigonométricas 1

5.1 Ángulos y sus medidas 2
5.2 Funciones trigonométricas; estudio por medio del círculo unitario 12
5.3 Propiedades de las funciones trigonométricas 28
5.4 Trigonometría del triángulo rectángulo 39
5.5 Aplicaciones 49
Repaso del capítulo 60

TEMA 2 **CAPÍTULO 6** Gráficas de las funciones trigonométricas 65

6.1 Gráficas de las funciones seno y coseno 66
6.2 Gráficas senoidales 70
6.3 Aplicaciones 81
6.4 Las gráficas de $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$ 92
6.5 Funciones trigonométricas inversas 97
Repaso del capítulo 113

TEMA 3 **CAPÍTULO 7** Trigonometría analítica 117

7.1 Identidades trigonométricas 118
7.2 Fórmulas para la suma y la diferencia 123
7.3 Fórmulas para ángulo doble y ángulo medio 133
7.4 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto 142
7.5 Ecuaciones trigonométricas 146
Repaso del capítulo 157

TEMA 4 **CAPÍTULO 8** Aplicaciones adicionales de la trigonometría 161

8.1 Ley de los senos 162
8.2 Ley de los cosenos 173
8.3 Área de un triángulo 180
8.4 Coordenadas polares 185
8.5 Ecuaciones y gráficas polares 194
8.6 El plano complejo; teorema de Moivre 210
Repaso del capítulo 218

TEMA 5 CAPÍTULO 1 Definiciones y construcciones 225

1.1 Punto, recta, plano y espacio 226
1.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos 228
1.3 Algunas figuras geométricas básicas 232
1.4 Segmentos y ángulos; congruencia y medición 236
1.5 Bisectrices del segmento y del ángulo 240
1.6 Rectas y planos perpendiculares 244
1.7 Polígonos 248
Conceptos importantes 252
Resumen 253
Examen 254
Técnicas para la solucion de problemas 255
La geometría en nuestro mundo 256

TEMA 6 CAPÍTULO 2 Razonamiento en geometría 259

2.1 El proceso del razonamiento inductivo 260
2.2 Generalizaciones falsas y contraejemplos 264
2.3 Desarrollo de la geometría por medio del razonamiento deductivo 268
2.4 Tipos de proposiciones «Si-Entonces» 272
2.5 Recíproca, inversa y contrarrecíproca 276
2.6 Esquemas de razonamiento 280
2.7 Postulados de geometría 284
2.8 Algunos postulados sobre medición 288
Conceptos importantes 292
Resumen 293
Examen 294
Repaso de álgebra 295
La geometría en nuestro mundo 296

TEMA 7 CAPÍTULO 3 Triángulos y congruencia 299

3.1 Triángulos congruentes 300
3.2 Postulados sobre la congruencia 306
3.3 Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia 312
3.4 Pruebas: uso de definiciones 316
3.5 Pruebas: uso de postulados y definiciones 320
3.6 Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos 326
3.7 Pruebas: solape de triángulos 332
3.8 Pruebas: cadenas de congruencias 336

Conceptos importantes 338
Resumen 339
Examen 340
Resumen global (caps. 1 a 3) 341
La geometría en nuestro mundo 342

TEMA 8 CAPÍTULO 4 Prueba de teoremas mediante propiedades básicas 345

4.1 Pasos para la prueba de un teorema 346
4.2 Uso de la propiedad de suma y resta de iguales 354
4.3 Prueba de teoremas: uso de suplementos y complementos 360
4.4 Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales 366
4.5 Prueba de teoremas: uso de ángulos exteriores 370
4.6 Uso de la prueba indirecta 374
Conceptos importantes 380
Resumen 381
Examen 382
Técnicas para la solución de problemas 383

TEMA 9 CAPÍTULO 5 Rectas y planos paralelos 385

5.1 Definiciones básicas 386
5.2 Teoremas sobre rectas paralelas 390
5.3 El postulado de las rectas paralelas 396
5.4 Más teoremas sobre rectas paralelas 400
Conceptos importantes 406
Resumen 407
Examen 408
Repaso de álgebra 409
La geometría en nuestro mundo 410

TEMA 10 CAPÍTULO 6 Triángulos 413

6.1 Clasificación de los triángulos 414
6.2 Triángulos isósceles 418
6.3 Medidas de los ángulos de un triángulo 424
6.4 El teorema de la congruencia LAA 428
6.5 El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto 432
Conceptos importantes 436
Resumen 437

Examen 438
Técnicas para la solución de problemas 439

TEMA 11 CAPÍTULO 7 Más sobre triángulos 441

7.1 EL teorema de Pitágoras 442
7.2 Triángulos especiales 448
7.3 Teoremas de la concurrencia en triángulos 452
7.4 Desigualdad del triángulo 460
7.5 Desigualdades en un triángulo 464
Conceptos importantes 468
Resumen 469
Examen 470
Resumen global (caps 4 a 7) 471
La geometría en nuestro mundo 472

TEMA 12 CAPÍTULO 8 Cuadriláteros y polígonos 475

8.1 Cuadriláteros 476
8.2 Paralelogramos 480
8.3 Cuadriláteros que son paralelogramos 486
8.4 El teorema del segmento medio 492
8.5 Rectángulos, rombos y cuadrados 498
8.6 Trapecios 504
8.7 Los ángulos de un polígono 508
Conceptos importantes 512
Resumen 513
Examen 514
Repaso de álgebra 515
La geometría en nuestro mundo 516

TEMA 13 CAPÍTULO 9 Semejanza 519

9.1 Proporciones 520
9.2 Teorema fundamental de la proporcionalidad 524
9.3 Polígonos semejantes 528
9.4 El postulado de la semejanza AAA 532
9.5 Triángulos rectángulos y triángulos semejantes 538
9.6 Teoremas de la semejanza LLL y LAL 542
9.7 Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes 546

9.8 Razones trigonométricas de ángulos especiales 550
Conceptos importantes 552
Resumen 553
Examen 554
Técnicas para la solución de problemas 555

TEMA 14 CAPÍTULO 10 Círculos 557

10.1 Definiciones básicas 558
10.2 La medición en grados de los arcos 562
10.3 Cuerdas y distancias desde el centro 566
10.4 Perpendiculares a las cuerdas 570
10.5 Tangentes a los círculos 576
10.6 Tangentes desde un punto a un círculo 580
10.7 Medidas de ángulos inscritos 584
10.8 Ángulos formados por cuerdas 590
10.9 Ángulos y segmentos formados por tangentes y secantes 594
Conceptos importantes 602
Resumen 603
Examen 604
Resumen global (caps. 8 a 10) 605
La geometría en nuestro mundo 606

TEMA 15 CAPÍTULO 11 Área y perímetro 609

11.1 Postulados del área 610
11.2 Área de paralelogramos 614
11.3 Áreas de triángulos y trapecios 618
11.4 Área de polígonos regulares 624
11.5 Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes 628
11.6 La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo 632
11.7 Área de círculos 636
Conceptos importantes 642
Resumen 643
Examen 644
Repaso de álgebra 645
La geometría en nuestro mundo 646

TEMA 16 CAPÍTULO 12 Sólidos 649

12.1 Pirámides y prismas 650
12.2 Área de prismas y pirámides 656
12.3 Volumen de prismas 660
12.4 Volumen de pirámides 664
12.5 Área y volumen de cilindros 668
12.6 Área y volumen de conos 672
12.7 Área y volumen de esferas 676
12.8 Poliedros regulares 680
Conceptos importantes 684
Resumen 685
Examen 686
Técnicas para la solución de problemas 687
La geometría en nuestro mundo 688

Respuestas 691

TEMA 1

Funciones trigonométricas

CAPÍTULO 5

5.1 Ángulos y sus medidas

5.2 Funciones trigonométricas, estudio por medio del círculo unitario

5.3 Propiedades de las funciones trigonométricas

5.4 Trigonometría del triángulo rectángulo

5.5 Aplicaciones
Repaso del capítulo

Panorama **Faro de la colina Gibb, Southampton, Bermudas**
Este faro está en operación desde 1846. Mide 117 pies y se levanta sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz queda a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a una distancia aproximada de 26 millas. Verifique la veracidad de esta información. El folleto afirma también que los barcos que navegan a 40 millas de este faro pueden ver su luz y que aviones volando a 10,000 pies la distinguen a 120 millas. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Cuál es la suposición que se desprende del folleto acerca de la altura del barco? [Véase el ejemplo 9 y el problema 40 en la sección 5.5.]

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos que consideraban al cielo como el interior de una esfera, de modo que resultó natural estudiar primero los triángulos sobre una esfera (por Menelao de Alejandría, año 100 a de C.) y que los triángulos en el plano fueran estudiados mucho después. El primer libro que contiene un tratamiento sistemático de trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasîr ed-dîn (alrededor del 1250 a. C.).

Regiomontano (1436-1476) es el autor principal a quien se debe el traslado de la trigonometría astronómica a las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por el alumno de Copérnico, Rhaeticus (1514-1576). La obra de Rhaeticus fue la primera en definir las seis funciones trigonométricas como razones entre lados de triángulos, aunque no le dio a las funciones sus nombres actuales. El crédito de esto se lo lleva Thomas Fincke (1583), pero en su época esa notación no fue aceptada universalmente. La notación quedó establecida a partir de los libros de texto de Leonardo Euler (1707-1783).

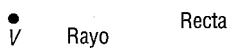
Desde entonces la trigonometría ha venido evolucionando desde su uso por agrimensores, navegantes e ingenieros, hasta las aplicaciones actuales como el movimiento de las mareas en los océanos, el alza y caída de los recursos alimenticios en determinadas condiciones ecológicas, patrones de ondas cerebrales y muchos otros fenómenos.

Hay dos enfoques aceptados ampliamente para el desarrollo de las *funciones trigonométricas*: uno utiliza círculos, en especial el *círculo unitario*; el otro se vale de los *triángulos rectángulos*. En este libro introducimos las funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario. En la sección 5.4 mostraremos que la trigonometría del triángulo rectángulo es un caso especial del enfoque del círculo unitario.

Ángulos y sus medidas

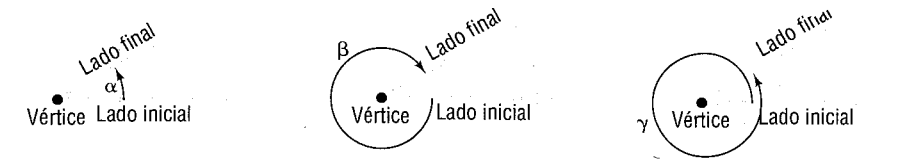
Un **rayo,** o **semirrecta,** es la parte de una recta que inicia en un punto V de la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo es denominado **vértice.** *Véase* la figura 1.

FIGURA 1



Si se dibujan dos rayos con vértice común se formará un **ángulo.** A uno de estos rayos le llamamos **lado inicial** y al otro **lado final.** El ángulo formado se identifica señalando la dirección y cantidad de rotación desde el lado inicial hacia el lado final. Si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es denominado **positivo;** si la rotación va en el sentido de las manecillas del reloj el ángulo es **negativo.** *Véase* la figura 2. Letras minúsculas griegas tales como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), etc., se usarán para denotar ángulos. Observe en la figura 2(a) que el ángulo (α es positivo porque la dirección de rotación desde el lado inicial hasta el lado final es en sentido contrario al de las manecillas del reloj. El ángulo β en la figura 2(b) es negativo porque la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo γ en la figura 2(c) es positivo. Observe que el ángulo α en la figura 2(a) y el ángulo γ tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final. Sin embargo, α y γ son diferentes ya que la cantidad de rotación necesaria para ir desde el lado inicial hasta el lado final es mayor para el ángulo γ que para el ángulo α.

FIGURA 2



Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

(a) Ángulo positivo

Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

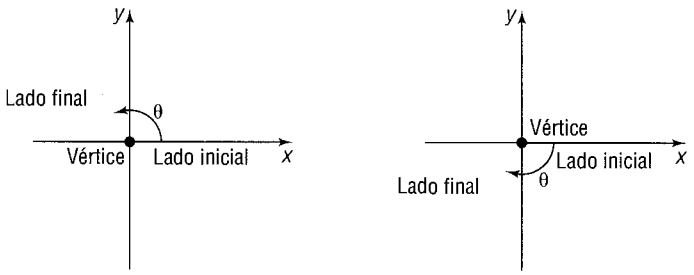
(b) Ángulo negativo

Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

(c) Ángulo positivo

Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje x positivo. *Véase* la figura 3.

FIGURA 3

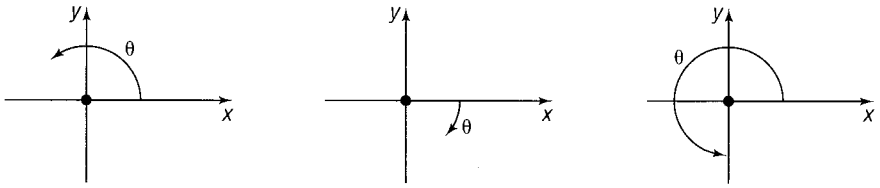


(a) θ en posición estándar; θ positivo

(b) θ en posición estándar; θ negativo

Cuando un ángulo θ está en forma estándar el lado final puede pertenecer a un cuadrante, en tal caso decimos que θ **está en ese cuadrante;** o bien el lado final puede estar en el eje x o en el eje y, en tal caso, decimos que θ es un **ángulo cuadrantal.** Por ejemplo, el ángulo θ en la figura 4(a) está en el segundo cuadrante, en la figura 4(*b*) está en el cuarto cuadrante y en la figura 4(c) el ángulo θ es un ángulo cuadrantal.

FIGURA 4



(a) θ está en el segundo cuadrante

(b) θ está en el cuarto cuadrante

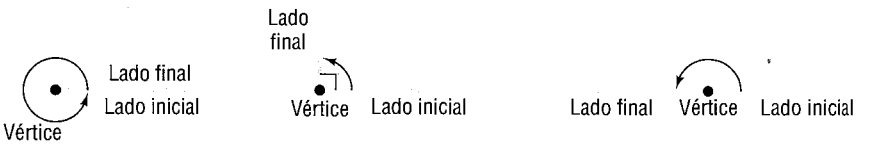
(c) θ es un ángulo cuadrantal

Medimos los ángulos determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado final. Hay dos unidades de medición utilizadas comúnmente: *grados* y *radianes*.

Grados

El ángulo formado por la rotación, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el lado inicial hasta que coincida con él mismo (1 vuelta o revolución), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. Así **un grado, 1°**, es $\frac{1}{360}$ de vuelta. Un **ángulo recto** es un ángulo de 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta; un **ángulo llano** es un ángulo de 180°, o $\frac{1}{2}$ vuelta. *Véase* la figura 5. Como lo muestra la figura 5(*b*), es costumbre indicar un ángulo recto utilizando el símbolo $\llcorner$.

FIGURA 5



(a) Una vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 360°

(b) $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 90°

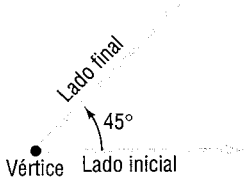
(c) $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 180°

Trazar cada ángulo:

(a) 45° (b) −90° (c) 225° (d) 405°

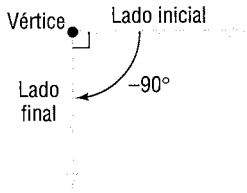
(a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ de un ángulo recto. *Véase* la figura 6.

FIGURA 6



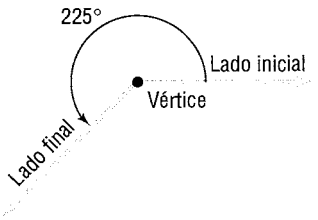
(b) Un ángulo de $-90°$ es $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido de las manecillas del reloj. *Véase* la figura 7.

FIGURA 7



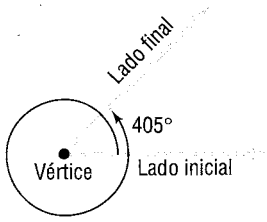
(c) Un ángulo de 225° consiste de una rotación de 180°seguida por una rotación de 45°. *Véase* figura 8.

FIGURA 8



(d) Un ángulo de 405° consiste de una vuelta (360°) seguida por una rotación de 45°. *Véase* figura 9.

FIGURA 9



Ahora resuelva el problema 1.

Aunque se pueden obtener subdivisiones de un grado utilizando decimales, también podemos usar la noción de *minutos* y *segundos*. **Un minuto,** denotado por **1′**, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo,** denotado por **1″**, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto o, de manera equivalente, $\frac{1}{3600}$ de grado. Un ángulo de, digamos, 30 grados, 40 minutos, 10 segundos se escribe de manera concisa como 30° 40′ 10″. Para resumir:

$$\begin{gathered}\text{1 vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj} = 360° \\ 60' = 1° \qquad 60'' = 1'\end{gathered} \tag{1}$$

Ya que las calculadoras utilizan decimales, es importante ser capaces de convertir de la notación grados, minutos y segundos (D°M′S″, *Degrees* (grados), *Minutes* (minutos), *Seconds* (segundos) a una forma decimal, y a la inversa. Verifique su calculadora; puede ser que tenga un tecla especial que haga la conversión por usted. Si su calculadora no tiene esa tecla, usted puede realizar la conversión como se describe en seguida.

Sin embargo, antes de empezar debe preparar la calculadora para que trabaje con grados ya que hay dos formas comunes de medir ángulos. Muchas calculadoras muestran el modo en que están trabajando DEG para grados (*degrees*) o RAD para radianes. (Pronto definiremos los radianes.) Por lo común, una tecla es utilizada para cambiar de un modo al otro. Verifique su manual para encontrar cómo funciona su calculadora en estos casos.

Ahora veamos cómo convertir de notación grados, minutos y segundos (D°M′S″) a una forma decimal, y a la inversa, examinando algunos ejemplos: 15°30′ = 15.5° ya que 30′ = $\frac{1}{2}$° = 0.5°, y 32.25° = 32°15′, ya que 0.25° = $\frac{1}{4}$° = 15′. Para la mayoría de las conversiones, una calculadora nos será útil.

EJEMPLO 2 Conversión entre la forma grados, minutos, segundos y la forma decimal

(a) Convertir 50°6′21″ a un número decimal de grados.

(b) Convertir 21.256° a la forma D°M′S″ Redondear la respuesta al segundo más cercano.

Solución (a) Ya que 1′ = $\frac{1}{60}$° y 1″ = $\frac{1}{60}$′ = $(\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60})$°, convertimos como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= (50 + 6 \cdot \tfrac{1}{60} + 21 \cdot \tfrac{1}{60} \cdot \tfrac{1}{60})° \\ &\approx (50 + 0.1 + 0.005833)° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

(b) Empezamos con la parte decimal de 21.256°, esto es, 0.256°:

$$0.256° = (0.256)(1°) = (0.256)(60') = 15.36'$$

Ahora trabajamos con la parte decimal de 15.36′, esto es, 0.36′:

$$0.36' = (0.36)(1') = (0.36)(60'') = 21.6'' \approx 22''$$

Así,

$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° = 21° + 15.36' = 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

FIGURA 10

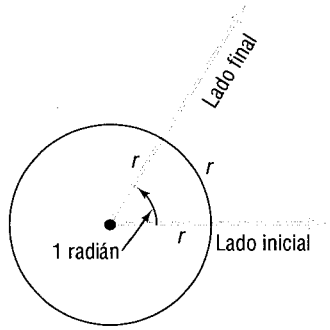
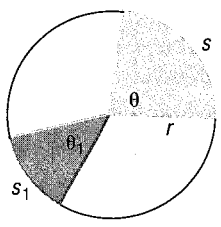


FIGURA 11

$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}$



Ahora resuelva los problemas 57 y 63.

En muchas aplicaciones, tales como la localización exacta de una estrella o la posición precisa de un barco en el mar, se utilizan ángulos medidos en grados, minutos e incluso segundos. Para propósitos de cálculo, los grados son transformados a la forma decimal. En muchas otras aplicaciones, en especial en cálculo, los ángulos son medidos usando *radianes*.

Radianes

Considere un círculo de radio r. Construya un ángulo cuyo vértice esté en el centro de ese círculo, llamado **ángulo central,** y cuyos rayos subtiendan un arco de longitud igual a r sobre el círculo. *Véase* la figura 10. La medida de tal ángulo es **1 radián.**

Ahora considere un círculo y dos ángulos centrales, θ y θ_1. Suponga que estos ángulos subtienden arcos de longitudes s y s_1, respectivamente, como se muestra en la figura 11. De la geometría, sabemos que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por esos ángulos; esto es,

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1} \tag{2}$$

Suponga que θ y θ_1 son medidos en radianes, y que $\theta_1 = 1$ radián. Observe de nuevo la figura 11. Entonces la longitud del arco s_1 subtendido por el ángulo central θ_1 es igual al radio r del círculo. Así, $s_1 = r$, de modo que (2) se reduce a

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad s = r\theta \tag{3}$$

Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = r\theta \tag{4}$$

Nota: Las fórmulas deben ser consistentes con las unidades de medición utilizadas. En la ecuación (4), escribimos

$$s = r\theta$$

Sin embargo, para ver las unidades debemos regresar a la ecuación (3) y escribir

$$\frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}} = \frac{s \text{ unidades de longitud}}{r \text{ unidades de longitud}}$$

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud}) \frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}}$$

Como se cancelan los radianes, nos quedamos con

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud})\theta$$

donde θ parece que es "adimensional" pero, en realidad, está medida en radianes. Así, al usar la fórmula $s = r\theta$, las dimensiones para θ por lo común se omiten, y puede ser utilizada cualquier unidad de longitud (tal como pulgada o metro) para s y r.

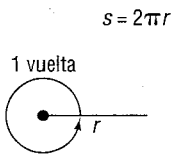
Determinar la longitud del arco de un círculo con radio de 2 metros subtendido por un ángulo central de 0.25 radianes.

Usamos la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$

Ahora resuelva el problema 33.

FIGURA 12
1 vuelta = 2π radianes



Relación entre grados y radianes

Considere un círculo de radio r. Un ángulo central de una vuelta subtenderá un arco igual a la circunferencia del círculo (figura 12). Ya que la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, usamos $s = 2\pi r$ en la ecuación (4) para encontrar que, para un ángulo θ de una vuelta,

$$s = r\theta$$
$$2\pi r = r\theta$$
$$\theta = 2\pi \text{ radianes}$$

Así,

$$1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ radianes} \tag{5}$$

de modo que

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

o

$$180° = \pi \text{ radianes} \tag{6}$$

Dividimos ambos miembros de (6) entre 180. Entonces

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

Dividimos ambos miembros de (6) entre π. Entonces

$$\frac{180}{\pi} \text{ grados} = 1 \text{ radián}$$

Así, tenemos las dos fórmulas de conversión siguientes:

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \qquad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \tag{7}$$

Convertir cada ángulo dado en grados a radianes:

(a) $60°$ (b) $150°$ (c) $-45°$ (d) $90°$

(a) $60° = 60 \cdot 1 \text{ grado} = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$

(b) $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes}$

(c) $-45° = -45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = -\frac{\pi}{4} \text{ radián}$

(d) $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$

Ahora resuelva el problema 13.

El ejemplo 4 ilustra que cuando los ángulos son fracciones de una vuelta se expresan en radianes como múltiplos fraccionales de π, en lugar de hacerlo como decimales. Así, un ángulo recto, como en el ejemplo 4(d), se deja en la forma $\pi/2$ radianes, que es exacto, en lugar de usar la aproximación $\pi/2 \approx 3.1416/2 = 1.5708$ radianes.

EJEMPLO 3 *Paso de radianes a grados*

Convertir cada ángulo dado en radianes a grados.

(a) $\frac{\pi}{6}$ radián (b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes (c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes (d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes

Solución (a) $\frac{\pi}{6}$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot 1$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 30°$

(b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes $= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 270°$

(c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes $= -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= -135°$

(d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$

Ahora resuelva el problema 23.

La tabla 1 enlista las medidas en grados y en radianes de algunos ángulos que son usados comúnmente. Usted aprenderá a sentirse igualmente seguro al usar medidas tanto en grados como en radianes para estos ángulos.

TABLA 1

GRADOS	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
GRADOS	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
RADIANES	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

EJEMPLO 4 *Determinar la longitud del arco de un círculo*

Determinar la longitud del arco de un círculo de radio $r = 3$ pies subtendido por un ángulo central de 30°

Solución Usamos la ecuación (4), pero antes debemos convertir el ángulo central de 30° a radianes. Ya que $30° = \pi/6$ radianes, usamos $\theta = \pi/6$ y $r = 3$ pies en la ecuación (4). La longitud del arco es

$$s = r\theta = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2} = 1.57 \text{ pies}$$

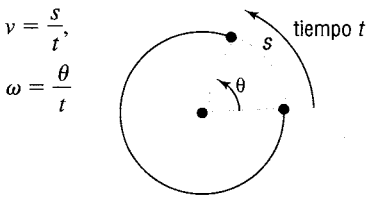
Cuando un ángulo está medido en grados el símbolo de grado siempre se debe escribir. Sin embargo, cuando un ángulo se mida en radianes seguiremos la práctica común de omitir la palabra *radianes*. Así, cuando la medida de un ángulo esté dada como $\pi/6$, se deberá entender que significa $\pi/6$, radianes.

Movimiento circular

Ya hemos definido la velocidad media de un objeto como una distancia recorrida que se divide entre un tiempo transcurrido. Suponga que un objeto se mueve a velocidad

constante a lo largo de un círculo de radio r. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t en este círculo, entonces la **velocidad lineal** v del objeto se define como

FIGURA 13



$$v = \frac{s}{t} \tag{8}$$

Conforme el objeto recorre el círculo, suponemos que θ (medido en radianes) es el ángulo central que cubre en el tiempo t (*Véase* la figura 13). Entonces la **velocidad angular** ω (letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que recorre dividido entre el tiempo transcurrido; esto es,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{9}$$

La velocidad angular es la manera en que se describe la velocidad de un disco fonográfico. Por ejemplo, un disco de 45 rpm (revoluciones por minuto) es aquel que gira a una velocidad angular de

$$\frac{45 \text{ vueltas}}{\text{minutos}} = \frac{45 \text{ vueltas}}{\text{minutos}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{\text{vuelta}} = \frac{90\pi \text{ radianes}}{\text{minutos}}$$

Hay una relación importante entre la velocidad lineal y la velocidad angular. En la fórmula $s = r\theta$, divida cada miembro entre t:

$$\frac{s}{t} = r\frac{\theta}{t}$$

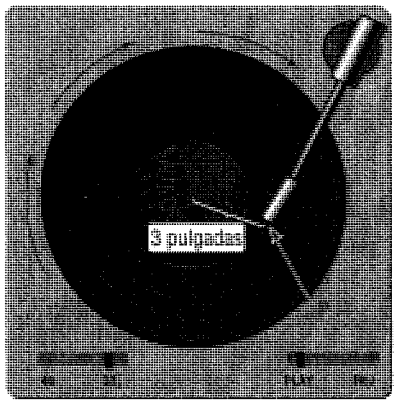
Entonces, usando las ecuaciones (8) y (9), obtenemos

$$v = r\omega \tag{10}$$

Cuando use la ecuación (10), recuerde que $v = s/t$ (la velocidad lineal) tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo (tal como pies por segundo o millas por hora), r (el radio del movimiento circular) tiene las mismas unidades de longitud que s, y ω (la velocidad angular) tiene dimensiones de radianes por unidad de tiempo. Como se hizo notar anteriormente, dejamos las unidades de radianes fuera del valor numérico de la velocidad angular ω de modo que ambos miembros de la ecuación serán dimensionalmente consistentes (con "longitud por unidad de tiempo"). Si la velocidad angular está dada en términos de *revoluciones* por unidad de tiempo (como es el caso con frecuencia), asegúrese de convertirla a *radianes* por unidad de tiempo antes de intentar usar la ecuación (10).

Determinar la velocidad lineal de un disco de $33\frac{1}{3}$ rpm en el punto donde la aguja está a 3 pulgadas del eje (centro del disco).

FIGURA 14



Véase la figura 14. El punto P se desplaza a lo largo del círculo de radio $r = 3$ pulgadas. La velocidad angular ω del disco es

$$\omega = \frac{33\frac{1}{3} \text{ vueltas}}{\text{minutos}} = \frac{100 \text{ vueltas}}{3 \text{ minutos}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{\text{vueltas}} = \frac{200\pi \text{ radianes}}{3 \text{ minutos}}$$

De la ecuación (10), la velocidad lineal v del punto P es

$$v = r\omega = 3 \text{ pulgadas} \cdot \frac{200\pi \text{ radianes}}{3 \text{ minutos}} = \frac{200\pi \text{ pulgadas}}{\text{minutos}} \approx \frac{628 \text{ pulgadas}}{\text{minutos}}$$

Ahora resuelva el problema 71.

Ejercicio 5.1

En los problemas del 1 al 12 trazar cada ángulo.

1. 30° **2.** 60° **3.** 135° **4.** −120° **5.** 450° **6.** 540°
7. $3\pi/4$ **8.** $4\pi/3$ **9.** $-\pi/6$ **10.** $-2\pi/3$ **11.** $16\pi/3$ **12.** $21\pi/4$

En los problemas del 13 al 22 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

13. 30° **14.** 120° **15.** 240° **16.** 330° **17.** −60°
18. −30° **19.** 180° **20.** 270° **21.** 135° **22.** −225°

En los problemas del 23 al 32 convierta cada ángulo dado en radianes a grados.

23. $\pi/3$ **24.** $5\pi/6$ **25.** $-5\pi/4$ **26.** $-2\pi/3$ **27.** $\pi/2$
28. 4π **29.** $\pi/12$ **30.** $5\pi/12$ **31.** $2\pi/3$ **32.** $5\pi/4$

En los problemas del 33 al 40, s *denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que se indica.*

33. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $s = ?$
34. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $s = ?$
35. $\theta = \frac{1}{3}$ radián, $s = 2$ pies, $r = ?$
36. $\theta = \frac{1}{4}$ radián, $s = 6$ centímetros, $r = ?$
37. $r = 5$ millas, $s = 3$ millas, $\theta = ?$
38. $r = 6$ metros, $s = 8$ metros, $\theta = ?$
39. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $s = ?$
40. $r = 3$ metros, $\theta = 120°$, $s = ?$

En los problemas del 41 al 48 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

41. 17° **42.** 73° **43.** −40° **44.** −51° **45.** 125° **46.** 200° **47.** 340° **48.** 350°

En los problemas del 49 al 56 convierta cada ángulo dado en radianes a grados. Exprese su respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

49. 3.14 **50.** π **51.** 10.25 **52.** 0.75 **53.** 2 **54.** 3 **55.** 6.32 **56.** $\sqrt{2}$

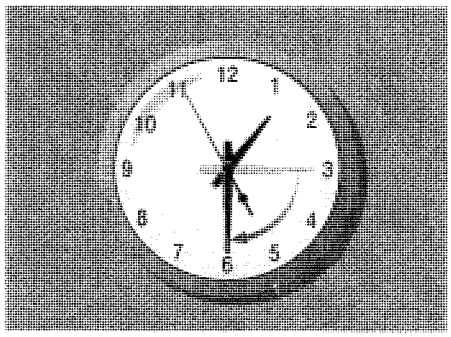
En los problemas del 57 al 62 convierta cada ángulo dado a un decimal en grados. Redondee su respuesta a dos decimales.

57. 40°10′25″ **58.** 61°42′21″ **59.** 1°2′3″ **60.** 73°40′40″ **61.** 9°9′9″ **62.** 98°22′45″

En los problemas del 63 al 68 convierta cada ángulo dado a la forma D°M′S″. *Redondee su respuesta al segundo más cercano.*

63. 40.32° **64.** 61.24° **65.** 18.255° **66.** 29.411° **67.** 19.99° **68.** 44.01°

69. *Minutero de un reloj.* El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de largo. En 15 minutos, ¿qué distancia recorre la punta del minutero? ¿Qué distancia recorre en 25 minutos?

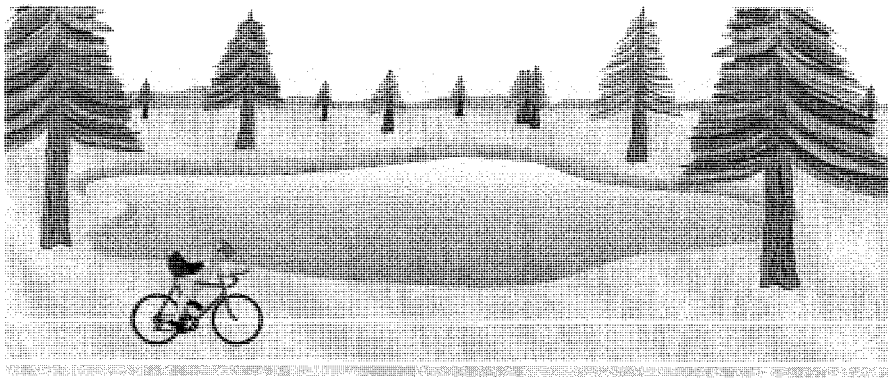


70. *Movimiento de un péndulo.* Un péndulo oscila un ángulo de 20° cada segundo. Si el péndulo tiene 40 pulgadas de largo, ¿qué distancia recorre su extremo cada segundo?

71. Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 5 centímetros. Si en 20 segundos recorre un ángulo central de $\frac{1}{3}$ de radián, ¿cuál es la velocidad angular del objeto? ¿Cuál su velocidad lineal?

72. Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 2 metros. Si en 20 segundos el objeto recorre 5 metros, ¿cuál es su velocidad angular? ¿Cuál su velocidad lineal?

73. *Ruedas de bicicleta.* El diámetro de cada rueda de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si usted viaja a una velocidad de 35 millas por hora en esa bicicleta, ¿a cuántas revoluciones por minuto estarán girando las ruedas?



74. *Velocidad de un automóvil.* El radio de cada rueda de un automóvil es de 15 pulgadas. Si las ruedas giran a una razón de 3 revoluciones por segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el automóvil? Exprese su respuesta en pulgadas por segundo y en millas por hora.

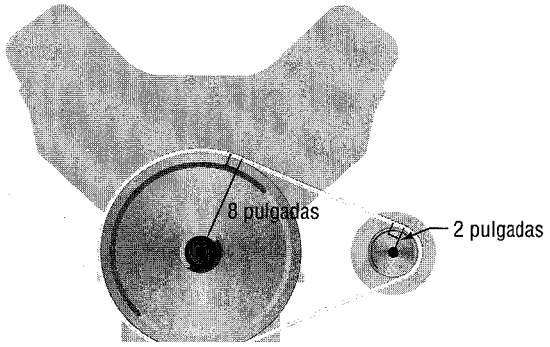
75. *Limpiadores de parabrisas.* El limpiador del parabrisas de un automóvil mide 18 pulgadas de largo. ¿Cuántas pulgadas cubre el extremo del limpiador en $\frac{1}{3}$ de revolución?

76. *Limpiadores de parabrisas.* El limpiador del parabrisas de un automóvil mide 18 pulgadas de largo. Si tarda un segundo en describir $\frac{1}{3}$ de revolución, ¿qué tan rápido se está moviendo el extremo del limpiador?

77. *Velocidad de la luna.* La distancia media de la Luna a la Tierra es 2.39×10^5millas. Suponiendo que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular y que una revolución tarda 27.3 días, encuentre la velocidad lineal de la Luna. Exprese su respuesta en millas por hora.

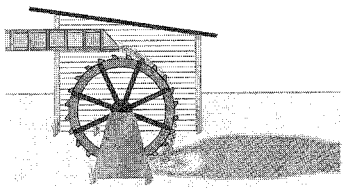
78. *Velocidad de la Tierra.* La distancia media de la Tierra al Sol es 9.29×10^7 millas. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que una revolución tarda 365 días, encuentre la velocidad lineal de la Tierra. Exprese su respuesta en millas por hora.

79. *Poleas.* Dos poleas, una con radio de 2 pulgadas y la otra con radio de 8 pulgadas están conectadas por una banda. (*Véase* la figura.) Si la polea de 2 pulgadas se hace girar a 3 revoluciones por minuto, determine las revoluciones por minuto de la polea de 8 pulgadas. [*Sugerencia*: Las velocidades lineales de las poleas, esto es, la velocidad de la banda, son iguales.]



80. *Poleas.* Dos poleas, una con radio r_1 y la otra con radio r_2 están conectadas por una banda. La polea con radio r_1 gira a ω_1 revoluciones por minuto, mientras que la polea con radio r_2 rota a ω_2 revoluciones por minuto. Demuestre que $r_1/r_2 = \omega_2/\omega_1$.

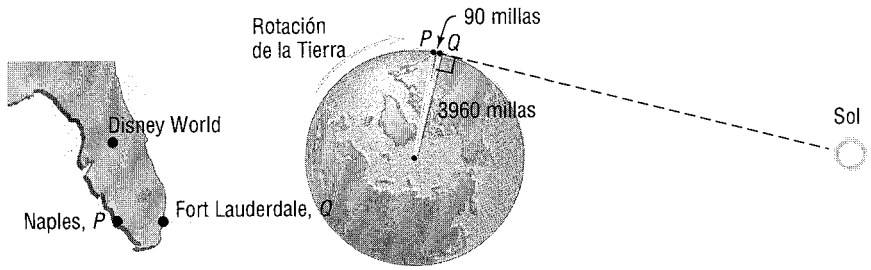
81. *Cálculo de la velocidad de un río* Para medir aproximadamente la velocidad de la corriente de un río, una rueda de paletas con radio de 4 pies es introducida al agua. Si la corriente hace que la rueda gire a 10 revoluciones por minuto, ¿cuál es la velocidad de la corriente? Exprese su respuesta en millas por hora.



82. *Balanceo de llantas* Un aparato para balancear llantas gira la llanta de un automóvil a 480 revoluciones por minuto. Si el diámetro de la llanta es de 26 pulgadas, ¿a qué velocidad está siendo probada? Exprese su respuesta en millas por hora. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe ajustarse el balanceador para probar a una velocidad de 80 millas por hora?

83. *Millas náuticas* Una **milla náutica** es igual a la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 1 minuto de un círculo máximo* sobre la superficie de la Tierra. (*Véase* la figura.) Si el radio de la Tierra se toma como 3960 millas, exprese 1 milla náutica en término de millas, o **millas terrestres**, (5280 pies).

84. *Diferencia en hora de la salida del sol* Naples, Florida, está aproximadamente a 90 millas en dirección oeste de Fuerte Lauderdale. ¿Cuánto tiempo antes una persona en Fuerte Lauderdale verá la salida del Sol que una persona en Naples? [*Sugerencia*: Consulte la figura. Cuando una persona en Q ve los primeros rayos del Sol, una persona en P aún está en la oscuridad. La persona en P ve los primeros rayos del Sol después que la Tierra ha girado de modo que P esté en la posición de Q. Ahora utilice el hecho de que en 24 horas se subtiende un arco de $2\pi(3960)$ millas.]



85. *Seguimiento del sol* ¿Qué tan rápido tendría usted que recorrer la superficie de la Tierra para seguir al Sol (esto es, de modo que el Sol parezca permanecer en la misma posición en el cielo)?

86. ¿Prefiere medir ángulos usando grados o radianes? Proporcione una justificación y un análisis razonado para su elección.

87. Analice por qué los barcos y los aeroplanos utilizan millas náuticas para medir las distancias. Explique la diferencia entre una milla náutica y una milla terrestre.

88. Investigue el funcionamiento de las bicicletas de carreras. En particular, explique las diferencias y similitudes entre las de 10 y 18 velocidades (10 y 18 cambios de velocidad). Asegúrese de incluir un análisis de velocidad lineal y velocidad angular.

Funciones trigonométricas: Estudio por medio del círculo unitario

Ahora estamos preparados para estudiar las funciones trigonométricas. Como se dijo antes, el enfoque elegido se basa en el círculo unitario.

Círculo unitario

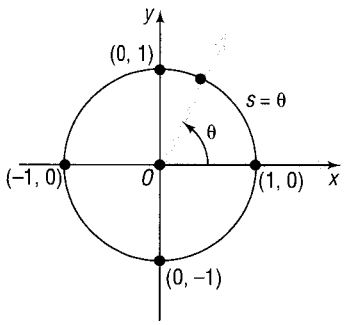
Recuerde que el **círculo unitario** es un círculo con radio igual a 1 y cuyo centro está en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Ya que el radio r del

*Cualquier círculo trazado sobre la superficie de la Tierra que la divide en dos hemisferios iguales.

círculo unitario es 1, vemos de la fórmula $s = r\theta$ que en el círculo unitario un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = \theta$$

FIGURA 15
Círculo unitario: $x^2 + y^2 = 1$

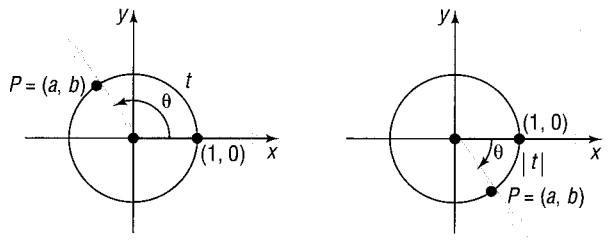


Véase la figura 15. Así, sobre el círculo unitario, la medida de la longitud del arco s es igual a la medida en radianes del ángulo central θ. En otras palabras, sobre el círculo unitario, el número real utilizado para medir un ángulo θ en radianes corresponde exactamente al número real usado para medir la longitud del arco subtendido por ese ángulo.

Por ejemplo, suponga que $r = 1$ pie. Entonces, si $\theta = 3$ radianes, $s = 3$ pies; si $\theta = 8.2$ radianes, entonces $s = 8.2$ pies; y así sucesivamente.

Ahora, sea t cualquier número real y θ el ángulo, en posición estándar, igual a t radianes. Sea P el punto sobre el círculo unitario que también está sobre el lado final de θ. Si $t \geq 0$, se llega a este punto P moviéndose una longitud de arco igual a t unidades *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* por todo el círculo unitario, iniciando en (1, 0). *Véase* la figura 16(a). Si $t < 0$, se llega a este punto P moviéndose una longitud de arco igual a $|t|$ unidades en el *sentido de las manecillas del reloj* a lo largo del círculo unitario, iniciando en (1, 0). *Véase* la figura 16(*b*).

FIGURA 16



(a) θ = t radianes; la longitud del arco desde (1, 0) hasta P es de t unidades, t 0

(b) θ = t radianes; la longitud del arco desde (1, 0) hasta P es de $|t|$ unidades, $t < 0$

Así, a cada número real t le corresponde un punto único $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario. Aquí esa es la idea importante. No importa cuál sea el número real t elegido, le corresponde un punto único P sobre el círculo unitario. Usamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario que corresponde al número real t para definir las **seis funciones trigonométricas.**

Funciones trigonométricas

Sea t un número real y $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t.

Función seno

La **función seno** asocia con t la coordenada y de P y es denotada por

$$\operatorname{sen} t = b$$

Función coseno

La **función coseno** asocia con t la coordenada x de P y es denotada por

$$\cos t = a$$

Función tangente

Si $a \neq 0$, la **función tangente** está definida como

$$\tan t = \frac{b}{a}$$

Función cosecante

Si $b \neq 0$, la **función cosecante** está definida como

$$\csc t = \frac{1}{b}$$

Función secante

Si $a \neq 0$, la **función secante** está definida como

$$\sec t = \frac{1}{a}$$

Función cotangente

Si $b \neq 0$, la **función cotangente** está definida como

$$\cot t = \frac{a}{b}$$

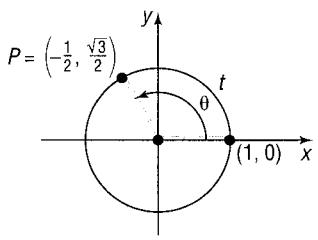
Nótese en estas definiciones que si $a = 0$, esto es, si el punto $P = (0, b)$ está sobre el eje y, entonces la función tangente y la función secante no se definen. También, si $b = 0$, esto es, si el punto $P = (a, 0)$ está sobre el eje x, entonces las funciones cosecante y cotangente no se definen.

Debido al uso del círculo unitario en estas definiciones de las funciones trigonométricas, también se les conoce como **funciones circulares.**

EJEMPLO 1 *Determinación del valor de las seis funciones trigonométricas*

Sea t un número real y $P = (-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t. *Véase* la figura 17. Entonces

FIGURA 17
$\theta = t$ radianes



$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos t = -\frac{1}{2} \qquad \tan t = \frac{\sqrt{3}/2}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

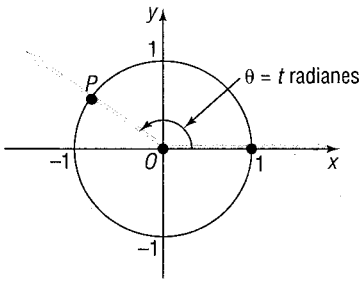
$$\csc t = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec t = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \cot t = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea P el punto sobre el círculo unitario que corresponde al número real t. Entonces el ángulo θ, en posición estándar y medido en radianes, cuyo lado final es el rayo que va del origen al punto P es

$$\theta = t \text{ radianes}$$

FIGURA 18



Véase la figura 18.

Así, sobre el círculo unitario, la medida del ángulo θ en radianes es igual al valor del número real t. Como resultado de esto, podemos decir

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta$$

número real θ = t radianes

y así sucesivamente. Ahora podemos definir las funciones trigonométricas del ángulo θ.

Si $\theta = t$ radianes, las **seis funciones trigonométricas del ángulo** θ están definidas como

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t \qquad \tan\theta = \tan t$$
$$\csc\theta = \csc t \qquad \sec\theta = \sec t \qquad \cot\theta = \cot t$$

Aunque la distinción entre funciones trigonométricas de números reales y funciones trigonométricas de ángulos es importante, se acostumbra referirse a éstas en conjunto como *las funciones trigonométricas*. De ahora en adelante adoptaremos esa práctica.

Si un ángulo θ se mide en grados, usaremos el símbolo de grados cuando se escriba una función trigonométrica de θ, por ejemplo en sen 30° y tan 45°. Si un ángulo θ se mide en radianes, entonces no se usará símbolo alguno cuando se escriba una función trigonométrica, como en cos π y sec $\pi/3$.

Por último, ya que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ están determinados por las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario correspondiente a θ, las unidades usadas para medir el ángulo θ son irrelevantes. Por ejemplo, no importa si escribimos $\theta = \pi/2$ radianes o $\theta = 90°$. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a este ángulo es $P = (0, 1)$. De modo que,

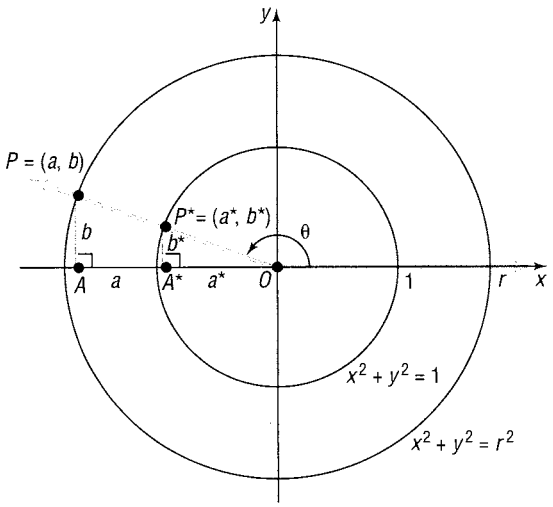
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90° = 1 \quad \text{y} \quad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$$

Evaluación de las funciones trigonométricas

Para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica de un ángulo θ se necesita que localicemos el punto correspondiente P sobre el círculo unitario. De hecho, cualquier círculo cuyo centro esté en el origen puede usarse.

Sea θ cualquier ángulo no cuadrantal colocado en posición estándar. Sea $P^* = (a^*, b^*)$ el punto donde el lado final de θ corta al círculo unitario. *Véase* la figura 19.

FIGURA 19



Sea $P = (a, b)$ cualquier punto sobre el lado final de θ. Suponga que r es la distancia desde el origen hasta P. Entonces P está sobre el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Observe la figura 19 otra vez y advierta que los triángulos OA^*P^* y OAP son semejantes; por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales:

$$\frac{b^*}{1} = \frac{b}{r} \qquad \frac{a^*}{1} = \frac{a}{r} \qquad \frac{b^*}{a^*} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{b^*} = \frac{r}{b} \qquad \frac{1}{a^*} = \frac{r}{a} \qquad \frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

Estos resultados nos conducen a formular el teorema siguiente:

Para un ángulo θ en posición estándar, sea $P = (a, b)$ cualquier punto en el lado final de θ. Si r es igual a la distancia desde el origen hasta P, entonces

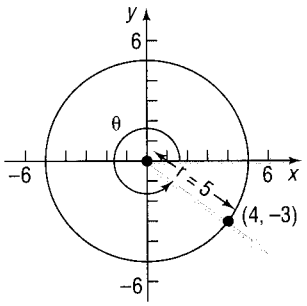
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Encontrar el valor exacto de cada una las seis funciones trigonométricas de un ángulo θ si $(4, -3)$ es un punto en su lado final.

Solución La figura 20 ilustra la situación para un ángulo positivo θ. Para el punto $(a, b) = (4, -3)$, tenemos $a = 4$ y $b = -3$. Entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por tanto,

FIGURA 20



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = -\frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b} = -\frac{5}{3} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{5}{4} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$$

■

Ahora resuelva el problema 1.

Para evaluar las funciones trigonométricas de un ángulo θ dado en posición estándar, necesitamos encontrar las coordenadas de cualquier punto en el lado final de ese ángulo. Esto no siempre es fácil de hacer. En los ejemplos siguientes evaluaremos las funciones trigonométricas de ciertos ángulos para los cuales este proceso es relativamente fácil. En la mayoría de los ángulos será necesaria una calculadora para evaluar las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 *Determinación del valor exacto de las seis funciones trigonométricas de ángulos cuadrantes*

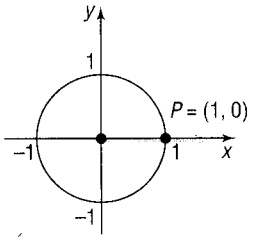
Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas en

(a) $\theta = 0 = 0°$ (b) $\theta = \pi/2 = 90°$ (c) $\theta = \pi = 180°$

(d) $\theta = 3\pi/2 = 270°$

Solución (a) El punto $P = (1, 0)$ está en el lado final de $\theta = 0 = 0°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 21. Por lo tanto,

FIGURA 21
$\theta = 0 = 0°$



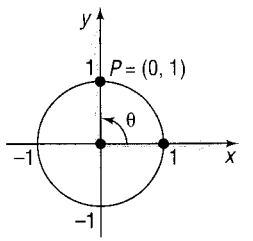
$$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 0 = \cos 0° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0 = \tan 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 0 = \sec 0° = \frac{1}{1} = 1$$

Ya que la coordenada y de P es 0, csc 0 y cot 0 no están definidas.

(b) El punto $P = (0, 1)$ está en el lado final de $\theta = \pi/2 = 90°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 22. Por lo tanto,

FIGURA 22
$\theta = \pi/2 = 90°$

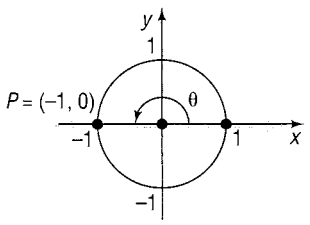


$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \cot 90° = \frac{0}{1} = 0$$

Ya que la coordenada x de P es 0, tan $\pi/2$ y sec $\pi/2$ no están definidas.

FIGURA 23
$\theta = \pi = 180°$



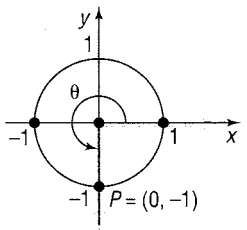
(c) El punto $P = (-1, 0)$ está en el lado final de $\theta = \pi = 180°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 23. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos \pi = \cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan \pi = \tan 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec \pi = \sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$$

Ya que la coordenada y de P es 0, $\csc \pi$ y $\cot \pi$ no están definidas.

FIGURA 24
$\theta = 3\pi/2 = 270°$



(d) El punto $P = (0, -1)$ está en el lado final de $\theta = 3\pi/2 = 270°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 24. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen} 270° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270° = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270° = \frac{0}{-1} = 0$$

Ya que la coordenada x de P es 0, $\tan 3\pi/2$ y $\sec 3\pi/2$ no están definidas.

Nota: Los resultados obtenidos en el ejemplo 3 serán los mismos ya sea que seleccionemos un punto en el círculo unitario o un punto en cualquier círculo cuyo centro sea el origen. Por ejemplo, $P = (0, 5)$ es un punto en el lado final de $\theta = \pi/2 = 90°$ y está a una distancia de 5 unidades desde el origen. Utilizando este punto, $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{5} = 1$, $\cos \theta = \frac{0}{5} = 0$, y así sucesivamente, como en el ejemplo 3(b).

La tabla 2 resume los valores de las funciones trigonométricas encontradas en el ejemplo 3.

TABLA 2 ÁNGULOS CUADRANTES

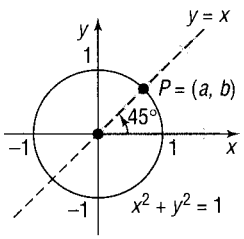
θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\pi/2$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	−1	0	No definida	−1	No definida
$3\pi/2$	270°	−1	0	No definida	−1	No definida	0

Ahora resuelva los problemas 19 y 39.

Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas en:

(a) $\theta = \pi/4 = 45°$ (b) $\theta = -\pi/4 = -45°$

FIGURA 25
$\theta = \pi/4 = 45°$



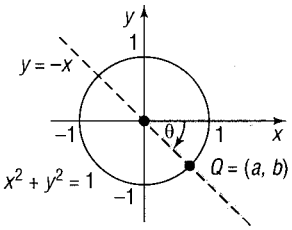
(a) Buscamos las coordenadas de un punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/4 = 45°$. *Véase* la figura 25. Primero, observamos que P está en la recta $y = x$. (¿Advierte por qué? Como $\theta = 45° = \frac{1}{2} \cdot 90°$, P debe estar en la recta que biseca al primer cuadrante.) Suponga que P también está en el círculo unitario de modo que P está a una distancia de 1 unidad desde el origen. Se deduce entonces que

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad a = b,\ a > 0,\ b > 0$$
$$a^2 + a^2 = 1$$
$$2a^2 = 1$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \tan 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$
$$\csc\frac{\pi}{4} = \csc 45° = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sec 45° = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \cot 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

FIGURA 26
$\theta = -\pi/4 = -45°$



(b) Buscamos las coordenadas de un punto $Q = (a, b)$ en el lado final de $\theta = -\pi/4 = -45°$. *Véase* la figura 26. Primero, notamos que Q está en la recta $y = -x$. Si Q también está sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, entonces

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad b = -a,\ a > 0$$
$$a^2 + (-a)^2 = 1$$
$$2a^2 = 1$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = -a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto,

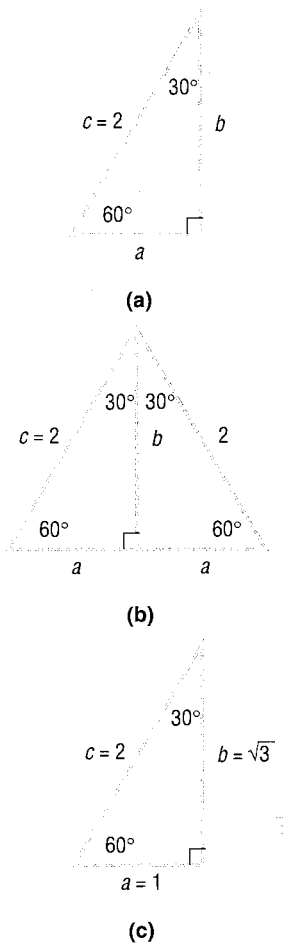
$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan(-45°) = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$$
$$\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \csc(-45°) = \frac{1}{-\sqrt{2}/2} = -\sqrt{2} \qquad \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot(-45°) = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1$$

Al resolver el ejemplo 4(b), podríamos haber localizado el punto Q utilizando las coordenadas de $P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ del ejemplo 4(a), tomando en cuenta la simetría de Q y P con respecto al eje x.

Encontrar el valor exacto de cada expresión:

(a) $\operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 180°$ (b) $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

FIGURA 27



Solución

(a) $\operatorname{sen} 45° \cos 180° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Del ejemplo 4(a) ↑ ↑ De la tabla 2

(b) $\tan \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} = 1 - (-1) = 2$

Del ejemplo 4(a) ↑ ↑ De la tabla 2

Ahora resuelva los problemas 15 y 37.

Funciones trigonométricas de 30° y 60°

Considere un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos es de 30°. Se deduce que el otro ángulo es de 60°. La figura 27(a) ilustra uno con hipotenusa de longitud 2. Nuestro problema es determinar a y b.

Empezamos colocando junto a este triángulo otro triángulo congruente, como se muestra en la figura 27(b). Nótese que ahora tenemos un triángulo cuyos ángulos son cada uno de 60°. Por lo tanto, este triángulo es equilátero, de modo que cada lado tiene longitud 2. En particular, la base es $2a = 2$ y así $a = 1$. Por el teorema de Pitágoras, b satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, así que tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 1^2 + b^2 &= 2^2 \\ b^2 &= 4 - 1 = 3 \\ b &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Esto resulta en la figura 27(c) y conduce al teorema siguiente:

Teorema

En un triángulo rectángulo de 30, 60 y 90 grados, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es un medio de la longitud de la hipotenusa. La longitud del cateto adyacente es $\sqrt{3}/2$ veces la longitud de la hipotenusa.

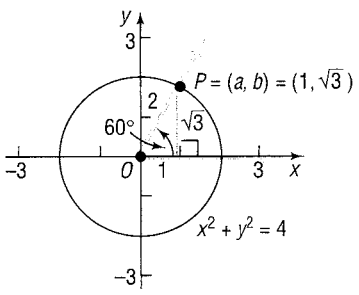
EJEMPLO 6 *Determinación del valor exacto de las funciones trigonométricas ($\theta = 60°$)*

Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas de $\pi/3 = 60°$.

Solución

Reubicamos el triángulo de la figura 27(c) en un sistema de coordenadas rectangulares. Buscamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/3 = 60°$, a una distancia de 2 unidades desde el origen. *Véase* la figura 28.

FIGURA 28



Con base en el teorema anterior, se deduce que $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$. Como $r = 2$, , tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = \sec 60° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

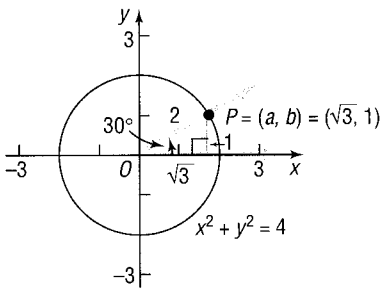
Determinar el valor exacto de las funciones trigonométricas de $\pi/6 = 30°$.

Nuevamente, reubicamos el triángulo de la figura 27(c) en un sistema de coordenadas rectangulares. Buscamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/6 = 30°$, a una distancia de 2 unidades desde el origen. *Véase* la figura 29. Con base en el teorema anterior, se deduce que $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$. Como $r = 2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{6} = \csc 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \sec\frac{\pi}{6} = \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\frac{\pi}{6} = \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

FIGURA 29



La tabla 3 resume la información recién deducida para $\pi/6$ (30°), $\pi/4$ (45°), y $\pi/3$ (60°). Cuando haya memorizado las entradas en la tabla 3, deberá dibujar un diagrama apropiado para determinar los valores dados en ella.

TABLA 3

θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\pi/6$	30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$

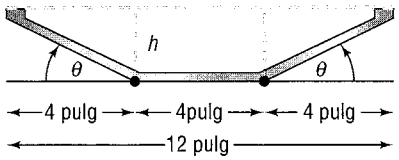
Ahora resuelva los problemas 21 y 31.

Se construirá un canal de desagüe pluvial con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a cada lado, las hojas se doblarán en un ángulo θ. *Véase* la figura 30. El área A de la abertura puede ser expresada como una función de θ:

$$A(\theta) = 16 \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta + 1)$$

Encontrar el área A de la abertura para $\theta = 30°$, $\theta = 45°$, y $\theta = 60°$.

FIGURA 30



Solución

$$\text{Para } \theta = 30°: \quad A(30°) = 16 \operatorname{sen} 30° (\cos 30° + 1)$$
$$= 16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = 4\sqrt{3} + 8$$

El área de la abertura para $\theta = 30°$ es aproximadamente 14.9 pulgadas cuadradas.

$$\text{Para } \theta = 45°: \quad A(45°) = 16 \operatorname{sen} 45° (\cos 45° + 1)$$
$$= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 8 + 8\sqrt{2}$$

El área de la abertura para $\theta = 45°$ es aproximadamente 19.3 pulgadas cuadradas.

$$\text{Para } \theta = 60°: \quad A(60°) = 16 \operatorname{sen} 60° (\cos 60° + 1)$$
$$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} + 1\right) = 12\sqrt{3}$$

El área de la abertura para $\theta = 60°$ es aproximadamente 20.8 pulgadas cuadradas.

Uso de una calculadora para determinar el valor de una función trigonométrica

Antes de empezar a trabajar tiene que decidir si introducirá los ángulos a la calculadora usando radianes o grados, después instale la calculadora en el modo correcto. Si su calculadora no muestra el modo, usted puede determinarlo introduciendo 30 y presionando luego la tecla marcada con [sen]. Si está en modo de grados, la pantalla mostrará [0.5] (sen 30° = 0.5). Si está en radianes la pantalla mostrará [−0.9880316]. La mayoría de las calculadoras tienen una tecla que le permite cambiar de un modo al otro. (Revise el manual de operación para saber cómo maneja su calculadora grados y radianes.)

Tal vez su calculadora sólo tenga teclas marcadas [sen], [cos], y [tan]. Para encontrar los valores de las otras tres funciones trigonométricas, secante, cosecante y cotangente, usamos el hecho de que

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Estos valores son una consecuencia directa del teorema establecido en la página 336.

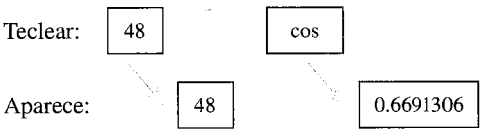
EJEMPLO 9 *Uso de una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica*

Usar una calculadora para encontrar el valor aproximado de

(a) $\cos 48°$ (b) $\csc 21°$ (c) $\tan\dfrac{\pi}{12}$

Redondear las respuestas a dos decimales.

(a) Primero, establecemos el modo para que utilice grados.

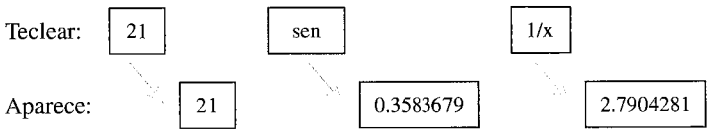


Por tanto,

$$\cos 48^\circ \approx 0.67$$

redondeando a dos decimales.

(b) La mayoría de las calculadoras no tiene una tecla CSC. Los fabricantes suponen que el usuario sabe algo de trigonometría. Así, para encontrar el valor de csc 21°, usamos el hecho de que csc 21° = 1/(sen 21°) y procedemos como sigue:

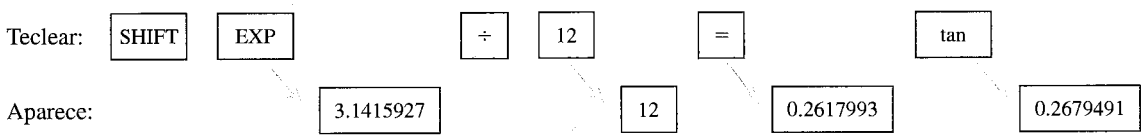


Por lo tanto,

$$\csc 21^\circ \approx 2.79$$

redondeando a dos decimales.

(c) Ponga el modo para que la calculadora reciba radianes. Después, encuentre $\tan(\pi/12)$,



Por lo tanto,

$$\tan \frac{\pi}{12} \approx 0.27$$

redondeando a dos decimales.

Ahora resuelva el problema 47.

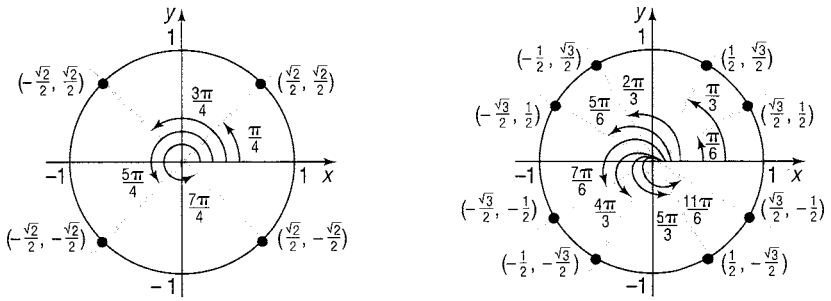
Resumen

Para los ángulos cuadrantales o los ángulos de 30°, 45°, 60° y sus múltiplos enteros, podemos encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas utilizando las características geométricas de estos ángulos y simetría.

La figura 31 muestra puntos en el círculo unitario que están en los lados finales de algunos ángulos que son múltiplos enteros de $\pi/6$ (30°), $\pi/4$ (45°) y $\pi/3$ (60°).

Nótese la relación entre los múltiplos enteros de un ángulo y la simetría. Por ejemplo, en la figura 31(a), el punto en el círculo unitario que corresponde a $7\pi/4$

FIGURA 31



(a) (b)

es la reflexión con respecto al eje x del punto correspondiente a $\pi/4$. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a $5\pi/4$, es la reflexión con respecto al origen del punto correspondiente a $\pi/4$. Así, utilizando la figura 31(a), vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1$$

Y utilizando la figura 31(b),

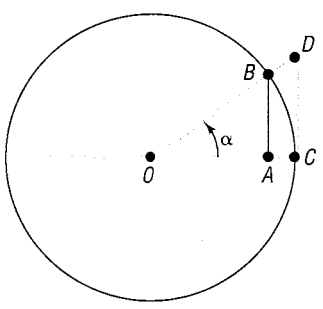
$$\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{4\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Para la mayoría de los ángulos, además de los ángulos cuadrantales y de aquellos enlistados en la figura 31, sólo podemos aproximar el valor de cada función trigonométrica usando una calculadora.

HECHOS HISTÓRICOS

■ El término *seno* para la función seno se debe a una confusión medieval. El nombre proviene de la palabra sánscrita *jīva* (que significa cuerda), usada primero en la India por Āryabhata el Mayor (510 d. de C.). Realmente quería decir media cuerda, pero la abrevió. Esto fue llevado al árabe como *jība,* lo cual no tiene significado. Puesto que la palabra apropiada en árabe *jaib* se escribía de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), *jība* se pronunció como *jaib*, que significa pecho, seno o hueco, y hasta nuestros días *jaib* permanece como el significado en árabe para seno. Los especialistas tradujeron las trabajos árabes al latín encontrando que la palabra *sinus* también significaba pecho, seno o hueco, y de *sinus* obtuvimos la palabra *seno.*

FIGURA 32



El nombre *tangente*, debido a Thomas Fincke (1583), puede entenderse viendo la figura 32. El segmento de recta $\overline{DC}$ es tangente al círculo en C. Si $d(O, B) = d(O, C) = 1$, entonces la longitud del segmento de recta $\overline{DC}$ es

$$d(D, C) = \frac{d(D, C)}{1} = \frac{d(D, C)}{d(O, C)} = \tan\alpha$$

El nombre antiguo para la tangente es *umbra versa* (que significa sombra regresada), refiriéndose al uso de la tangente en la resolución de problemas de altura mediante sombras.

Los nombres de las funciones restantes se sucedieron como sigue. Si α y β son ángulos complementarios, entonces cos α= sen β. Ya que β es el complemento de α, era natural escribir coseno de α como *sen co* α. Probablemente por razones que involucran facilidad de pronunciación, la partícula *co* se pasó al frente, y entonces el coseno recibió una abreviación de tres letras como sen, sec y tan. Las otras dos cofunciones fueron tratadas de manera similar, excepto que las formas largas *cotan* y *cosec* subsisten hasta nuestros días en algunos países. ■

Ejercicio 5.2

En los problemas del 1 al 10 se da un punto en el lado final de un ángulo θ. Encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de θ.

1. $(-3, 4)$ **2.** $(5, -12)$ **3.** $(2, -3)$ **4.** $(-1, -2)$ **5.** $(-2, -2)$

6. $(1, -1)$ **7.** $(-3, -2)$ **8.** $(2, 2)$ **9.** $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$ **10.** $(-0.3, -0.4)$

En los problemas del 11 al 30 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

11. $\operatorname{sen} 45° + \cos 60°$ **12.** $\operatorname{sen} 30° - \cos 45°$ **13.** $\operatorname{sen} 90° + \tan 45°$

14. $\cos 180° - \operatorname{sen} 180°$ **15.** $\operatorname{sen} 45° \cos 45°$ **16.** $\tan 45° \cos 30°$

17. $\csc 45° \tan 60°$ **18.** $\sec 30° \cot 45°$ **19.** $4 \operatorname{sen} 90° - 3 \tan 180°$

20. $5 \cos 90° - 8 \operatorname{sen} 270°$ **21.** $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - 3 \tan \frac{\pi}{6}$ **22.** $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + 3 \tan \frac{\pi}{4}$

23. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$ **24.** $\tan \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$ **25.** $2 \sec \frac{\pi}{4} + 4 \cot \frac{\pi}{3}$

26. $3 \csc \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$ **27.** $\tan \pi - \cos 0$ **28.** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \tan \pi$

29. $\csc \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\pi}{2}$ **30.** $\sec \pi - \csc \frac{\pi}{2}$

En los problemas del 31 al 46 encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Si alguna no está definida, indíquelo así: "No definida". No utilice calculadora.

31. $2\pi/3$ **32.** $3\pi/4$ **33.** $150°$ **34.** $330°$

35. $-\pi/6$ **36.** $-\pi/3$ **37.** $225°$ **38.** $210°$

39. $5\pi/2$ **40.** 3π **41.** $-180°$ **42.** $-270°$

43. $3\pi/2$ **44.** $-\pi$ **45.** $450°$ **46.** $-90°$

En los problemas del 47 al 70 utilice una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión redondeado a dos decimales.

47. $\operatorname{sen} 28°$ **48.** $\cos 14°$ **49.** $\tan 21°$ **50.** $\operatorname{sen} 15°$

51. $\sec 41°$ **52.** $\csc 55°$ **53.** $\cot 70°$ **54.** $\tan 80°$

55. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$ **56.** $\cos \frac{\pi}{8}$ **57.** $\tan \frac{5\pi}{12}$ **58.** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{10}$

59. $\sec \frac{\pi}{12}$ **60.** $\csc \frac{5\pi}{13}$ **61.** $\cot \frac{\pi}{18}$ **62.** $\operatorname{sen} \frac{\pi}{18}$

63. $\operatorname{sen} 1$ **64.** $\tan 1$ **65.** $\operatorname{sen} 1°$ **66.** $\tan 1°$

67. $\cos 21.5°$ **68.** $\cos 35.2°$ **69.** $\tan 0.3$ **70.** $\tan 0.1$

En los problemas del 71 al 82 encuentre el valor exacto de cada expresión si $\theta = 60°$. No utilice calculadora.

71. $\operatorname{sen} \theta$ **72.** $\cos \theta$ **73.** $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ **74.** $\cos \frac{\theta}{2}$

75. $(\operatorname{sen} \theta)^2$ **76.** $(\cos \theta)^2$ **77.** $\operatorname{sen} 2\theta$ **78.** $\cos 2\theta$

79. $2 \operatorname{sen} \theta$ **80.** $2 \cos \theta$ **81.** $\frac{\operatorname{sen} \theta}{2}$ **82.** $\frac{\cos \theta}{2}$

83. Encuentre el valor exacto de sen 45° + sen 135° + sen 225° + sen 315°.

84. Encuentre el valor exacto de tan 60° + tan 150°.

85. Si sen $\theta = 0.1$, encuentre sen$(\theta + \pi)$.

86. Si cos $\theta = 0.3$, encuentre cos$(\theta + \pi)$.

87. Si tan $\theta = 3$, encuentre tan$(\theta + \pi)$.

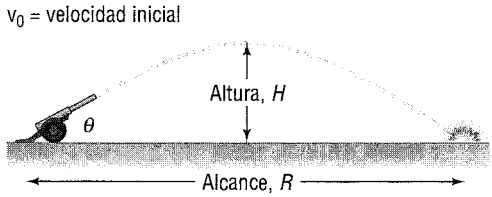
88. Si cot $\theta = -2$, encuentre cot$(\theta + \pi)$.

89. Si sen $\theta = \frac{1}{5}$, encuentre csc θ.

90. Si cos $\theta = \frac{2}{3}$, encuentre sec θ.

La trayectoria de un proyectil disparado con inclinación θ respecto de la horizontal a una velocidad inicial v_0 es una parábola (véase *la figura*). *El alcance R del proyectil, esto es, la distancia horizontal que recorre, se encuentra usando la fórmula*

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$



donde $g \approx 32.2$ pies/segundo^2 ≈ 9.8 metros/segundo^2 es la aceleración debida a la gravedad. La altura máxima H del proyectil es

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

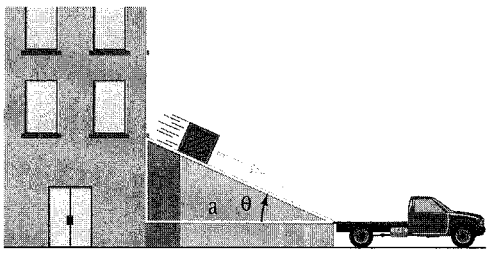
En los problemas del 91 al 94, encuentre el alcance R y la altura máxima H.

91. El proyectil es disparado en ángulo de 45° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 100 pies por segundo.

92. El proyectil es disparado en ángulo de 30° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 150 metros por segundo.

93. El proyectil es disparado en ángulo de 25° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 500 metros por segundo.

94. El proyectil es disparado en ángulo de 50° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 200 pies por segundo.



95. Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) necesarios para que un bloque se deslice en un plano inclinado (*véase* la figura) está dado por la fórmula

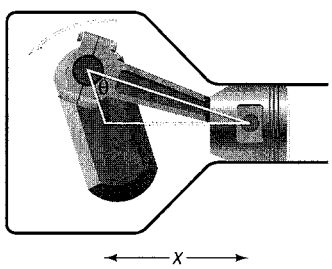
$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \operatorname{sen}\theta \cos\theta}}$$

donde a es la longitud (en pies) de la base y $g \approx 32$ pies/segundo^2 la aceleración debida a la gravedad. ¿Cuánto tiempo le tomará al bloque deslizarse en un plano inclinado con base $a = 10$ pies cuando
(a) $\theta = 30°$? (b) $\theta = 45°$? (c) $\theta = 60°$?

96. En cierto motor de pistones, la distancia x (en metros) desde el centro del eje de dirección a la cabeza del pistón está dada por

$$x = \cos\theta + \sqrt{16 + 0.5\cos 2\theta}$$

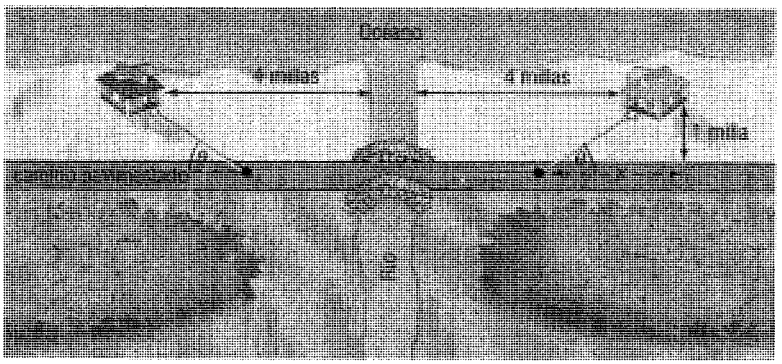
donde θ es el ángulo entre la manivela y la trayectoria de la cabeza del pistón (*véase* la figura). Encuentre x cuando $\theta = 30°$ y cuando $\theta = 45°$.



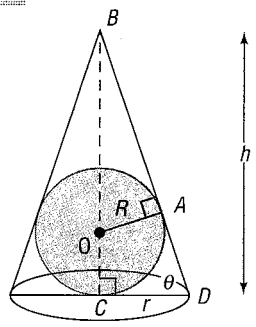
97. *Cálculo del tiempo de un viaje.* Dos casas en la playa están separadas 8 millas en línea recta y cada una queda a una milla de una carretera pavimentada paralela al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pero sólo a 3 millas por hora en la arena de la playa. A causa de un río que está entre las dos casas, para ir de una a la otra es necesario caminar por la arena hacia la carretera, seguir por la carretera y luego caminar de nuevo en la arena. *Véase* la ilustración. El tiempo T desde una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración es

$$T(\theta) = 1 + \frac{2}{3 \operatorname{sen} \theta} - \frac{1}{4 \tan \theta}, \quad 0° < \theta < 90°$$

(a) Cálcule el tiempo T para $\theta = 30°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(b) Cálcule el tiempo T para $\theta = 45°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(c) Cálcule el tiempo T para $\theta = 60°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(d) Cálcule el tiempo T para $\theta = 90°$. Describa la trayectoria tomada. ¿Por qué no puede utilizarse la fórmula T ?



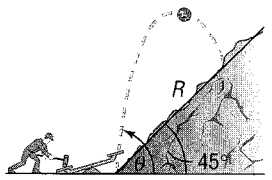
98. *Diseño de piezas decorativas.* Un diseñador de arte decorativo planea comercializar esferas de oro sólido encerradas en conos de cristal claro. Cada esfera es de radio fijo R y será encerrada en un cono de altura h y radio r. *Véase* la ilustración. Muchos conos pueden ser utilizados para encerrar la esfera, cada uno con diferente ángulo de inclinación θ. El volumen V del cono puede ser expresado como una función del ángulo de inclinación del cono:



$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{(1 + \sec \theta)^3}{\tan^2 \theta}, \quad 0° < \theta < 90°$$

¿Qué volumen V es necesario para encerrar una esfera con radio de 2 centímetros en un cono cuyo ángulo de inclinación θ es 30°? 45°? 60°?

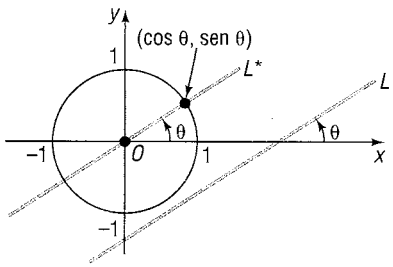
99. *Movimiento de un proyectil.* Un objeto es lanzado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, con respecto a la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia del aire, la distancia R que recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por



$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

Encuentre la distancia R que el objeto recorre a lo largo del plano inclinado si la velocidad inicial es de 32 pies por segundo y $\theta = 60°$.

100. Si θ $(0 < \theta < \pi)$ es el ángulo entre un rayo horizontal dirigido hacia la derecha (digamos, el eje x positivo) y una recta no horizontal y no vertical L, demuestre que la pendiente m de L es igual a tan θ. El ángulo θ es llamado **inclinación** de L. [*Sugerencia: Vea* la ilustración, donde hemos dibujado la recta L^* paralela a L y que pasa por el origen. Utilice el hecho de que L^* corta al círculo unitario en el punto (cos θ, sen θ).]



101. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

102. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°.

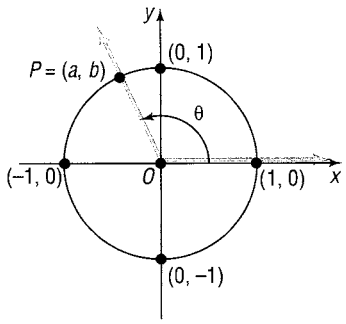
103. ¿Cómo explicaría usted el significado de la función seno a un compañero estudiante que apenas haya terminado el curso de álgebra?

Propiedades de las funciones trigonométricas

Dominio y rango de las funciones trigonométricas

Sean θ un ángulo en posición estándar y $P = (a, b)$ un punto en el lado final de θ. Por conveniencia, suponga que P también está en el círculo unitario. *Véase* la figura 33. Entonces, por definición

FIGURA 33



$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Para sen θ y cos θ, θ puede ser cualquier ángulo, así se deduce que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales.

El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales.
El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

Si $a = 0$, entonces la función tangente y la función secante no están definidas. Así que, para la función tangente y la función secante, la coordenada x de $P = (a, b)$ no puede ser cero. Sobre el círculo unitario hay dos de tales puntos, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Estos dos puntos corresponden a los ángulos $\pi/2$ (90°) y $3\pi/2$ (270°) o, de manera más general, cualquier ángulo que sea un múltiplo impar de $\pi/2$ (90°), tal como $\pi/2$ (90°), $3\pi/2$ (270°), $5\pi/2$ (450°), $-\pi/2$ (−90°), $-3\pi/2$ (−270°), y así sucesivamente. Por lo tanto, dichos ángulos deben ser excluidos del dominio de las funciones tangente y secante.

El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°).
El dominio de la función secante es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°).

Si $b = 0$, entonces las funciones cotangente y cosecante no están definidas. Así que para éstas, la coordenada y de $P = (a, b)$ no puede ser cero. Sobre el círculo unitario, hay dos de tales puntos, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Estos dos puntos corresponden a los ángulos 0 (0°) y π (180°) o, de manera más general, a cualquier ángulo que sea un múltiplo entero de π (180°), tal como 0 (0°), π (180°), 2π (360°), 3π (540°), $-\pi$ (−180°), y así sucesivamente. Por lo tanto, dichos ángulos deben ser excluidos del dominio de las funciones cotangente y cosecante.

El dominio de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°).

El dominio de la función cosecante es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°).

Ahora determinemos el rango de cada una de las seis funciones trigonométricas refiriéndonos otra vez a la figura 33. Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Se deduce que $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$. En consecuencia, ya que sen $\theta = b$ y cos $\theta = a$, tenemos

$$-1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1 \qquad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

Así, el rango de las funciones seno y coseno lo constituyen todos los números reales entre -1 y 1, inclusive. En términos de la notación de valor absoluto, tenemos $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$ y $|\cos \theta| \leq 1$.

De manera análoga, si θ no es un múltiplo de π (180°), entonces csc $\theta = 1/b$. Como $b = \operatorname{sen} \theta$ y $|b| = |\operatorname{sen} \theta| \leq 1$, se deduce que $|\csc \theta| = 1/|b| \geq 1$. En consecuencia, el rango de la función cosecante lo constituyen todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1. Esto es,

$$\csc \theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \csc \theta \geq 1$$

Si θ no es un múltiplo impar de $\pi/2$ (90°), entonces, por definición, sec $\theta = 1/a$. Como $a = \cos \theta$ y $|a| = |\cos \theta| \leq 1$, se deduce que $|\sec \theta| = 1/|a| \geq 1$. Por tanto, el rango de la función secante lo constituyen todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1.

$$\sec \theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \sec \theta \geq 1$$

El rango de las funciones tangente y cotangente lo constituyen todos los números reales. Se le pedirá comprobar esto en los problemas 91 y 92.

$$-\infty < \tan \theta < \infty \qquad -\infty < \cot \theta < \infty$$

La tabla 4 resume los resultados anteriores.

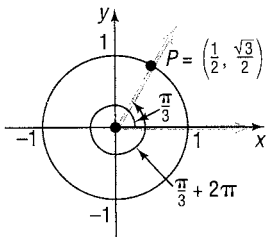
TABLA 4

FUNCIÓN	SÍMBOLO	DOMINIO	RANGO
seno	$f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$	Todos los números reales	Todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
coseno	$f(\theta) = \cos \theta$	Todos los números reales	Todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
tangente	$f(\theta) = \tan \theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)	Todos los números reales
cosecante	$f(\theta) = \csc \theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales o iguales a 1 o menores o iguales a -1
secante	$f(\theta) = \sec \theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)	Todos los números reales mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1
cotangente	$f(\theta) = \cot \theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales

Ahora resuelva el problema 85.

Periodo de las funciones trigonométricas

FIGURA 34



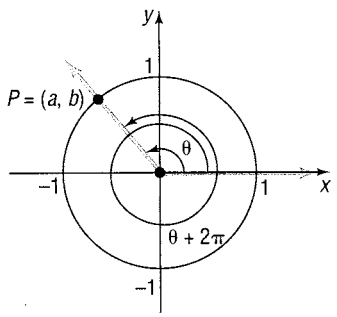
Véase la figura 34. Esta figura muestra que, para un ángulo de $\pi/3$ radianes, el punto correspondiente P sobre el círculo unitario es $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Obsérvese que, para un ángulo de $\pi/3 + 2\pi$ radianes, el punto correspondiente P sobre el círculo unitario también es $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Así,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$$

Este ejemplo ilustra una situación más general. Para un ángulo dado θ, medido en radianes, suponga que conocemos el punto correspondiente $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario. Luego sumamos 2π a θ. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a $\theta + 2\pi$ es igual al punto P sobre el círculo unitario correspondiente a θ. *Véase* la figura 35. Así, los valores de las funciones trigonométricas de $\theta + 2\pi$ son iguales a los de las funciones trigonométricas correspondientes de θ.

FIGURA 35



Si sumamos (o restamos) múltiplos enteros de 2π a θ, los valores trigonométricos no cambian. Esto es, para toda θ,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta \tag{1}$$

donde k es cualquier entero.

Las funciones que exhiben esta clase de comportamiento son llamadas *funciones periódicas.*

Visualizando el concepto. Para ver el comportamiento periódico de la función seno haga la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$, $y = \operatorname{sen}(x - 2\pi)$, y $y = \operatorname{sen}(x + 4\pi)$ en la misma pantalla.

Función periódica

Una función f es llamada **periódica** si existe un número positivo p tal que siempre y cuando θ esté en el dominio de f, también lo esté $\theta + p$, y

$$f(\theta + p) = f(\theta)$$

Periodo

Si existe un número mínimo p con la propiedad anterior, se le llama **periodo (fundamental)** de f.

Así que, con base en la ecuación (1), las funciones seno y coseno son periódicas. De hecho, las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Se le pide demostrar este hecho en los problemas 93 y 94. Las funciones secante y cosecante también son periódicas con periodo 2π, las funciones tangente y cotangente son periódicas con periodo π. Se le pide demostrar estas proposiciones en los problemas del 95 al 98.

Propiedades periódicas

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta \qquad \tan(\theta + \pi k) = \tan\theta$$
$$\csc(\theta + 2\pi k) = \csc\theta \qquad \sec(\theta + 2\pi k) = \sec\theta \qquad \cot(\theta + \pi k) = \cot\theta$$

donde k es cualquier entero.

Ya que las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo 2π, una vez que conocemos sus valores para $0 \le \theta < 2\pi$, tenemos todos sus valores; de manera análoga, ya que las funciones tangente y cotangente tienen periodo π, una vez que conocemos sus valores para $0 \le \theta < \pi$, tenemos todos sus valores.

EJEMPLO 1 *Determinación de valores exactos usando propiedades periódicas*

Encontrar el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen}\dfrac{17\pi}{4}$ (b) $\cos 5\pi$ (c) $\tan\dfrac{5\pi}{4}$

Solución

(a) Es mejor trazar primero el ángulo, como se muestra en la figura 36(a). Como el periodo de la función seno es 2π, cada vuelta completa puede ser ignorada. Esto deja el ángulo $\pi/4$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{17\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) *Véase* la figura 36(b). Como el periodo de la función coseno es 2π, cada vuelta completa puede ser ignorada. Esto deja el ángulo π. Por tanto,

$$\cos 5\pi = \cos(\pi + 4\pi) = \cos\pi = -1$$

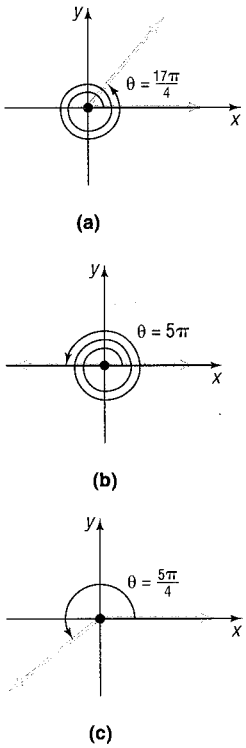
(c) *Véase* la figura 36(c). Como el periodo de la función tangente es π, cada media vuelta puede ser ignorada. Esto deja el ángulo $\pi/4$. Por tanto,

$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas nos serán muy útiles cuando estudiemos sus gráficas en el capítulo siguiente.

Ahora resuelva el problema 1.

FIGURA 36

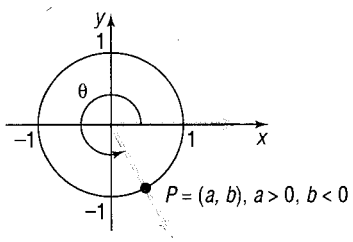


Los signos de las funciones trigonométricas

Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Si sabemos en qué cuadrante está el punto P, entonces podemos determinar los signos de las funciones trigonométricas de θ. Por ejemplo, si $P = (a, b)$ está en el cuarto cuadrante, como se muestra en la figura 37, entonces sabemos que $a > 0$ y $b < 0$. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = b < 0 \qquad \cos\theta = a > 0 \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} < 0$$
$$\csc\theta = \frac{1}{b} < 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{a} > 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} < 0$$

FIGURA 37

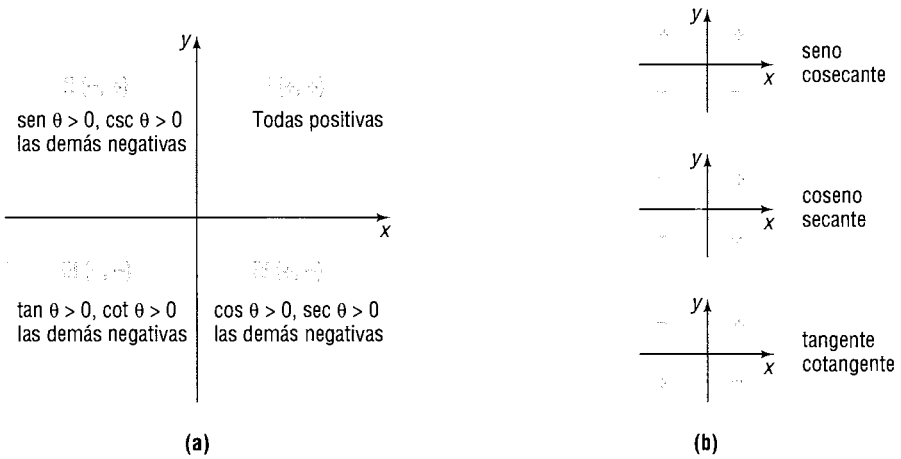


La tabla 5 enlista los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante. También *véase* la figura 38.

TABLA 5

CUADRANTE DE P	sen θ, csc θ	cos θ, sec θ	tan θ, cot θ
I	Positivo	Positivo	Positivo
II	Positivo	Negativo	Negativo
III	Negativo	Negativo	Positivo
IV	Negativo	Positivo	Negativo

FIGURA 38



EJEMPLO 2 *Determinación del cuadrante en que está un ángulo*

Si sen $\theta < 0$ y cos $\theta < 0$, diga en qué cuadrante está el ángulo θ.

Solución Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Entonces sen $\theta = b < 0$ y cos $\theta = a < 0$. Así que, $P = (a, b)$ debe estar en el tercer cuadrante, de modo que θ está en el tercer cuadrante.

AHORA RESUELVA Ahora resuelva el problema 17.

Identidades fundamentales

Si $P = (a, b)$ es un punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \text{si } a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{b}, \quad \text{si } b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{a}, \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad \text{si } b \neq 0$$

Por tanto, tenemos las **identidades recíprocas:**

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{2}$$

Otras dos identidades fundamentales que son fáciles de ver son las **identidades cocientes:**

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

Las demostraciones de las fórmulas (2) y (3) se deducen de las definiciones de las funciones trigonométricas. (*Véanse* los problemas 99 y 100.)

Visualizando el concepto. Para ver la identidad $\tan\theta = (\operatorname{sen}\theta)/(\cos\theta)$, haga la gráfica de $y = \tan x$ y $y = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ en la misma pantalla.

Si sen θ y cos θ son conocidos, las fórmulas (2) y (3) hacen fácil encontrar los valores de las demás funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 *Determinación de valores exactos usando identidades cuando se dan el seno y el coseno*

Dado $\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, encontrar los valores exactos de las otras funciones trigonométricas de θ.

Solución Con base en la identidad cociente de la fórmula (3), tenemos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Entonces usamos las identidades recíprocas de la fórmula (2) para obtener

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1/\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ahora resuelva el problema 25.

La ecuación del círculo unitario es $x^2 + y^2 = 1$. Así que, si $P = (a, b)$ es el punto en el lado final de un ángulo θ y P está sobre el círculo unitario, entonces

$$b^2 + a^2 = 1$$

Pero $b = \operatorname{sen}\theta$ y $a = \cos\theta$. Por tanto,

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{4}$$

Es costumbre escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$, $\cos^2\theta$ en lugar de $(\cos\theta)^2$, y así sucesivamente. Con esta notación, podemos reescribir la ecuación (4) como

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{5}$$

Si $\cos\theta \neq 0$, podemos dividir cada miembro de la ecuación (5) entre $\cos^2\theta$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Ahora usamos las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \qquad (6)$$

De manera análoga, si sen $\theta \neq 0$, podemos dividir la ecuación (5) entre $\text{sen}^2\,\theta$ y usar las fórmulas (2) y (3) para obtener el resultado:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \qquad (7)$$

En conjunto, las identidades en las ecuaciones (5), (6) y (7) son conocidas como **identidades pitagóricas.**

Hagamos una pausa aquí para resumir las identidades fundamentales.

Identidades fundamentales

$$\tan \theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

La identidad pitagórica

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2 \theta = 1$$

puede ser resuelta para sen θ en términos de cos θ (o viceversa) como sigue:

$$\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2 \theta$$
$$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

donde el signo + es usado si sen $\theta > 0$ y el signo − es usado si sen $\theta < 0$.

EJEMPLO 4 *Determinación de valores exactos dado un valor y el signo de otro*

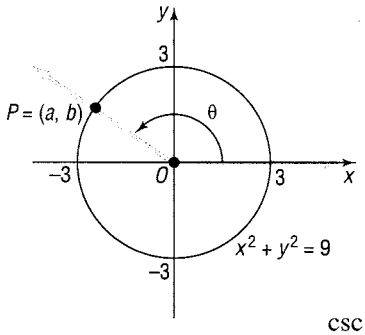
Dado que sen $\theta = \frac{1}{3}$ y cos $\theta < 0$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas.

Solución Resolvemos este problema de dos maneras: la primera usa la definición de las funciones trigonométricas; en el segundo método se aplican las identidades fundamentales.

Al usar la definición

Solución 1 Suponga que $P = (a, b)$ es un punto en el lado final de θ situado a una distancia de 3 unidades desde el origen. Como sen $\theta > 0$ y cos $\theta < 0$, el punto P está en el segundo cuadrante. *Véase* la figura 39. (¿Advierte por qué seleccionamos 3 unidades? Observe que sen $\theta = \frac{1}{3} = b/r$. La selección $r = 3$ hace que nuestros cálculos sean sencillos.) Con esta elección, $b = 1$ y $r = 3$. Como cos $\theta = a/r < 0$, se deduce que $a < 0$. Por tanto,

FIGURA 39



$$a^2 + b^2 = r^2 \qquad b = 1,\ r = 3,\ a < 0$$
$$a^2 + 1^2 = 3^2$$
$$a^2 = 8$$
$$a = -2\sqrt{2}$$

Así,

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{3}{-2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{-2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

Solución 2 *Al usar identidades*

Primero, resolvemos la ecuación (5) para cos θ:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

Como cos $\theta < 0$, elegimos el signo menos:

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$

Ahora conocemos los valores de sen θ y cos θ, de modo que usamos las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -2\sqrt{2}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Ahora resuelva el problema 33.

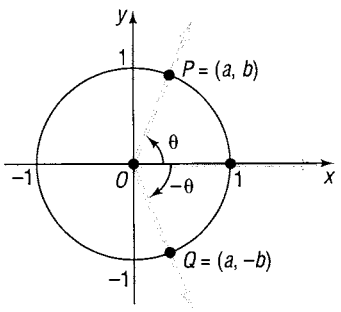
Propiedades par e impar

Recuerde que una función f es par si $f(-\theta) = f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f; una función f es impar si $f(-\theta) = -f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f. Ahora mostraremos que las funciones trigonométricas seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que coseno y secante son funciones pares.

Teorema propiedades par e impar

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

FIGURA 40



Demostración Sea $P = (a, b)$ el punto en el lado final del ángulo θ que está sobre el círculo unitario. (*Véase* la figura 40.) El punto Q en el lado final del ángulo $-\theta$ que está sobre el círculo unitario tendrá las coordenadas $(a, -b)$. Usando la definición para las funciones trigonométricas, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -b \qquad \cos(-\theta) = a$$

de modo que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Ahora, usando estos resultados y algunas de las identidades fundamentales, tenemos

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\theta} = -\csc\theta$$

■

Visualizando el concepto. Para ver que la función coseno es par, haga la gráfica de $y = \cos x$ y luego $y = \cos(-x)$. Limpie la pantalla. Luego haga la gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen}(-x)$.

EJEMPLO 5 *Determinación de valores exactos usando las propiedades par e impar*

Encontrar el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen}(-45°)$ (b) $\cos(-\pi)$ (c) $\cot(-3\pi/2)$ (d) $\tan(-37\pi/4)$

Solución (a) $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$

↑ Función par ↑ Función impar

(c) $\cot\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cot\dfrac{3\pi}{2} = 0$

↑ Función par

(d) $\tan\left(-\dfrac{37\pi}{4}\right) = -\tan\dfrac{37\pi}{4} = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 9\pi\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$

↑ Función par ↑ Periodo es π

■

Ahora resuelva el problema 49.

Ejercicio 5.3

En los problemas del 1 al 16 utilice el hecho de que las funciones trigonométricas son periódicas para encontrar el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

1. $\operatorname{sen} 405°$ **2.** $\cos 420°$ **3.** $\tan 405°$ **4.** $\operatorname{sen} 390°$ **5.** $\csc 450°$ **6.** $\sec 540°$

7. $\cot 390°$ **8.** $\sec 420°$ **9.** $\cos\dfrac{33\pi}{4}$ **10.** $\operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{4}$ **11.** $\tan 21\pi$ **12.** $\csc\dfrac{9\pi}{2}$

13. $\sec\dfrac{17\pi}{4}$ **14.** $\cot\dfrac{17\pi}{4}$ **15.** $\tan\dfrac{19\pi}{6}$ **16.** $\sec\dfrac{25\pi}{6}$

En los problemas del 17 al 24 diga en qué cuadrante está el ángulo θ.

17. $\operatorname{sen}\theta > 0, \quad \cos\theta < 0$

18. $\operatorname{sen}\theta < 0, \quad \cos\theta > 0$

19. $\operatorname{sen}\theta < 0, \quad \tan\theta < 0$

20. $\cos\theta > 0, \quad \tan\theta > 0$

21. $\cos\theta > 0, \quad \tan\theta < 0$

22. $\cos\theta < 0, \quad \tan\theta > 0$

23. $\sec\theta < 0, \quad \operatorname{sen}\theta > 0$

24. $\csc\theta > 0, \quad \cos\theta < 0$

En los problemas del 25 al 32 se dan sen θ y cos θ. Encuentre el valor exacto de cada una de las otras cuatro funciones trigonométricas.

25. $\operatorname{sen}\theta = 2/\sqrt{5}, \quad \cos\theta = 1/\sqrt{5}$

26. $\operatorname{sen}\theta = -1/\sqrt{5}, \quad \cos\theta = -2/\sqrt{5}$

27. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = \sqrt{3}/2$

28. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$

29. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}, \quad \cos\theta = 2\sqrt{2}/3$

30. $\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{2}/3, \quad \cos\theta = -\frac{1}{3}$

31. $\operatorname{sen}\theta = 0.2588, \quad \cos\theta = 0.9659$

32. $\operatorname{sen}\theta = 0.6428, \quad \cos\theta = 0.7660$

En los problemas del 33 al 48 encuentre el valor exacto de cada una de las restantes funciones trigonométricas de θ.

33. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}, \quad 90° < \theta < 180°$

34. $\cos\theta = \frac{3}{5}, \quad 270° < \theta < 360°$

35. $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$

36. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$

37. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}, \quad \cos\theta < 0$

38. $\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{sen}\theta < 0$

39. $\cos\theta = -\frac{1}{3}, \quad \csc\theta > 0$

40. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}, \quad \sec\theta > 0$

41. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}, \quad \tan\theta < 0$

42. $\cos\theta = -\frac{1}{4}, \quad \tan\theta > 0$

43. $\sec\theta = 2, \quad \operatorname{sen}\theta < 0$

44. $\csc\theta = 3, \quad \cot\theta < 0$

45. $\tan\theta = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{sen}\theta < 0$

46. $\cot\theta = \frac{4}{3}, \quad \cos\theta < 0$

47. $\tan\theta = -\frac{1}{3}, \quad \operatorname{sen}\theta > 0$

48. $\sec\theta = -2, \quad \tan\theta > 0$

En los problemas del 49 al 66 utilice las propiedades par e impar para encontrar el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

49. $\operatorname{sen}(-60°)$

50. $\cos(-30°)$

51. $\tan(-30°)$

52. $\operatorname{sen}(-135°)$

53. $\sec(-60°)$

54. $\csc(-30°)$

55. $\operatorname{sen}(-90°)$

56. $\cos(-270°)$

57. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

58. $\operatorname{sen}(-\pi)$

59. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

60. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

61. $\tan(-\pi)$

62. $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

63. $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

64. $\sec(-\pi)$

65. $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

66. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

En los problemas del 67 al 78 encuentre el valor de cada expresión. No utilice calculadora.

67. $\operatorname{sen}(-\pi) + \cos 5\pi$

68. $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - \cot\frac{7\pi}{2}$

69. $\sec(-\pi) + \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

70. $\tan(-6\pi) + \cos\frac{9\pi}{4}$

71. $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

72. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

73. $\operatorname{sen}^2 40° + \cos^2 40°$

74. $\sec^2 18° - \tan^2 18°$

75. $\operatorname{sen} 80° \csc 80°$

76. $\tan 10° \cot 10°$

77. $\tan 40° - \dfrac{\operatorname{sen}40°}{\cos 40°}$

78. $\cot 20° - \dfrac{\cos 20°}{\operatorname{sen}20°}$

79. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, encuentre el valor de $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) + \operatorname{sen}(\theta + 4\pi)$.

80. Si $\cos\theta = 0.2$, encuentre el valor de $\cos\theta + \cos(\theta + 2\pi) + \cos(\theta + 4\pi)$.

81. Si $\tan\theta = 3$, encuentre el valor de $\tan\theta + \tan(\theta + \pi) + \tan(\theta + 2\pi)$.

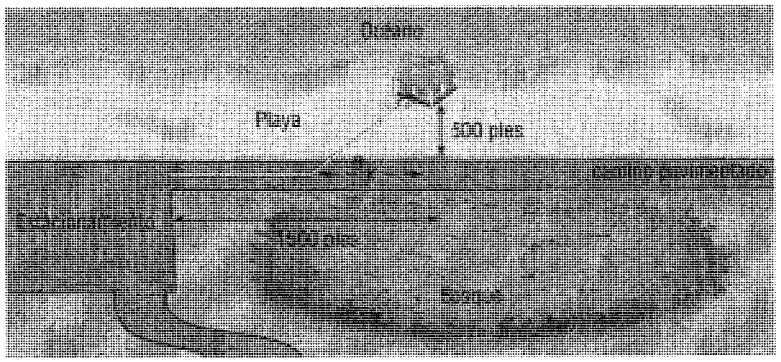
82. Si $\cot\theta = -2$, encuentre el valor de $\cot\theta + \cot(\theta - \pi) + \cot(\theta - 2\pi)$.

83. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Usted quiere caminar desde un estacionamiento hasta una casa frente al océano. La casa está ubicada a 1500 pies desde el estacionamiento en la dirección de un camino pavimentado paralelo al océano, y a 500 pies en sentido perpendicular al camino. *Véase* la ilustración. Por el camino usted puede avanzar a 300 pies por minuto, pero en la arena sólo lo hace a 100 pies por minuto.

El tiempo T para ir desde el estacionamiento hasta la casa de la playa puede ser expresado como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración

$$T(\theta) = 5 - \frac{5}{3\tan\theta} + \frac{5}{\operatorname{sen}\theta},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

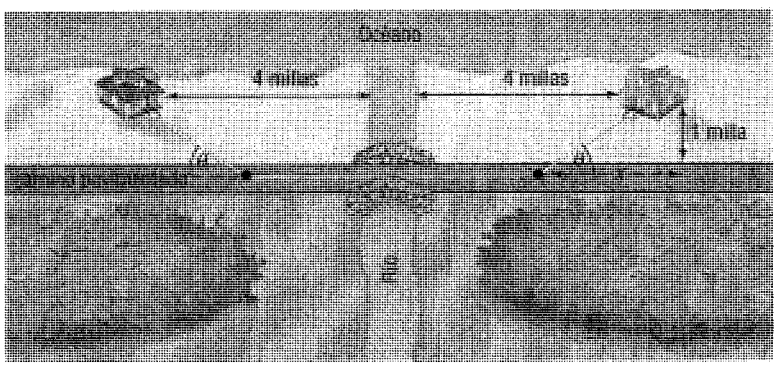
Calcule el tiempo T si camina directamente desde el estacionamiento a la casa [*Sugerencia:* $\tan\theta = 500/1500$.]



84. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Dos casas frente al océano están separadas 8 millas en línea recta sobre la playa, cada una queda a una milla de un camino pavimentado paralelo al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pavimentada, pero sólo a 3 millas por hora en la arena. A causa de un río que está entre las dos casas, es necesario caminar por la arena hacia la carretera, continuar por ésta y luego caminar de nuevo por la arena para ir de una casa a otra. *Véase* la ilustración. El tiempo T para ir de una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración es

$$T(\theta) = 1 + \frac{2}{3\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{4\tan\theta},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(a) Calcule el tiempo T para $\tan\theta = 1/4$.
(b) Describa el camino que se tomó.
(c) Explique por qué θ debe ser mayor de 14°.



85. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \tan\theta$?

86. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \cot\theta$?

87. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \sec\theta$?

88. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \csc\theta$?

89. ¿Cuál es el valor de sen $k\pi$, donde k es cualquier entero?

90. ¿Cuál es el valor de cos $k\pi$, donde k es cualquier entero?

91. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

92. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

93. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \text{sen } \theta$ es 2π. [*Sugerencia*: Suponga que $0 < p < 2\pi$ existe de modo que $\text{sen}(\theta + p) = \text{sen } \theta$ para todo θ. Sea $\theta = 0$ encuentre p. Luego haga $\theta = \pi/2$ para obtener una contradicción.]

94. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cos \theta$ es 2π.

95. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \sec \theta$ es 2π.

96. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \csc \theta$ es 2π.

97. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \tan \theta$ es π.

98. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cot \theta$ es π.

99. Demuestre las identidades recíprocas dadas en la fórmula (2).

100. Demuestre las identidades cocientes dadas en la fórmula (3).

101. Establezca la identidad: $(\text{sen } \theta \cos \phi)^2 + (\text{sen } \theta \text{ sen } \phi)^2 + \cos^2 \theta = 1$

102. Anote cinco características de la función tangente y explique el significado de cada una.

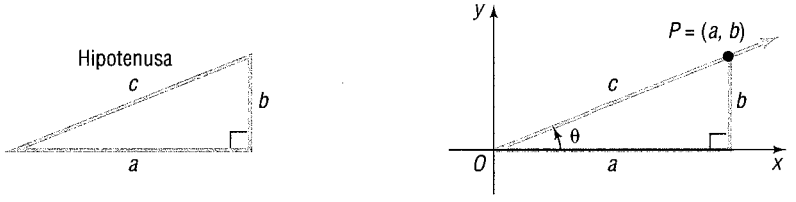
103. Describa lo que entiende por función periódica.

5.4 Trigonometría del triángulo rectángulo

Un triángulo en el que un ángulo es recto (90°) se llama **triángulo rectángulo.** Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto es llamado **hipotenusa** y los otros dos lados son los **catetos** del triángulo. En la figura 41(a), hemos marcado la hipotenusa como c, para indicar que su longitud es c unidades y, de una manera parecida, hemos marcado los catetos como a y b. Ya que el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras nos dice que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

FIGURA 41

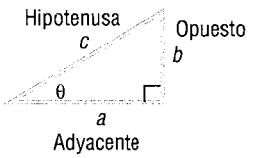


(a) **(b)**

Ahora, suponga que θ es un **ángulo agudo;** esto es, $0° < \theta < 90°$ (si θ es medido en radianes) o $0 < \theta < \pi/2$ (si θ es medido en radianes). Coloque θ en posición estándar, y sea $P = (a, b)$ cualquier punto excepto el origen O sobre el lado final de θ. Construya un triángulo rectángulo trazando hacia abajo la perpendicular desde P hasta el eje x, como se muestra en la figura 41(b).

Llamando a las longitudes de los lados del triángulo con los nombres hipotenusa (c), cateto opuesto (b) y cateto adyacente (a), como se indica en la figura 42, podemos expresar las funciones trigonométricas de θ como las razones de los lados de un triángulo rectángulo:

FIGURA 42



$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos \theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{b}{a} \qquad \csc \theta = \frac{\text{Hpotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad (1)$$

$$\sec \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot \theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Observe que cada una de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ es positiva.

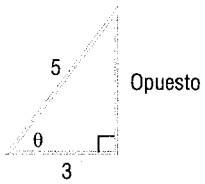
EJEMPLO 1 *Determinación del valor de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo*

Encontrar el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en la figura 43.

Solución Advierta en la figura 43 que los dos lados del triángulo son

$$c = \text{Hipotenusa} = 5 \qquad a = \text{Adyacente} = 3$$

FIGURA 43



Para encontrar la longitud del cateto opuesto usamos el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (\text{adyacente})^2 + (\text{opuesto})^2 &= (\text{hipotenusa})^2 \\ 3^2 + (\text{opuesto})^2 &= 5^2 \\ (\text{opuesto})^2 &= 25 - 9 = 16 \\ \text{opuesto} &= 4 \end{aligned}$$

Ahora que conocemos las longitudes de los tres lados, usamos las razones en (1) para encontrar el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \cos \theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan \theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \sec \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \cot \theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{3}{4}$$

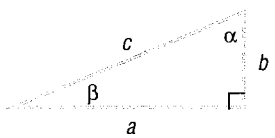
□

Ahora resuelva el problema 1.

De esta manera, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo son razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Esta manera de ver las funciones trigonométricas conduce a muchas aplicaciones y, de hecho, era el punto de vista usado por los primeros matemáticos (antes del cálculo) al estudiar trigonometría.

Ángulos complementarios: cofunciones

FIGURA 44



Dos ángulos agudos son llamados **complementarios** cuando su suma es un ángulo recto. Dado que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°, se deduce que, para formar un ángulo recto, los dos ángulos agudos son complementarios.

Observe ahora la figura 44; hemos marcado el ángulo opuesto al lado b como β y el ángulo opuesto al lado a como α. Nótese que el lado b es adyacente al ángulo α y que el lado a es adyacente al ángulo β. Como consecuencia de esto.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \frac{b}{c} = \cos\alpha & \cos\beta &= \frac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha & \tan\beta &= \frac{b}{a} = \cot\alpha \\ \csc\beta &= \frac{c}{b} = \sec\alpha & \sec\beta &= \frac{c}{a} = \csc\alpha & \cot\beta &= \frac{a}{b} = \tan\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

A causa de estas relaciones, las funciones seno y coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante, son llamadas **cofunciones** una de la otra. Las identidades (2) pueden ser expresadas en palabras como sigue:

Teorema Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

A continuación se dan ejemplos de este teorema:

Ángulos complementarios: $\operatorname{sen} 30° = \cos 60°$ (Cofunciones)

Ángulos complementarios: $\tan 40° = \cot 50°$ (Cofunciones)

Ángulos complementarios: $\sec 80° = \csc 10°$ (Cofunciones)

Si θ es un ángulo agudo medido en grados, el ángulo $90° - \theta$ (o $\pi/2 - \theta$, si θ se mide en radianes) es el ángulo complementario a θ. La tabla 6 repite el teorema anterior acerca de cofunciones.

TABLA 6

θ (GRADOS)	θ (RADIANES)
$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$	$\operatorname{sen}\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$
$\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$	$\cos\theta = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$
$\tan\theta = \cot(90° - \theta)$	$\tan\theta = \cot(\pi/2 - \theta)$
$\csc\theta = \sec(90° - \theta)$	$\csc\theta = \sec(\pi/2 - \theta)$
$\sec\theta = \csc(90° - \theta)$	$\sec\theta = \csc(\pi/2 - \theta)$
$\cot\theta = \tan(90° - \theta)$	$\cot\theta = \tan(\pi/2 - \theta)$

Aunque el ángulo θ en la tabla 6 es agudo, más adelante veremos que estos resultados son válidos para cualquier ángulo θ.

Visualización del concepto. Haga la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos(90° - x)$. Asegúrese de que el modo de operación esté en grados.

EJEMPLO 2 *Uso del teorema en cofunciones*

(a) $\operatorname{sen} 62° = \cos(90° - 62°) = \cos 28°$ (b) $\tan\dfrac{\pi}{12} = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cot\dfrac{5\pi}{12}$

(c) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\csc\dfrac{\pi}{6} = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sec\dfrac{\pi}{3}$

Ahora resuelva el problema 57(a).

Ángulo de referencia

Nos concentraremos ahora en ángulos que están en un cuadrante. Una vez que sepamos en qué cuadrante está un ángulo, sabremos el signo de cada valor de sus fun-

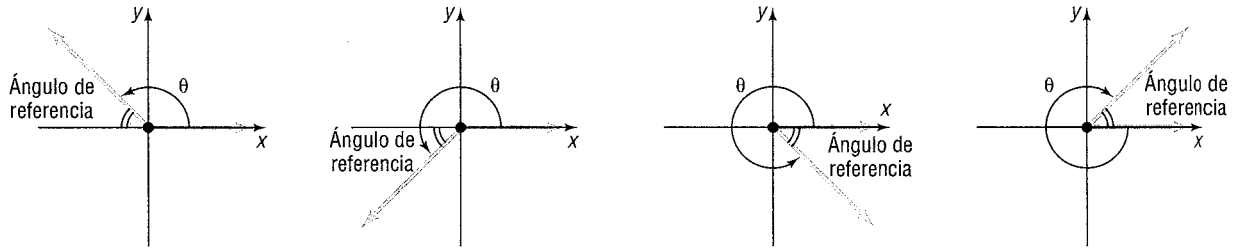
ciones trigonométricas. El uso de cierto ángulo de referencia puede ayudarnos a evaluar sus funciones trigonométricas.

Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no agudo que esté en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado final de θ y la parte positiva o la negativa del eje x, es llamado **ángulo de referencia** para θ.

La figura 45 ilustra el ángulo de referencia para algunos ángulos θ. Observe que un ángulo de referencia siempre es un ángulo agudo, cuya medida está entre 0° y 90°.

FIGURA 45



Aunque pueden ser dadas fórmulas para calcular ángulos de referencia, por lo común es más fácil encontrarlos haciendo un bosquejo rápido del ángulo en cuestión.

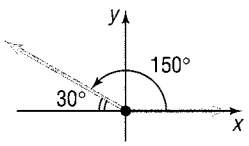
EJEMPLO 3 *Determinación de ángulos de referencia*

Encontrar el ángulo de referencia para cada uno de los ángulos siguientes:

(a) 150° (b) $-45°$ (c) $9\pi/4$ (d) $-5\pi/6$

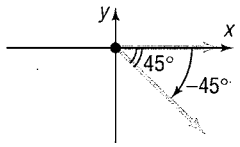
Solución (a) *Véase* la figura 46. El ángulo de referencia para 150° es 30°.

FIGURA 46



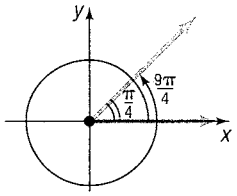
(b) *Véase* la figura 47. El ángulo de referencia para $-45°$ es 45°.

FIGURA 47



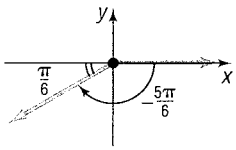
(c) *Véase* la figura 48. El ángulo de referencia para $9\pi/4$ es $\pi/4$.

FIGURA 48



(d) *Véase* la figura 49. El ángulo de referencia para $-5\pi/6$ es $\pi/6$.

FIGURA 49



Ahora resuelva el problema 11.

La ventaja de utilizar ángulos de referencia es que, salvo por el signo correcto, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo general θ son iguales a los de las funciones trigonométricas de su ángulo de referencia.

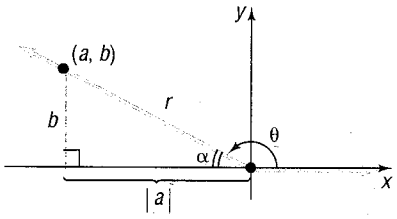
Teorema **ángulos de referencia**

Si θ es un ángulo que está en un cuadrante y α es su ángulo de referencia, entonces

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = \pm \operatorname{sen}\alpha & \cos\theta = \pm\cos\alpha & \tan\theta = \pm\tan\alpha \\ \csc\theta = \pm\csc\alpha & \sec\theta = \pm\sec\alpha & \cot\theta = \pm\cot\alpha \end{array} \tag{3}$$

donde el signo + o − depende del cuadrante en el cual esté θ.

FIGURA 50
sen $\theta = b/c$, sen $\alpha = b/c$;
cos $\theta = a/c$, cos $\alpha = |a|/c$



Por ejemplo, suponga que θ está en el segundo cuadrante y que α es su ángulo de referencia. *Véase* la figura 50. Si (a, b) es un punto sobre el lado final de θ y si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{-|a|}{c} = -\cos\alpha$$

y así sucesivamente.

El ejemplo siguiente ilustra cómo se utiliza el teorema sobre ángulos de referencia.

EJEMPLO 4 *Uso de ángulos de referencia para encontrar el valor de funciones trigonométricas*

Encontrar el valor exacto de cada una de las siguientes funciones trigonométricas usando ángulos de referencia:

(a) sen 135° (b) cos 240° (c) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ (d) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución (a) *Véase* la figura 51. El ángulo de 135° está en el segundo cuadrante, donde la función seno es positiva. El ángulo de referencia para 135° es 45°. Por tanto,

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

FIGURA 51

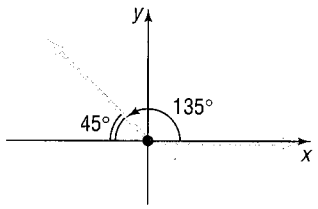
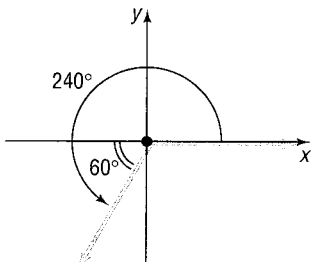


FIGURA 52



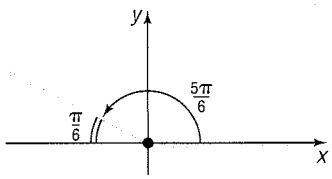
(b) *Véase* la figura 52. El ángulo de 240° está en el tercer cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para 240° es 60°. Por tanto,

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}$$

(c) *Véase* la figura 53. El ángulo de $5\pi/6$ está en el segundo cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para $5\pi/6$ es $\pi/6$. Por tanto,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

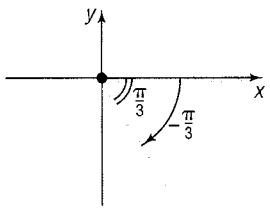
FIGURA 53



(d) *Véase* la figura 54. El ángulo de $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa. El ángulo de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$. Por tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

FIGURA 54

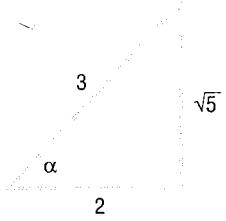


Ahora resuelva los problemas 27 y 45.

Dado que $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras funciones trigonométricas.

Ya hemos analizado dos maneras de resolver este tipo de problemas: usando la definición de las funciones trigonométricas y mediante identidades. (*Véase* el ejemplo 4 en la sección 5.3.) En seguida presentamos un tercer método: el uso de triángulos rectángulos.

FIGURA 55



El ángulo θ está en el segundo cuadrante, así que sabemos que sen θ y csc θ son positivos, mientras que las otras funciones trigonométricas son negativas. Si α es el ángulo de referencia para θ, entonces $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Los demás valores de las funciones trigonométricas del ángulo α pueden ser encontrados dibujando un triángulo apropiado. Usamos la figura 55 para obtener

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ahora, asignamos el signo apropiado a cada uno de estos valores para encontrar los de las funciones trigonométricas de θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad \tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

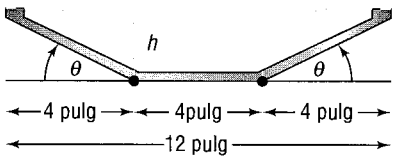
$$\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{3}{2} \qquad \cot\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Se construirá un canal de desagüe pluvial con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a cada lado de las hojas, se doblan hacia arriba en un ángulo θ. *Véase* la figura 56.

(a) Expresar el área A de la abertura como una función de θ.

Hacer la gráfica de $A = A(\theta)$. Encontrar el ángulo θ que pueda darnos la A más grande. (Esto permite que fluya más agua por el canal).

FIGURA 56



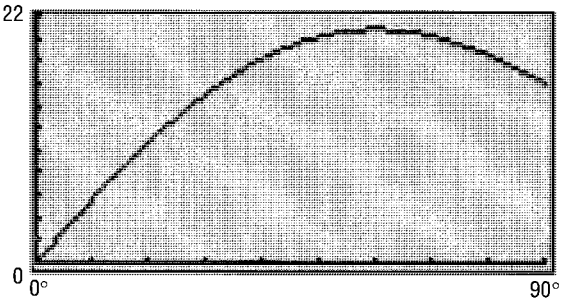
(a) El área A de la abertura es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos y de un rectángulo:

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h\sqrt{16 - h^2} + 4h = (4 \text{ sen } \theta)(4 \cos \theta) + 4(4 \text{ sen } \theta)$$

$$A(\theta) = 16 \text{ sen } \theta(\cos \theta + 1)$$

Véase la figura 57. El ángulo θ que proporciona una A máxima es 60°.

FIGURA 57

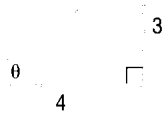


Ejercicio 5.4

En los problemas del 1 al 10, encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura.

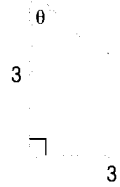
1.

2.

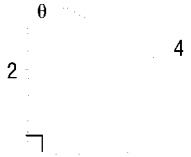


3.

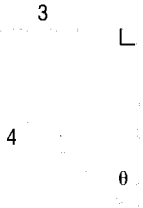
4.



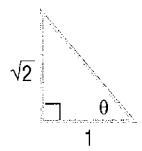
5.



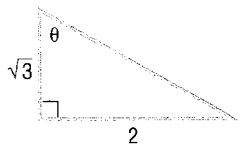
6.



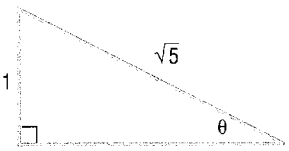
7.



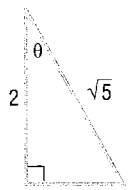
8.



9.



10.



En los problemas del 11 al 26 encuentre el ángulo de referencia de cada ángulo.

11. $-30°$ **12.** $60°$ **13.** $120°$ **14.** $300°$ **15.** $210°$

16. $330°$ **17.** $5\pi/4$ **18.** $5\pi/6$ **19.** $8\pi/3$ **20.** $7\pi/4$

21. $-135°$ **22.** $-240°$ **23.** $-2\pi/3$ **24.** $-7\pi/6$ **25.** $420°$

26. $480°$

En los problemas del 27 al 56 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

27. $\operatorname{sen} 150°$ **28.** $\cos 210°$ **29.** $\cos 315°$ **30.** $\operatorname{sen} 120°$

31. $\sec 240°$ **32.** $\csc 300°$ **33.** $\cot 330°$ **34.** $\tan 225°$

35. $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$ **36.** $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ **37.** $\cot\dfrac{7\pi}{6}$ **38.** $\csc\dfrac{7\pi}{4}$

39. $\cos(-60°)$ **40.** $\tan(-120°)$ **41.** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **42.** $\cot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

43. $\tan\dfrac{14\pi}{3}$ **44.** $\sec\dfrac{11\pi}{4}$ **45.** $\csc(-315°)$ **46.** $\sec(-225°)$

47. $\operatorname{sen} 38° - \cos 52°$ **48.** $\tan 12° - \cot 78°$ **49.** $\dfrac{\cos 10°}{\operatorname{sen} 80°}$ **50.** $\dfrac{\cos 40°}{\operatorname{sen} 50°}$

51. $1 - \cos^2 20° - \cos^2 70°$ **52.** $1 + \tan^2 5° - \csc^2 85°$ **53.** $\tan 20° - \dfrac{\cos 70°}{\cos 20°}$

54. $\cot 40° - \dfrac{\operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 40°}$ **55.** $\cos 35° \operatorname{sen} 55° + \operatorname{sen} 35° \cos 55°$ **56.** $\sec 35° \csc 55° - \tan 35° \cot 55°$

57. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos(90° - \theta)$ (b) $\cos^2\theta$ (c) $\csc\theta$ (d) $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

58. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.2$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (b) $\cos^2\theta$ (c) $\sec(90° - \theta)$ (d) $\csc\theta$

59. Si $\tan\theta = 4$, encuentre el valor exacto de: (a) $\sec^2\theta$ (b) $\cot\theta$ (c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (d) $\csc^2\theta$

60. Si $\sec\theta = 3$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos\theta$ (b) $\tan^2\theta$ (c) $\csc(90° - \theta)$ (d) $\operatorname{sen}^2\theta$

61. Si $\csc\theta = 4$, encuentre el valor exacto de: (a) $\operatorname{sen}\theta$ (b) $\cot^2\theta$ (c) $\sec(90° - \theta)$ (d) $\sec^2\theta$

62. Si $\cot\theta = 2$, encuentre el valor exacto de: (a) $\tan\theta$ (b) $\csc^2\theta$ (c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (d) $\sec^2\theta$

63. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, encuentre el valor exacto de: $\operatorname{sen}\theta + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

64. Si $\tan\theta = 4$ encuentre el valor exacto de: $\tan\theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

65. Encuentre el valor exacto de: $\operatorname{sen} 1° + \operatorname{sen} 2° + \operatorname{sen} 3° + \cdots + \operatorname{sen} 358° + \operatorname{sen} 359°$.

66. Encuentre el valor exacto de: $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 358° + \cos 359°$.

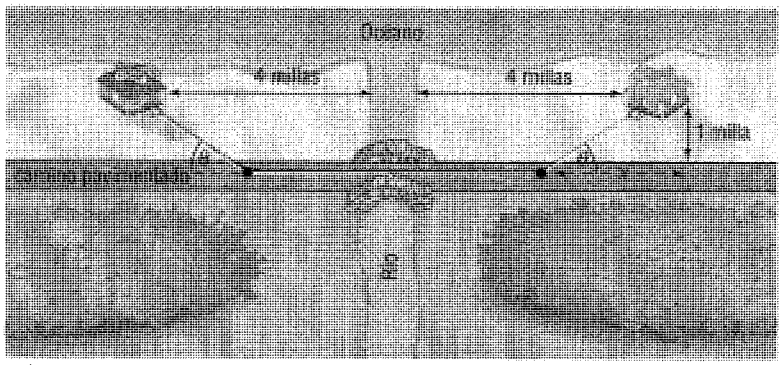
67. Encuentre el ángulo agudo θ que satisface la ecuación: $\operatorname{sen} \theta = \cos(2\theta + 30°)$

68. Encuentre el ángulo agudo θ que satisface la ecuación: $\tan \theta = \cot(\theta + 45°)$

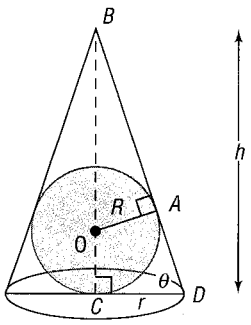
69. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Dos casas frente al océano están separadas 8 millas en línea recta sobre la playa, cada una queda a una milla de un camino pavimentado paralelo al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pavimentada, pero sólo a 3 millas por hora en la arena. A causa de un río que está entre las dos casas, es necesario caminar por la arena hacia la carretera, continuar por ésta y luego caminar de nuevo por la arena para ir de una casa a otra. *Véase* la ilustración.

(a) Exprese el tiempo T para ir de una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

(b) Haga la gráfica de $T = T(\theta)$. ¿Qué ángulo θ hace que el tiempo sea menor? ¿Cuál es el menor tiempo? ¿Cuánto tiempo camina Sally por la carretera pavimentada?



70. *Diseño de piezas decorativas.* Un diseñador de arte decorativo planea comercializar esferas de oro sólido encerradas en conos de cristal claro. Cada esfera es de radio fijo R y será encerrada en un cono de altura h y radio r. *Véase* la ilustración. Muchos conos pueden ser utilizados para encerrar la esfera, cada uno con diferente ángulo de inclinación θ.



(a) Exprese el volumen V del cono como una función de su ángulo de inclinación θ. [*Sugerencia*: El volumen V de un cono de altura h y radio r es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

(b) ¿Qué ángulo de inclinación θ debe ser utilizado para que el volumen V del cono sea mínimo? (Esta elección minimiza la cantidad de cristal necesario y da mayor realce a la esfera de oro.)

71. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Desde un estacionamiento, usted quiere caminar hasta una casa en la playa ubicada a 1500 pies en dirección de un camino pavimentado paralelo al océano. La casa está a 500 pies del camino. *Véase* la ilustración. A lo largo del camino usted puede avanzar a 300 pies por minuto, pero en la arena sólo puede hacerlo a 100 pies por minuto.

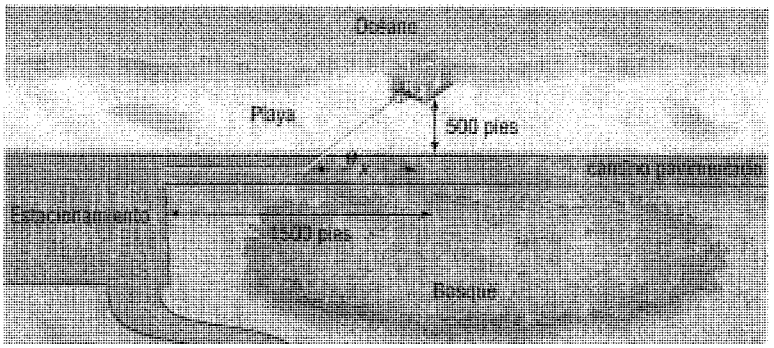
(a) Calcule el tiempo T si usted camina 1500 pies por el camino pavimentado y luego 500 pies en la arena hasta la casa.

(b) Calcule el tiempo T si se interna primero en la arena 500 pies y luego sigue 1500 pies por la playa hasta la casa.

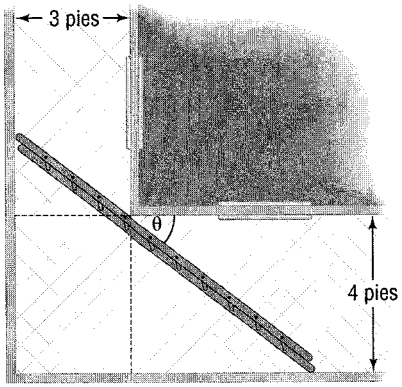
(c) Exprese el tiempo T para ir desde el estacionamiento hasta la casa de la playa como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

(d) Calcule el tiempo T si usted camina 100 pies a lo largo del camino pavimentado y luego va directamente hacia la casa.

(e) Haga la gráfica de $T = T(\theta)$. ¿Para qué valor de θ es T mínimo? ¿Cuál es el tiempo mínimo? ¿Cuál es x para este ángulo?



72. Una escalera de longitud L es transportada horizontalmente alrededor de una esquina de un pasillo de 3 pies de ancho hacia un pasillo de 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración. Encuentre la longitud L de la escalera como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.



73. Escriba tres ejemplos que muestren cómo usar el teorema sobre los ángulos de referencia; déselos a un compañero de clase y pídale una crítica acerca de ellos.

74. *Véanse* el ejemplo 4 en la sección 5.3 y el 5 en la sección 5.4. ¿Cuál de los tres métodos de solución prefiere usted? ¿Cuál es el que menos le agrada? ¿Hay situaciones en las que un método es mejor y otras donde otro método es mejor? Justifique su respuesta.

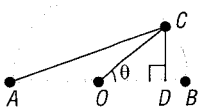
75. Utilice una calculadora en modo de radianes para completar la tabla siguiente. ¿Qué puede concluir acerca del cociente (sen θ)/θ cuando θ se aproxima a cero?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
sen θ								
$\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$								

76. Utilice una calculadora en modo de radianes para completar la tabla siguiente. ¿Qué puede concluir acerca del cociente (cos $\theta - 1$)/θ cuando θ se aproxima a cero?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\cos\theta - 1$								
$\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$								

77. Suponga que el ángulo θ es un ángulo central de un círculo de radio 1 (*véase* la figura). Demuestre que



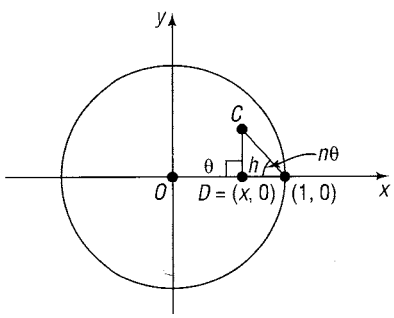
(a) El ángulo $OAC = \dfrac{\theta}{2}$ (b) $|CD| = \text{sen}\,\theta$ y $|OD| = \cos\theta$

(c) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}$

78. Demuestre que el área de un triángulo isósceles es $A = a^2 \,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, donde a es la longitud de uno de los lados iguales y θ la medida de uno de los dos ángulos iguales (*véase* la figura).

79. Sean $n > 0$ cualquier número real y θ cualquier ángulo para el que $0 < \theta < \pi/(1 + n)$. Podemos construir un triángulo con los ángulos θ y $n\theta$ incluyendo un lado de longitud 1 (¿advierte por qué?) y colocarlo sobre el círculo unitario como se ilustra. Luego, trace hacia abajo la perpendicular desde C hasta $D = (x, 0)$ y demuestre que

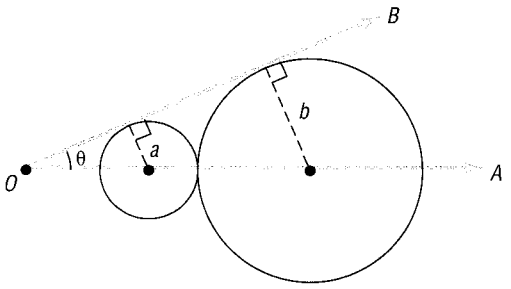
$$x = \frac{\tan n\theta}{\tan\theta + \tan n\theta}$$



80. *Véase* la figura siguiente. El círculo pequeño, cuyo radio es a, es tangente al círculo más grande, cuyo radio es b. El rayo OA contiene un diámetro de cada círculo, y el rayo OB es tangente a los dos círculos. Demuestre que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

(esto es, $\cos\theta$ es igual a la razón de la media geométrica de a y b a la media aritmética de a y b). [*Sugerencia*: Primero demuestre que $\operatorname{sen}\theta = (b-a)/(b+a)$.]



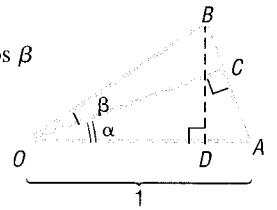
81. *Véase* la figura que aparece al margen. Si $|OA| = 1$, demuestre que

(a) Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ (b) área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

(c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ (d) $|OB| = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

(e) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

[*Sugerencia:* Área $\triangle OAB$ = Área $\triangle OAC$ + Área $\triangle OCB$.]



82. *Véase* la figura siguiente, donde aparece un círculo unitario. La línea DB es tangente al círculo.

(a) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de seno θ y cos θ.

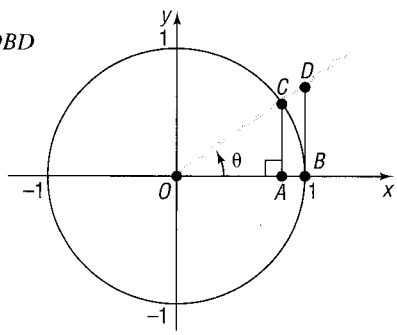
(b) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de sen θ y cos θ.

(c) El área del sector circular $\overset{\frown}{OBC}$ es $\frac{1}{2}\theta$, donde θ es medido en radianes. Utilice los resultados de las partes (a) y (b) y el hecho de que

$$\text{Área } \triangle OBC < \text{Área } \overset{\frown}{OBC} < \text{Área } \triangle OBD$$

para demostrar que

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$



83. Si $\cos\alpha = \tan\beta$ y $\cos\beta = \tan\alpha$, donde α y β son ángulos agudos, demuestre que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

84. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $\sec\theta > 1$.

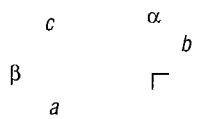
85. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $0 < \operatorname{sen}\theta < 1$.

Aplicaciones

Resolución de triángulos rectángulos

En el estudio que desarrollaremos a continuación, siempre marcaremos un triángulo rectángulo de modo que el lado a sea el opuesto al ángulo α, el lado b sea el opuesto al ángulo β, y el lado c sea la hipotenusa, como se muestra en la figura 58. **Resolver un triángulo rectángulo** significa encontrar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos que falten. Adoptaremos la práctica de expresar las longitudes de los lados redondeadas a dos decimales y expresar los ángulos en grados redondeados a un decimal.

FIGURA 58



Para resolver un triángulo rectángulo necesitamos conocer un ángulo y un lado o bien dos lados. Luego hacemos uso del teorema de Pitágoras y nos basamos en el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por lo tanto, la suma de los ángulos desconocidos de un triángulo rectángulo es 90°. Así que para el triángulo rectángulo mostrado en la figura 58 tenemos

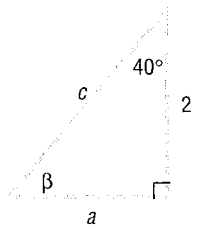
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \alpha + \beta = 90^\circ$$

EJEMPLO 1 *Resolución de un triángulo rectángulo*

Utilice la figura 59. Si $b = 2$ y $\alpha = 40°$, encontrar a, c, y β.

Solución Como $\alpha = 40°$ y $\alpha + \beta = 90°$, determinamos que $\beta = 50°$. Para encontrar los lados a y c usamos las relaciones siguientes:

FIGURA 59



$$\tan 40° = \frac{a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 40° = \frac{2}{c}$$

De modo que

$$a = 2 \tan 40° \approx 1.68 \quad \text{y} \quad c = \frac{2}{\cos 40°} \approx 2.61$$

Ahora resuelva el problema 1.

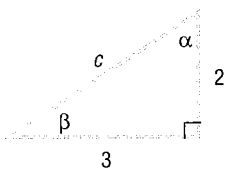
EJEMPLO 2 *Resolución de un triángulo rectángulo*

Utilice la figura 60. Si $a = 3$ y $b = 2$, encontrar c, α, y β.

Solución Ya que $a = 3$ y $b = 2$, por el teorema de Pitágoras tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$$
$$c = \sqrt{13} \approx 3.61$$

FIGURA 60



Para encontrar α usamos la relación

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$

Ponga el modo de su calculadora en grados. Su calculadora debe tener una tecla marcada con $\boxed{\tan^{-1}}$ o con $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$*. Utilice la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ o las teclas $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ como sigue para encontrar α:

Teclado:	3		÷	2		=		SHIFT	tan
Pantalla:		3			2		1.5		56.309932

Por tanto, $\alpha = 56.3°$ redondeado a un decimal. Ya que $\alpha + \beta = 90°$, encontramos que $\beta = 33.7°$.

Ahora resuelva el problema 11.

Un uso generalizado de la trigonometría es medir alturas y distancias que son difíciles o imposibles de medir por medios comunes.

* Si no es así, consulte su manual del usuario.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 5

IDENTIFICACIÓN DE LAS MONTAÑAS DE LAS ISLAS HAWAIANAS DESDE OAHU

Un turista adinerado, con un gran anhelo por el álbum perfecto de fotografías, ha pedido ayuda a la compañía de consultoría de usted para identificar una fotografía que tomó en un día despejado desde la costa oeste de Oahu. Él le mostró la fotografía, la cual en su mayor parte era mar y cielo. Pero en el horizonte se apreciaban tres cimas de montaña, igualmente espaciadas y al parecer todas de la misma altura. El turista le dijo que un vendedor en la playa le informó que las cimas de las montañas son los volcanes de Lanai, Maui y de la Gran Isla (Hawaii). El vendedor agregó: "Casi nunca puede verse la Gran Isla desde aquí".

El turista piensa que su fotografía puede tener algún valor especial, aunque tiene algunas dudas. Él está intrigado pues si en realidad casi nunca es posible ver la Gran Isla desde Oahu, le gustaría identificar correctamente sus fotos y por eso le pide ayuda a usted.

Usted se da cuenta de que es necesario aplicar un poco de trigonometría y consultar buenos atlas y enciclopedias. Después de algunas investigaciones, descubre lo siguiente:

Las alturas de las cimas varían. Lanaihale, la cima más alta de Lanai, sólo mide cerca de 3370 pies sobre el nivel del mar. Haleakala de Maui mide 10,023 pies sobre el nivel del mar. Mauna Kea en la Gran Isla es la más alta de todas, 13,796 pies sobre el nivel del mar. (Si se mide desde su base en el fondo del océano, calificaría como la montaña más alta sobre la Tierra.)

Desde el extremo sudeste de Oahu, la distancia a Lanai es aproximadamente 65 millas, a Maui es aproximadamente 110 millas y a la Gran Isla de unas 190 millas. Estas distancias, medidas a lo largo de la superficie de la Tierra, representan la longitud de arco que se origina al nivel del mar en Oahu y termina en un punto imaginario directamente abajo de la cima de cada montaña, esto es, al nivel del mar.

1. Estas cimas volcánicas son de alturas diferentes. Pero su cliente tomó una foto desde donde las tres parecen tener la misma altura.
2. El radio de la Tierra es aproximadamente de 3960 millas. Con base en esa fotografía, ¿cuál es la circunferencia de la Tierra? ¿Cómo está relacionada la distancia entre las islas con la circunferencia de la Tierra?
3. Para determinar cuál de estas cimas realmente es visible desde Oahu, usted necesita considerar que el turista, parado en la costa y viendo "directamente", tendría una línea de visión tangente a la superficie de la Tierra en ese punto. Haga un bosquejo del triángulo formado por la línea de visión del turista, el radio desde el centro de la Tierra al turista, y una recta desde el centro de la Tierra que pase por Mauna Kea. ¿Puede determinar el ángulo formado en el centro de la Tierra?
4. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo? ¿Puede decir si el Mauna Kea es o no visible desde Oahu?
5. Repita el procedimiento con la información acerca de Maui y Lanai. ¿Son visibles desde Oahu?
6. Hay otra isla que el vendedor no mencionó: Molokai. Está aproximadamente a 40 millas de Oahu y su pico más alto, "Kamakou", es de casi 4961 pies sobre el nivel del mar. ¿Desde Oahu es visible Kamakou?
7. Ahora su equipo está listo para ponerle nombre a las tres cimas volcánicas de la fotografía. ¿Cómo se decidió cuál es cuál?

Determinación del ancho de un río

Un agrimensor puede medir el ancho de un río colocando un tránsito* en el punto C en un lado del río y tomando un punto de referencia A del otro lado. *Véase* la figura 61. Después de girar un ángulo de 90° en C, camina 200 metros alejándose hasta llegar al punto B, mide el ángulo β y encuentra que es de 20°. ¿Cuál es el ancho del río?

Solución Buscamos la longitud del lado b. Conocemos a y β, de modo que usamos la relación

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

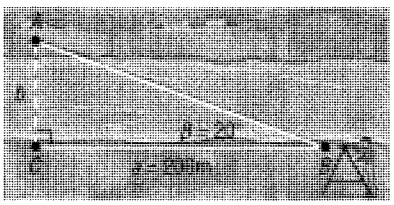
para obtener

$$\tan 20° = \frac{b}{200}$$

$$b = 200 \tan 20° \approx 72.79 \text{ metros}$$

Por tanto, el ancho del río es aproximadamente de 73 metros, redondeado a la unidad más cercana.

FIGURA 61



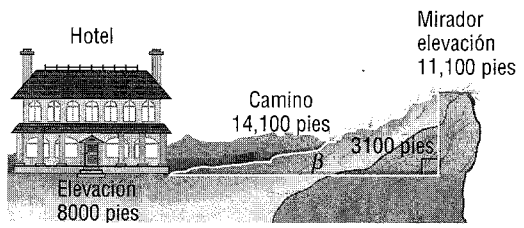
Ahora resuelva el problema 21.

Cálculo de la inclinación de un camino recto

Un camino recto con inclinación uniforme lleva desde un hotel a 8000 pies hasta un mirador situado a una altura de 11,100 pies. La longitud del camino es de 14,100 pies. ¿Cuál es la inclinación (pendiente) del camino?

Solución La figura 62 ilustra la situación. Buscamos el ángulo β. Como se muestra en la ilustración,

FIGURA 62



$$\operatorname{sen} \beta = \frac{3100}{14{,}100}$$

Utilizando una calculadora,

$$\beta \approx 12.7°$$

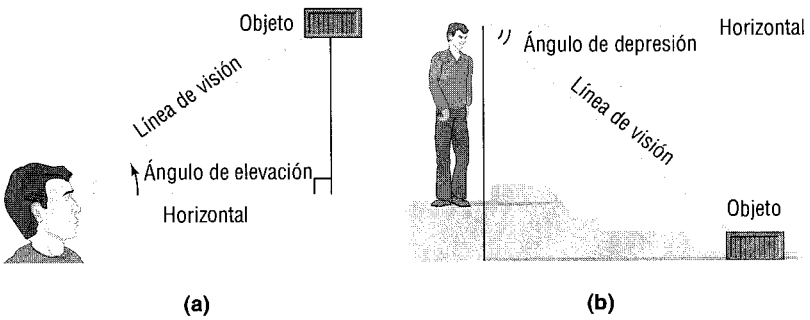
La inclinación (pendiente) del camino es aproximadamente de 12.7°.

Las alturas verticales algunas veces pueden ser medidas usando el ángulo de elevación o el ángulo de depresión. Si una persona está mirando hacia arriba a un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión del objeto es llamado **ángulo de elevación.** *Véase* la figura 63(a).

Si una persona está mirando hacia abajo a un objeto, el ángulo agudo formado por la línea de observación del objeto y la horizontal es llamado **ángulo de depresión.** *Véase* la figura 63(a).

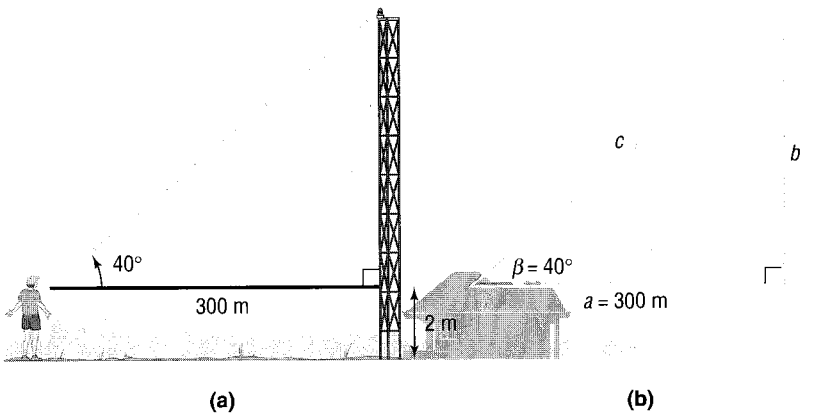
* Instrumento utilizado en topografía para medir ángulos.

FIGURA 63



Para determinar la altura de una torre de transmisión de radio, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. *Véase* la figura 64(a). Luego el ángulo de elevación se mide y se encuentra que es de 40°. Si el tránsito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?

FIGURA 64



La figura 64(b) muestra un triángulo que reproduce la ilustración de la figura 64(a). Para encontrar la longitud b, usamos el hecho de que $\tan \beta = b/a$. Entonces

$$b = a \tan \beta = 300 \tan 40° = 251.73 \text{ metros}$$

Ya que el tránsito está a dos metros de altura, la altura real de la torre es aproximadamente de 254 metros, redondeada al metro más cercano.

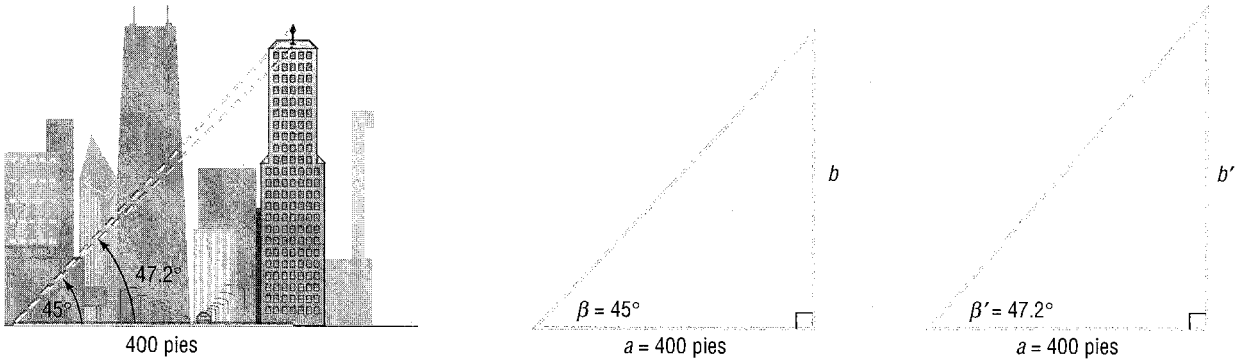
Ahora resuelva el problema 23.

La idea tras el ejemplo 5 también puede ser utilizada para determinar la altura de un objeto con base inaccesible.

Como adorno de la parte superior del edificio *Board of Trade* en Chicago está una estatua de Ceres, la diosa griega del trigo. Desde el nivel de la calle se hicieron dos observaciones a una distancia de 400 pies del centro del edificio. El ángulo de elevación a la base de la estatua fue de 45.0°; el ángulo de elevación

a la parte superior de la estatua fue de 47.2°. *Véase* la figura 65(a). ¿Cuál es la altura de la estatua?

FIGURA 65



Solución La figura 65(b) muestra dos triángulos que reproducen la figura 65(a). La altura de la estatua de Ceres será $b' - b$. Para encontrar b y b', con respecto a la figura 65(b):

$$\tan 45° = \frac{b}{400} \qquad \tan 47.2° = \frac{b'}{400}$$

$$b = 400 \tan 45° = 400 \qquad b' = 400 \tan 47.2° = 431.96$$

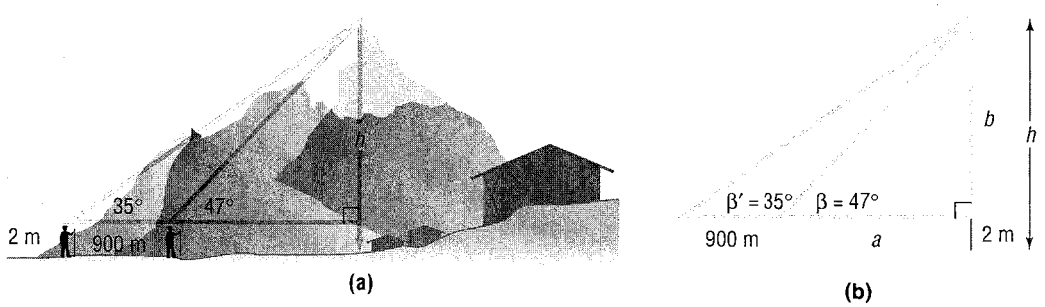
La altura de la estatua es aproximadamente de 32 pies.

Cuando no es posible caminar alejándose de la base del objeto cuya altura buscamos, se necesita una solución más imaginativa.

EJEMPLO 7 *Determinación de la altura de una montaña*

Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 900 metros en línea recta hacia la montaña.* *Véase* la figura 66(a). La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47°, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35°. Si el tránsito está a dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?

FIGURA 66



Solución La figura 66(b) muestra dos triángulos que reproducen la ilustración de la figura 66(a). De los dos triángulos rectángulos mostrados, encontramos

* Por simplicidad, suponemos que estas observaciones están al mismo nivel.

$$\tan \beta' = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\tan 35° = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan 47° = \frac{b}{a}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos variables, a y b. Ya que buscamos b, decidimos resolver la ecuación del lado derecho para a y sustituir el resultado, $a = b/\tan 47° = b \cot 47°$, en la ecuación del lado izquierdo. El resultado es

$$\tan 35° = \frac{b}{b \cot 47° + 900}$$

$$b = (b \cot 47° + 900) \tan 35°$$

$$b = b \cot 47° \tan 35° + 900 \tan 35°$$

$$b(1 - \cot 47° \tan 35°) = 900 \tan 35°$$

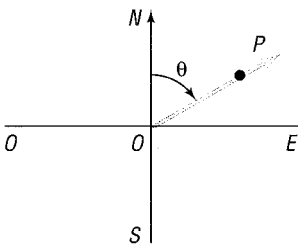
$$b = \frac{900 \tan 35°}{1 - \cot 47° \tan 35°} = \frac{900 \tan 35°}{1 - \dfrac{\tan 35°}{\tan 47°}} = 1816$$

Por lo tanto, la altura de la cima desde el nivel del suelo es aproximadamente de $1816 + 2 = 1818$ metros.

Ahora resuelva el problema 29.

En navegación, la **dirección** o **rumbo** desde O de un objeto en P significa el ángulo positivo medido en el sentido del giro de las manecillas del reloj* desde el norte (N) hasta el rayo OP. *Véase* la figura 67. Con base en la figura 67, diríamos que el rumbo de P desde O es θ grados.

FIGURA 67
La dirección de P desde O es θ



EJEMPLO 8 *Determinación del rumbo de un aeroplano*

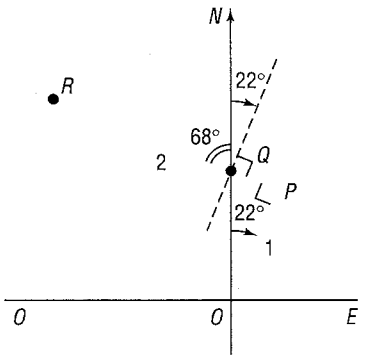
Un Boeing 777 despega del aeropuerto de O'Hara en una pista que tiene una dirección de 22°. Después de volar durante 1 milla, el piloto de la aeronave solicita permiso para virar 90° e ir hacia el noroeste. La petición es concedida.

(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?

(b) Después que el avión avanza 2 millas en la nueva ruta, ¿qué dirección debe usar la torre de control para localizarlo?

* Nótese que esta convención es precisamente la contraria de la que estamos usando.

FIGURA 68



(a) La figura 68 ilustra la situación. Después de volar 1 milla desde el aeropuerto O (la torre de control), la aeronave está en P. Cuando vira 90° hacia el noroeste, vemos que

$$\text{Ángulo } NOP = 22° \qquad \text{Ángulo } RQN = 90° - 22° = 68°$$

Por lo tanto, el rumbo final de esta aeronave es de

$$360° - \text{Ángulo } RQN = 360° - 68° = 292°$$

(b) Después de volar 2 millas en dirección de 292°, la aeronave está en R. Si $\theta =$ ángulo ROP, entonces

$$\tan\theta = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{así que} \quad \theta = 63.4°$$

Como resultado de esto,

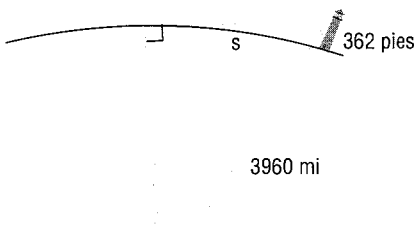
$$\text{Ángulo } RON = \theta - 22° = 41.4°$$

El rumbo del avión desde la torre de control en O es

$$360° - \text{Ángulo } RON = 360° - 41.4° = 318.6°$$

En operación desde 1846, este faro se levanta 117 pies sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la precisión de este enunciado.

FIGURA 69



La figura 69 ilustra la situación. El ángulo central θ satisface la ecuación

$$\cos\theta = \frac{3960}{3960 + \dfrac{362}{5280}} = 0.999982687$$

de modo que

$$\theta = 0.00588 \text{ radián} = 0.33715° = 20.23'$$

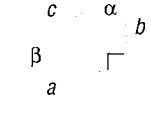
El folleto no indica si la distancia se mide en millas náuticas o en millas terrestres. La distancia s en millas náuticas es 20.23, la medida de θ en minutos. (*Véase* el problema 83, sección 5.1.) La distancia s en millas terrestres es

$$s = r\theta = 3960(0.00588) = 23.3 \text{ millas}$$

En cualquier caso, parece que el folleto exageró un poco la distancia.

Ejercicio 5.5

En los problemas del 1 al 14 utilice el triángulo rectángulo que se muestra al margen. Luego, usando la información dada, resuelva el triángulo.



1. $b = 5$, $\beta = 20°$; encuentre a, c, y α **2.** $b = 4$, $\beta = 10°$; encuentre a, c, y α

3. $a = 6$, $\beta = 40°$; encuentre b, c, y α **4.** $a = 7$, $\beta = 50°$; encuentre b, c, y α

5. $b = 4$, $\alpha = 10°$; encuentre a, c, y β **6.** $b = 6$, $\alpha = 20°$; encuentre a, c, y β

7. $a = 5$, $\alpha = 25°$; encuentre b, c, y β

8. $a = 6$, $\alpha = 40°$; encuentre b, c, y β

9. $c = 9$, $\beta = 20°$; encuentre b, a, y α

10. $c = 10$, $\alpha = 40°$; encuentre b, a, y β

11. $a = 5$, $b = 3$; encuentre c, α, y β

12. $a = 2$, $b = 8$; encuentre c, α, y β

13. $a = 2$, $c = 5$; encuentre b, α, y β

14. $b = 4$, $c = 6$; encuentre a, α, y β

15. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3 pulgadas de longitud. Si un ángulo es de 35°, encuentre la longitud de cada cateto.

16. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 2 centímetros de longitud. Si un ángulo es de 40°, encuentre la longitud de cada cateto.

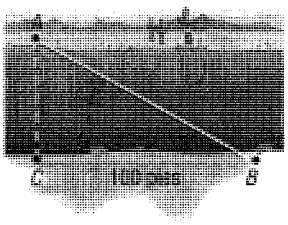
17. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 35°. Si un cateto es de 5 pulgadas de longitud, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa? [*Sugerencia*: son posibles dos respuestas.]

18. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de $\pi/10$ radianes. Si un cateto es de 3 metros de longitud, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa? [*Sugerencia*: son posibles dos respuestas.]

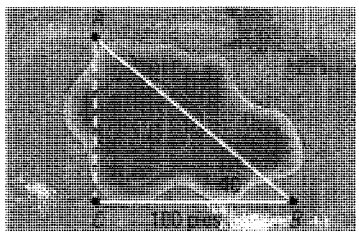
19. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 5 pulgadas. Si un cateto es de 2 pulgadas, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

20. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 3 pies. Si un cateto mide 1 pie, encuentre la medida en grados de cada ángulo.

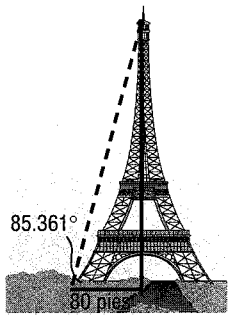
21. Encuentre la distancia desde A hasta C en el desfiladero ilustrado en la figura siguiente.



22. Encuentre la distancia desde A hasta C cruzando el estanque ilustrado en la figura siguiente.



23. La torre Eiffel, la más alta construida antes de la era de las antenas de televisión, fue terminada el 31 de marzo de 1889. Encuentre la altura de la torre Eiffel (sin contar una antena de televisión instalada en la punta) usando la información dada en la ilustración.



24. Un barco se encuentra frente a un acantilado vertical de 100 pies de altura y toma una observación a la punta del acantilado. Si el ángulo de elevación es de 25°, ¿a qué distancia de la costa está el barco?

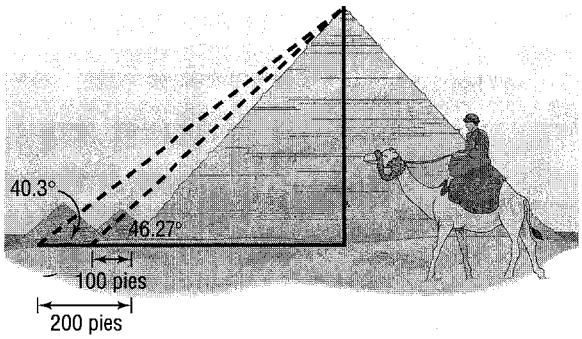
25. Suponga que usted se dirige hacia una meseta que está a 50 metros de altura. Si el ángulo de elevación a la parte superior de la meseta es de 20°, ¿qué tan alejado se encuentra usted de la base de la meseta?

26. Un barco frente a la costa de la ciudad de Nueva York toma una observación de la Estatua de la Libertad, que es de casi 305 pies de altura. Si el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua es de 20°, ¿a qué distancia se encuentra el barco de la base de la estatua?

27. Una escalera de 22 pies de largo descansa contra un edificio haciendo un ángulo de 70° con el piso. ¿Qué tan alto toca la escalera al edificio?

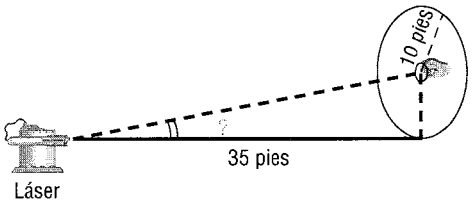
28. Para calcular la altura de un edificio, se debe hacer por separado dos observaciones a una distancia de 50 pies. Si el primer ángulo de elevación es de 40° y el segundo es de 32°, ¿Cuál es la altura del edificio?

29. Una de las siete maravillas del mundo antiguo, la Gran Pirámide de Keops, fue construida alrededor del año 2580 a. de C. Su altura original era de 480 pies 11 pulgadas, pero debido a la pérdida de las piedras de su punta ahora es más baja*. Encuentre la altura actual de la Gran Pirámide usando la información dada en la ilustración.



* *Fuente:* Libro Guinness de Marcas Mundiales.

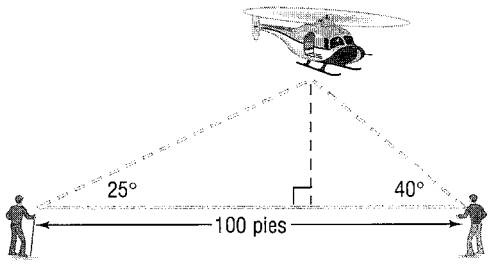
30. Un rayo láser será dirigido a través de un pequeño orificio situado en el centro de un círculo cuyo radio es de 10 pies. El origen del rayo está a 35 pies del círculo (*Véase* la figura). ¿A qué ángulo de elevación debe ser apuntado el rayo para asegurarse que pasará a través del orificio?



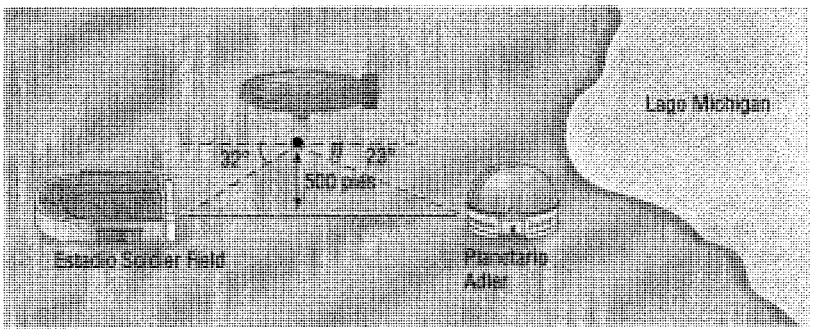
31. *Determinación del ángulo de elevación del Sol.* A las 10 de la mañana del 26 de abril de 1996, un edificio de 300 pies de altura proyectó una sombra de 50 pies de largo. ¿Cuál era el ángulo de elevación del Sol?

32. *Monte de Rushmore.* Para medir la altura de la efigie de Lincoln en el Monte Rushmore, se toman dos observaciones a 800 pies de la base del monte. Si el ángulo de elevación a la parte inferior de la cara es de 32° y el ángulo de elevación a la parte superior es de 35°, ¿cuál es la altura de la cara de Lincoln?

33. *Determinación de la altura de un helicóptero.* De manera simultánea, dos observadores miden el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 25° y el otro 40° (*véase* la figura). Si los observadores están separados una distancia de 100 pies y el helicóptero está sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?



34. *Determinación de la distancia entre dos objetos.* Un dirigible, suspendido a una altura de 500 pies, está directamente sobre una línea que va desde el estadio *Soldier Field* hasta el planetario Adler en el Lago Michigan (*véase* la figura). Si el ángulo de depresión del dirigible al estadio es de 32° y al planetario de 23°, encuentre la distancia entre el estadio y el planetario Adler.



35. *Determinación de la longitud de un cable.* Una torre de transmisión de radio es de 200 pies de altura. ¿Qué tan largo debe ser un cable si se sujeta a la torre a 10 pies de la punta para formar un ángulo de 21° con el piso?

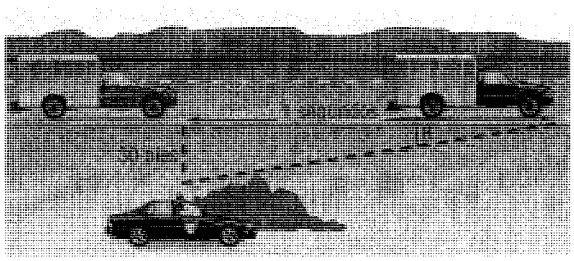
36. *Determinación de la altura de una torre* Un alambre de 80 pies de longitud se sujeta a la parte superior de una torre formando un ángulo de 25° con el suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

37. *Monumento a Washington.* El ángulo de elevación del monumento a Washington es de 35.1° en el instante en que proyecta una sombra de 789 pies de longitud. Utilice esta información para calcular la altura del monumento.

38. *Determinación de la longitud de un camino montañoso.* Un camino recto con inclinación uniforme de 17° lleva desde un hotel situado a 9000 pies hasta un lago en la montaña, a 11,200 pies. ¿Cuál es la longitud del camino?

39. *Determinación de la velocidad de un camión.* Un patrullero está oculto a 30 pies de una autopista. Un segundo después de que pasa un camión por el punto donde se encuentra el patrullero, se mide el ángulo θ entre la autopista y la línea de observación desde la patrulla al camión.
Véase la ilustración.

(a) Si la medida del ángulo es de 15°, ¿qué tan rápido viaja el camión? Exprese su respuesta en pies por segundo y en millas por hora.
(b) Si la medida del ángulo es de 20°, ¿qué tan rápido viaja el camión? Exprese su respuesta en pies por segundo y en millas por hora.
(c) Si el límite de velocidad es de 55 millas por hora y se expide una boleta de multa por velocidades que exceden en 5 o más millas por hora este límite, ¿para qué ángulos debe el patrullero expedir una boleta de multa?



40. *Faro en la colina de Cable Southampton, Bermudas.* En operación desde 1846, el faro se levanta 117 pies sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la veracidad de esta información. El folleto más adelante afirma que barcos navegando a 40 millas de distancia pueden ver la luz y que aviones volando a 10,000 pies la distinguen a 120 millas. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Qué suposición se hace en el folleto acerca de la altura del barco? (*Véase* la ilustración, sección 1.1, problema 115.)

41. *Determinación del rumbo de una aeronave.* Un DC-9 parte del aeropuerto Midway desde una pista de despegue cuya dirección es de 40°. Después de volar media milla, el piloto solicita permiso para virar 90° y dirigirse hacia el sudeste, El permiso es concedido.
(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?
(b) Después que el aeroplano recorre una milla en la nueva ruta, ¿que dirección debe usar la torre de control para localizarlo?

42. *Determinación del rumbo de un barco.* Un barco sale del puerto de Miami con rumbo de 100° y velocidad de 15 nudos. Después de una hora el barco vira 90° hacia el sur.
(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?
(b) Después de 2 horas, manteniendo la velocidad constante, ¿cuál es la dirección del barco respecto del puerto?

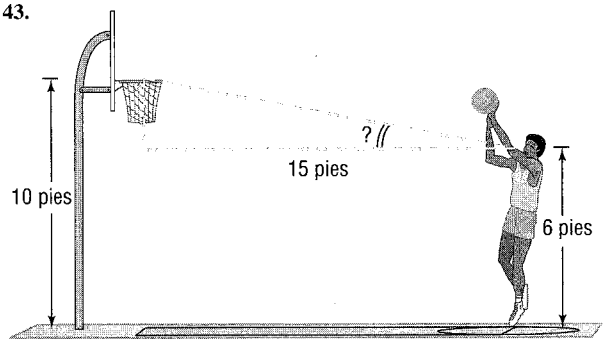
43. *Tiros libres en baloncesto.* Los ojos de un jugador de baloncesto están a 6 pies del piso. El jugador está en la línea de tiro libre, a 15 pies del centro del aro de la canasta (*véase* la figura). ¿Cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador al centro del aro? [*Nota*: El aro está a 10 pies del piso.]

44. *Determinación del declive de un techo.* Un carpintero está preparando un techo para una cochera que mide 20 por 40 por 20 pies. Una viga de acero de 46 pies de longitud es colocada en el centro de la cochera como soporte. Para sostener el techo se sujetará otra viga a la parte superior de la viga central (*véase* la figura). ¿A qué ángulo de elevación está la segunda viga? En otras palabras, ¿cuál es el declive del techo?

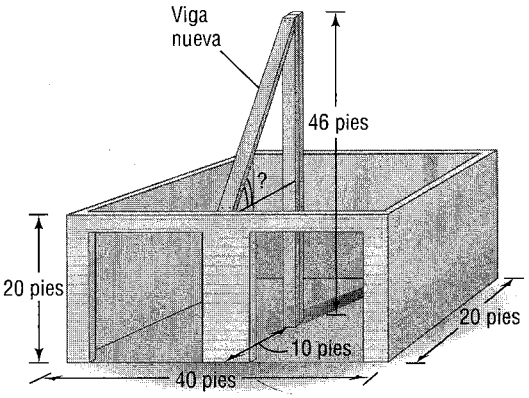
45. *Determinación de distancias en el mar.* El piloto de un barco en el mar divisa dos faros que sabe están separados 3 millas en línea recta a lo largo de la costa. Él determina que los ángulos formados entre dos líneas de observación a los faros y la línea del barco perpendicular a la costa son 15° y 35°. *Véase* la ilustración.
(a) ¿Qué tan lejos está el barco de la costa?
(b) ¿Qué tan lejos está el barco del faro A?
(c) ¿Qué tan lejos está del faro B?

46. *Construcción de una autopista.* Una autopista cuyas direcciones principales son norte-sur será construida a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye la ruta recta de la autopista. A causa de que el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra la ruta a seguir y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud necesaria de la autopista para rodear la bahía?

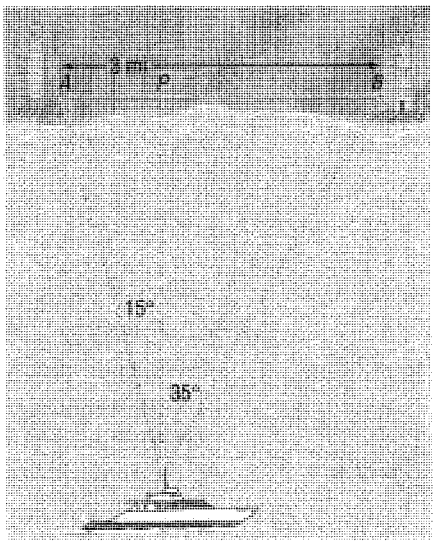
43.



44.



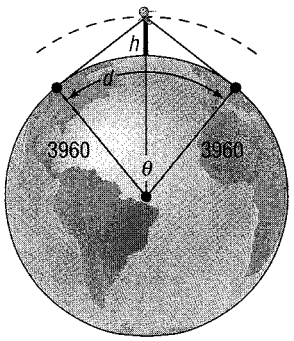
45.



46.

47. *Satélites de vigilancia* Un satélite de vigilancia da vueltas alrededor de la Tierra a una altura de h millas por encima de la superficie. Suponga que d es la distancia, en millas, sobre la superficie de la Tierra que puede ser observada desde el satélite. *Véase* la ilustración.

(a) Encuentre una ecuación que relacione el ángulo central θ con la altura h.
(b) Encuentre una ecuación que relacione la distancia observable d y el ángulo θ.
(c) Encuentre una ecuación que relacione d y h.
(d) Si d abarcará 2500 millas, ¿a qué altura debe estar el satélite sobre la Tierra?
(e) Si el satélite órbita a una altura de 300 millas, ¿qué distancia d sobre la superficie de la Tierra puede ser observada?



48. Compare el problema 115 de la sección 1.1 con el ejemplo 9 y el problema 40 de esta sección. En su solución, uno usa el teorema de Pitágoras mientras que los otros aplican trigonometría. Escriba un artículo breve que contraste los dos métodos de solución. Asegúrese de señalar las ventajas y desventajas de cada método. Luego decida cuál solución prefiere usted. Asegúrese de tener razones para ello.

Repaso del capítulo

Conceptos Fundamentales

Definiciones

Posición estándar de un ángulo	Vértice en el origen; lado inicial a lo largo del eje x-positivo
Grado (1°)	$1° = \frac{1}{360}$ vuelta
Radián (1)	La medida de un ángulo central cuyos rayos subtienden un arco de longitud igual al radio del círculo
Círculo unitario	Centro en el origen; radio = 1 Ecuación: $x^2 + y^2 = 1$
Funciones trigonométricas	$P = (a, b)$ es el punto sobre el círculo unitario correspondiente $\theta = t$ radianes;

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos t = \cos\theta = a$$

$$\tan t = \tan\theta = \frac{b}{a},\quad a \neq 0 \qquad \cot t = \cot\theta = \frac{a}{b},\quad b \neq 0$$

$$\csc t = \csc\theta = \frac{1}{b},\quad b \neq 0 \qquad \sec t = \sec\theta = \frac{1}{a},\quad a \neq 0$$

Funciones periódicas	$f(\theta + p) = f(\theta)$, para toda θ, $p > 0$, donde el más pequeño de tales p es el periodo fundamental
Ángulo agudo	Un ángulo θ cuya medida es $0° < \theta < 90°$ (or $0 < \theta < \pi/2$)
Ángulos complementarios	Dos ángulos agudos cuya suma es $90°$ ($\pi/2$)
Cofunción	Las parejas siguientes de funciones son cofunciones una de la otra: seno y coseno; tangente y cotangente; secante y cosecante
Ángulo de referencia de θ	El ángulo agudo formado por el lado final de θ y ya sea el eje x-positivo o el eje x negativo

Fórmulas

1 vuelta = 360° $= 2\pi$ radianes	
$s = r\theta$	θ es medida en radianes; s es la longitud del arco subtendido por el ángulo central θ del círculo de radio r.
$v = r\omega$	v es la velocidad lineal a lo largo del círculo de radio r; ω es la velocidad angular (medida en radianes por unidad de tiempo).

Tabla de valor

θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\pi/6$	30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	-1	0	No definida	-1	No definida
$3\pi/2$	270°	-1	0	No definida	-1	No definida	0

Propiedades de las funciones trigonométricas

$f(\theta) = \text{sen } \theta$
Dominio: todos los números reales
Rango: todos los números reales desde -1 a 1, inclusive
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función impar

$f(\theta) = \cos \theta$
Dominio: todos los números reales.
Rango: todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par

$f(\theta) = \tan \theta$
Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)
Rango: todos los números reales.
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar

$f(\theta) = \csc \theta$
Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: todos los números reales mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función impar

$f(\theta) = \sec \theta$
Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)
Rango: todos los números reales mayores o iguales que 1 o menores o iguales que -1
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par

$f(\theta) = \cot \theta$
Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: todos los números reales
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar

Identidades

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta, \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Cómo hacer para

Convertir la medida de un ángulo dada en radianes a grados.

Convertir la medida de un ángulo dada en grados a radianes.

Encontrar el valor de cada una de las otras funciones trigonométricas si se da el valor de una función y el cuadrante en que está el ángulo.

Usar el teorema sobre cofunciones de ángulos complementarios.

Usar el ángulo de referencia para encontrar el valor de una función trigonométrica.

Usar una calculadora para encontrar el valor de una función trigonométrica.

Usar la trigonometría de un triángulo rectángulo para resolver triángulos rectángulos y problemas de aplicación.

Complemente en los espacios

1. Dos rayos dibujados con vértice común forman un(a) _____. Uno de los rayos es llamado _____ _____; el otro es llamado _____ _____.
2. En la fórmula $s = r\theta$ para medir la longitud s de un arco que pasa por un círculo de radio r, el ángulo θ debe ser medido en _____.
3. 180 grados = _____ radianes.
4. Dos ángulos agudos cuya suma es un ángulo recto son llamados _____.
5. Las funciones seno y _____ son cofunciones.
6. Un ángulo está en _____ _____ si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.
7. El ángulo de referencia de 135° es _____.
8. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen periodo _____; las funciones tangente y cotangente tiene periodo _____.

Cierto o falso

C F **1.** En la fórmula $s = r\theta$, r es el radio de un círculo y s es el arco subtendido por un ángulo central θ, donde θ es medido en grados.

C F **2.** $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$

C F **3.** $1 + \tan^2\theta = \csc^2\theta$

C F **4.** Las únicas funciones trigonométricas pares son las funciones coseno y secante.

C F **5.** $\tan 62° = \cot 38°$

C F **6.** $\operatorname{sen} 182° = \cos 2°$

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 4 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

1. 135° **2.** 210° **3.** 18° **4.** 15°

En los problemas del 5 al 8, convierta cada ángulo dado en radianes a grados.

5. $3\pi/4$ **6.** $2\pi/3$ **7.** $-5\pi/2$ **8.** $-3\pi/2$

En los problemas del 9 al 30 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

9. $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

10. $\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

11. $3 \operatorname{sen} 45° - 4\tan\frac{\pi}{6}$

12. $4\cos 60° + 3\tan\frac{\pi}{3}$

13. $6\cos\frac{3\pi}{4} + 2\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

14. $3\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} - 4\cos\frac{5\pi}{2}$

15. $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

16. $4\csc\frac{3\pi}{4} - \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

17. $\tan\pi + \operatorname{sen}\pi$

18. $\cos\frac{\pi}{2} - \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

19. $\cos 180° - \tan(-45°)$

20. $\operatorname{sen} 270° + \cos(-180°)$

21. $\operatorname{sen}^2 20° + \frac{1}{\sec^2 20°}$

22. $\frac{1}{\cos^2 40°} - \frac{1}{\cot^2 40°}$

23. $\sec 50° \cos 50°$

24. $\tan 10° \cot 10°$

25. $\frac{\operatorname{sen} 50°}{\cos 40°}$

26. $\frac{\tan 20°}{\cot 70°}$

27. $\frac{\operatorname{sen}(-40°)}{\cos 50°}$

28. $\tan(-20°)\cot 20°$

29. $\operatorname{sen} 400° \sec(-50°)$

30. $\cot 200° \cot(-70°)$

En los problemas del 31 al 46 encuentre el valor exacto de cada una de las restantes funciones trigonométricas.

31. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta > 0$

32. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

33. $\tan\theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

34. $\cot\theta = \frac{12}{5}$, $\cos\theta < 0$

35. $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\tan\theta < 0$

36. $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta < 0$

37. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, θ en el cuadrante II

38. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, θ en el cuadrante III

39. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

40. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

41. $\tan\theta = \frac{1}{3}$, $180° < \theta < 270°$

42. $\tan\theta = -\frac{2}{3}$, $90° < \theta < 180°$

43. $\sec\theta = 3$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

44. $\csc\theta = -4$, $\pi < \theta < 3\pi/2$

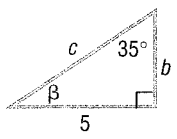
45. $\cot\theta = -2$, $\pi/2 < \theta < \pi$

46. $\tan\theta = -2$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

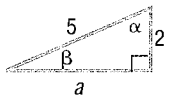
En los problemas del 47 al 50 resuelva cada triángulo.

47.

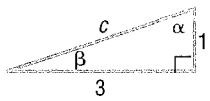
48.



49.



50.



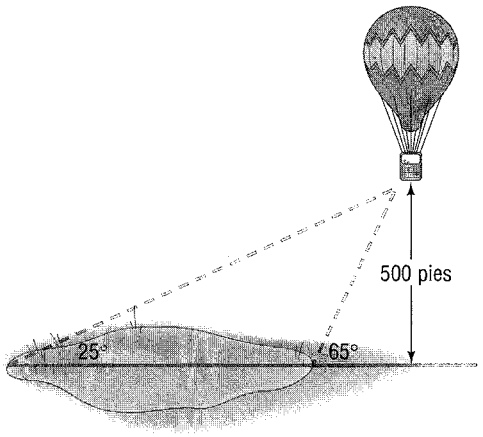
51. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 30° sobre un círculo con radio de 2 pies.

52. El minutero de un reloj tiene una longitud de 8 pulgadas. ¿Qué distancia avanza la punta del minutero en 30 minutos? ¿Qué distancia se mueve en 20 minutos?

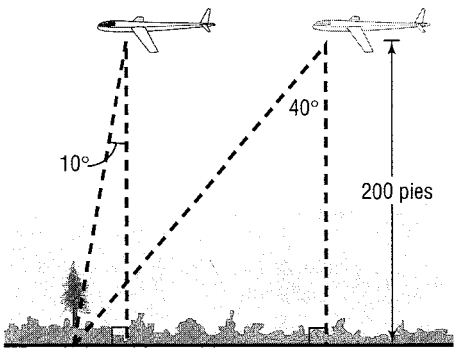
53. *Velocidad angular de un automóvil de carreras* .Un auto de carreras es conducido en una pista circular a una velocidad constante de 180 millas por hora. Si el diámetro de la pista es de media milla, ¿cuál es la velocidad angular del automóvil? Exprese su respuesta en revoluciones por hora (que es equivalente a vueltas por hora).

54. *Velocidad angular de un automóvil de carreras.* Repita el problema 53 si el automóvil sólo va a 150 millas por hora.

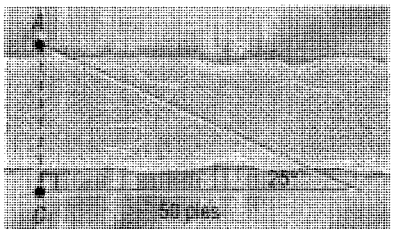
55. *Medición de la longitud de un lago.* Desde un globo estacionario de aire caliente situado a 500 pies sobre el suelo se hacen dos observaciones de un lago (*véase* la figura). ¿Cuál es la longitud del lago?



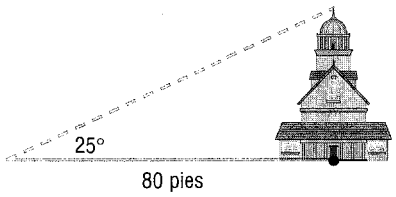
56. *Determinación de la velocidad de un planeador.* Desde un planeador que va a 200 pies del suelo, se toman dos observaciones de un objeto fijo en tierra que se encuentra directamente frente a él, las observaciones se toman con una diferencia de un minuto (*véase* la figura). ¿Cuál es la velocidad del planeador?



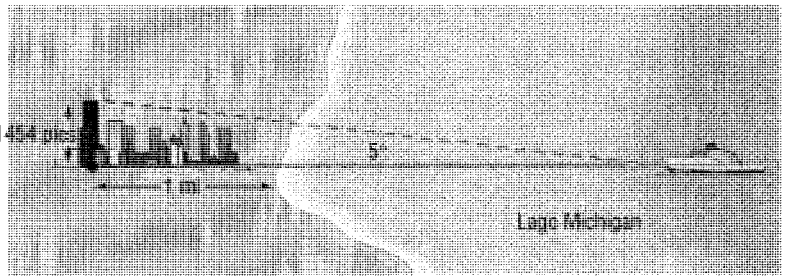
57. *Determinación del ancho de un río.* Encuentre la distancia desde *A* hasta *C* cruzando el río ilustrado en la figura.



58. *Determinación de la altura de un edificio.* Encuentre la altura del edificio mostrado en esta figura.



59. *Determinación de la distancia de la costa.* La torre Sears en Chicago mide 1454 pies de altura y está situada casi una milla tierra adentro de la costa del lago Michigan, como se indica en la figura. Un observador que está en un bote de recreo en el lago, directamente en frente de la torre, ve la punta de la torre y mide el ángulo de elevación como 5°. ¿A qué distancia de la costa se encuentra el bote?



60. *Determinación de la pendiente de un camino montañoso.* Un camino en la montaña con inclinación uniforme conduce desde un hotel, a una altura de 5000 pies, hasta el lago de un valle, a una altura de 4100 pies. La longitud del camino es de 4100 pies. ¿Cuál es su pendiente?

TEMA 2

Gráficas de las funciones trigonométricas

CAPÍTULO 6

6.1 Gráficas de las funciones seno y coseno

6.2 Gráficas senoidales

6.3 Aplicaciones

6.4 Gráficas de $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$

6.5 Funciones trigonométricas inversas

Repaso del capítulo

Panorama **Teléfonos por tono**

En los teléfonos por tono cada botón produce un sonido único. Ese sonido es la suma de dos tonos, dada por

$$y = \operatorname{sen} 2\pi lt \text{ y } y = \operatorname{sen} 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias alta y baja (ciclos por segundo) de los dos tonos. Por ejemplo, si usted oprime 7, la frecuencia baja es l = 852 ciclos por segundo y la frecuencia alta es h = 1 209 ciclos por segundo.

El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \operatorname{sen} 2\pi(852)t + \operatorname{sen} 2\pi(1\,209)t$$

Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir 7. [Problema 29 en el ejercicio 6.3.]

En este capítulo haremos las gráficas de las seis funciones trigonométricas. Después de analizar las gráficas de las funciones seno y coseno veremos algunas aplicaciones relacionadas con las vibraciones amortiguadas y el movimiento armónico simple. Luego haremos las gráficas de las demás funciones trigonométricas y concluiremos el capítulo con un análisis de las funciones trigonométricas inversas.

6.1

Gráficas de las funciones seno y coseno

En el capítulo 5 definimos las funciones trigonométricas $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$, $f(\theta) = \cos \theta$, etc. En este capítulo utilizaremos los símbolos tradicionales, x para representar la variable independiente (el argumento) y y para la variable dependiente (o valor en x) en cada función. Así, escribimos las seis funciones trigonométricas como

$$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x$$
$$y = \csc x \qquad y = \sec x \qquad y = \cot x$$

En esta sección haremos la gráfica de cada una de estas funciones. A menos que se indique lo contrario, utilizaremos la medida en radianes en todo el capítulo para la variable independiente x.

La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$

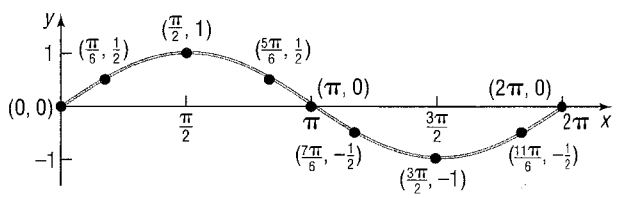
Como la función seno tiene periodo 2π (*véase* la sección 7.6), sólo necesitamos hacer la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. El resto de la gráfica constará de repeticiones de esta parte.

Comenzamos construyendo la tabla 1, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le 2\pi$. Como muestra la tabla, la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le 2\pi$ comienza en el origen. Cuando x crece de 0 $\pi/2$, el valor de $y = \operatorname{sen} x$ aumenta de 0 a 1; cuando x crece de $\pi/2$ a π a $3\pi/2$, el valor de y disminuye de 1 a 0 a -1; cuando x crece de $3\pi/2$ a 2π, el valor de y aumenta de -1 a 0. Si hacemos la gráfica de los puntos enumerados en la tabla 1 y los unimos por medio de una curva suave obtendremos la gráfica de la figura 1.

TABLA 1

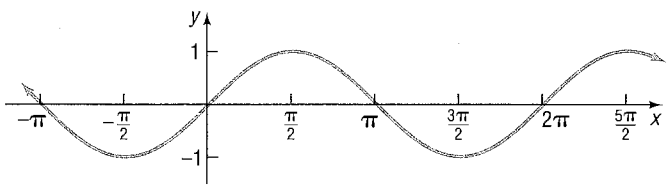
x	$y = \operatorname{sen} x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$(\pi/6, \frac{1}{2})$
$\pi/2$	1	$(\pi/2, 1)$
$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$(5\pi/6, \frac{1}{2})$
π	0	$(\pi, 0)$
$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$(7\pi/6, -\frac{1}{2})$
$3\pi/2$	-1	$(3\pi/2, -1)$
$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$(11\pi/6, -\frac{1}{2})$
2π	0	$(2\pi, 0)$

FIGURA 1
$y = \operatorname{sen} x$,
$0 \le x \le 2\pi$



La gráfica de la figura 1 es un periodo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Para obtener una gráfica más completa de $y = \operatorname{sen} x$, repetimos este periodo en cada dirección, como muestra la figura 2.

FIGURA 2
$y = \operatorname{sen} x$,
$-\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \text{sen } x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función seno:

Características de la función seno

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consta de todos los números reales entre -1 y 1, inclusive.
3. La función seno es una función impar, como muestra la simetría de la gráfica con respecto al origen.
4. La función seno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección-$y$ es 0.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2, 11\pi/2, \ldots$.

Ahora resuelva los problemas 1, 3 y 5.

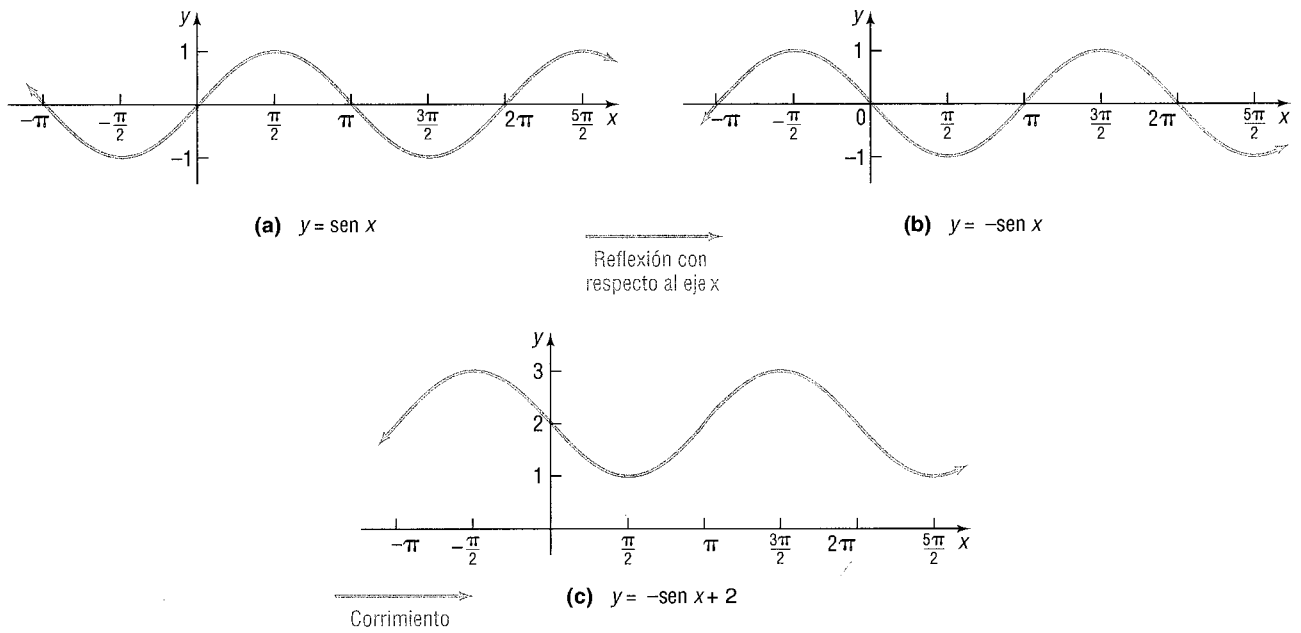
Las técnicas de graficación presentadas en el capítulo 2 permiten hacer la gráfica de funciones que son una variación de la función seno.

EJEMPLO 1 *Graficación de variaciones de $y = \text{sen } x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \text{sen } x$ para hacer la gráfica de $y = -\text{sen } x + 2$.

Solución La figura 3 ilustra los pasos.

FIGURA 3



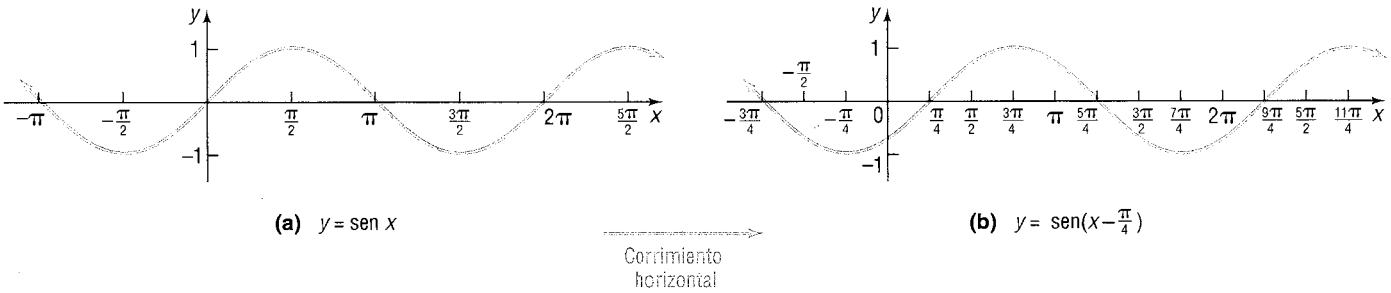
Verificación: haga la gráfica de $y = -\text{sen } x + 2$ y compare el resultado con la figura 3(c).

EJEMPLO 2 *Graficación de variaciones de $y = \text{sen } x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \text{sen } x$ para hacer la gráfica de $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución La figura 4 ilustra los pasos.

FIGURA 4



Verificación: haga la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ y compare el resultado con la figura 4(b). □

□ Ahora resuelva el problema 11.

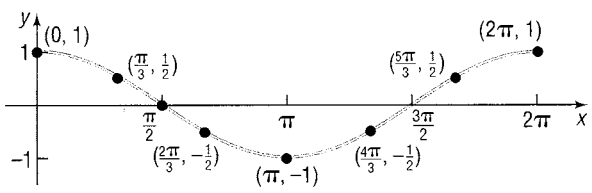
Gráfica de $y = \cos x$

La función coseno también tiene periodo 2π. Así, procedemos como con la función seno y construimos la tabla 2, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$. Como muestra la tabla, la gráfica de $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$, comienza en el punto (0,1). Cuando x crece de 0 a $\pi/2$ a π, el valor de y disminuye de 1 a 0 a −1; cuando x crece de π a $3\pi/2$ a 2π, el valor de y aumenta de −1 a 0 a 1. Como antes, localizamos en el plano los puntos de la tabla 2 para obtener un periodo de la gráfica de $y = \cos x$. *Véase* la figura 5.

TABLA 2

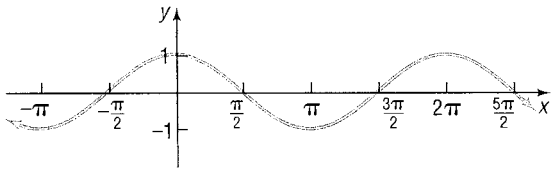
x	$y = \cos x$	(x, y)
0	1	(0, 1)
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$(\pi/3, \frac{1}{2})$
$\pi/2$	0	$(\pi/2, 0)$
$2\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$(2\pi/3, -\frac{1}{2})$
π	−1	$(\pi, -1)$
$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$(4\pi/3, -\frac{1}{2})$
$3\pi/2$	0	$(3\pi/2, 0)$
$5\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$(5\pi/3, \frac{1}{2})$
2π	1	$(2\pi, 1)$

FIGURA 5
$y = \cos x$,
$0 \le x \le 2\pi$



Obtenemos una gráfica más completa de $y = \cos x$ repitiendo este periodo en cada dirección, como muestra la figura 6.

FIGURA 6
$y = \cos x$, $-\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \cos x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función coseno:

Características de la función coseno

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consta de todos los números reales entre -1 y 1, inclusive.
3. La función coseno es una función par, como muestra la simetría de la gráfica respecto del eje y.
4. La función coseno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$; la intersección-$y$ es 1.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$.

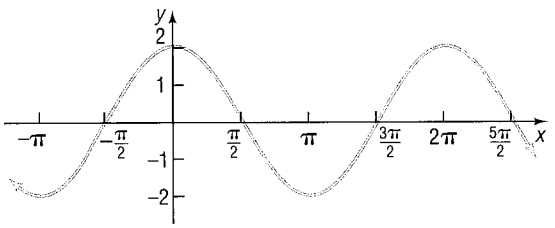
De nuevo, las técnicas de graficación presentadas en el capítulo 2 permiten hacer la gráfica de variaciones de la función coseno.

EJEMPLO 3 *Graficación de variaciones de $y = \cos x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para hacer la gráfica de $y = 2 \cos x$.

Solución La figura 7 ilustra la gráfica, la cual es un alargamiento vertical de la gráfica de $y = \cos x$.

FIGURA 7
$y = 2 \cos x$



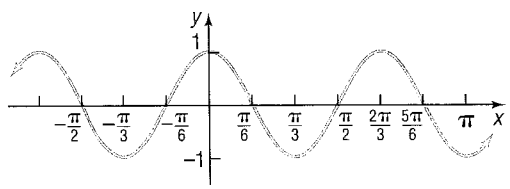
Verificación: haga la gráfica de $y = 2 \cos x$ y compare el resultado con la figura 7. ■

EJEMPLO 4 *Graficación de variaciones de $y = \cos x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para hacer la gráfica de $y = \cos 3x$.

Solución La figura 8 ilustra la gráfica, la cual es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \cos x$. Observe que, debido a esta compresión, el periodo de $y = \cos 3x$ es $2\pi/3$ mientras que el periodo de $y = \cos x$ es 2π. Comentaremos más sobre esto en la siguiente sección.

FIGURA 8
$y = \cos 3x$



Verificación: haga la gráfica de $y = \cos 3x$. Utilice TRACE para verificar que el periodo es $2\pi/3$. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

6.1

Ejercicio 6.1

En los problemas del 1 al 10 consulte las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ para responder cada pregunta, en caso necesario.

1. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \text{sen } x$?
2. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \cos x$?
3. ¿Para cuáles números x, $-\pi \le x \le \pi$ es creciente la gráfica de $y = \text{sen } x$?
4. ¿Para cuáles números x, $-\pi \le x \le \pi$ es decreciente la gráfica de $y = \cos x$?
5. ¿Cuál es el valor máximo de $y = \text{sen } x$?
6. ¿Cuál es el valor mínimo de $y = \cos x$?
7. ¿Para cuáles números x, $0 \le x \le 2\pi$, se cumple que $\text{sen } x = 0$?
8. ¿Para cuáles números x, $0 \le x \le 2\pi$, se cumple que $\cos x = 0$?
9. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, se cumple que $\text{sen } x = 1$? ¿Qué puede decir de $\text{sen } x = -1$?
10. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, se cumple que $\cos x = 1$? ¿Qué puede decir de $\cos x = -1$?

En los problemas del 11 al 26, haga la gráfica de cada función. Muestre al menos un periodo.

11. $y = 3 \text{ sen } x$
12. $y = 4 \cos x$
13. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
14. $y = \text{sen}(x - \pi)$
15. $y = \text{sen } x - 1$
16. $y = \cos x + 1$
17. $y = -2 \text{ sen } x$
18. $y = -3 \cos x$
19. $y = \text{sen } \pi x$
20. $y = \cos \frac{\pi}{2} x$
21. $y = 2 \text{ sen } x + 2$
22. $y = 3 \cos x + 3$
23. $y = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
24. $y = -3 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
25. $y = 3 \text{ sen } (\pi - x)$
26. $y = 2 \cos (\pi - x)$

27. Haga la gráfica de

$$y = \text{sen } x \quad \text{y} \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

¿Piensa que $\text{sen } x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$?

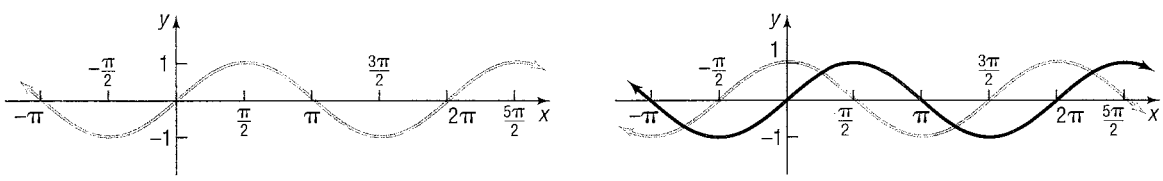
28. Haga la gráfica de $y = \text{sen } x$, $y = 2 \text{ sen } x$, $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, y $y = 8 \text{ sen } x$. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de $y = A \text{ sen } x$, $A > 0$?
29. Haga la gráfica de $y = \text{sen } x$, $y = \text{sen } 2x$, $y = \text{sen } 4x$, y $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de $y = \text{sen } \omega x$?
30. Haga la gráfica de $y = \text{sen } x$, $y = \text{sen}[x - (\pi/3)]$, $y = \text{sen}[x - (\pi/4)]$, y $y = \text{sen}[x - (\pi/6)]$. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de $y = \text{sen}(x - \phi)$, $\phi > 0$?

6.2

Gráficas senoidales

La gráfica de $y = \cos x$, comparada con la de $y = \text{sen } x$, sugiere que la gráfica de $y = \text{sen } x$ es igual a la de $y = \cos x$, después de un corrimiento horizontal de $\pi/2$ unidades a la derecha. *Véase* la figura 9.

FIGURA 9



(a) $y = \text{sen } x$ **(b)** $y = \cos x$ $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Con base en la figura 9, suponemos que

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

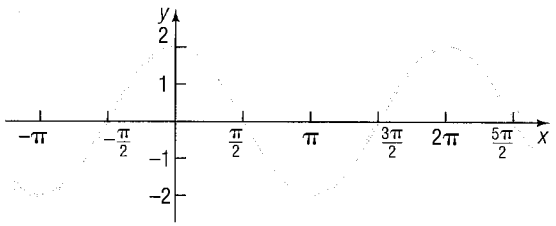
(Demostraremos esto en el capítulo 7.) Debido a este parecido las gráficas de las funciones seno y coseno se conocen como **gráficas senoidales.**

haga la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuántas gráficas ve?

Analicemos algunas características generales de las gráficas senoidales.

En el ejemplo 3 de la sección anterior obtuvimos la gráfica de $y = 2 \cos x$, la cual reproducimos en la figura 10. Observe que los valores de $y = 2 \cos x$ están entre -2 y 2, inclusive.

FIGURA 10
$y = 2 \cos x$

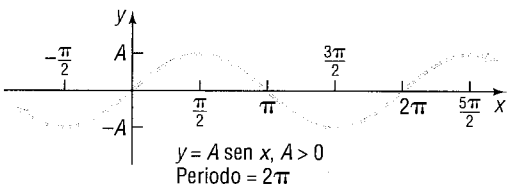


En general, los valores de las funciones $y = A \operatorname{sen} x$ y $y = A \cos x$, donde $A \neq 0$, siempre satisfacen las desigualdades.

$$-|A| \leq A \operatorname{sen} x \leq |A| \quad \text{y} \quad -|A| \leq A \cos x \leq |A|$$

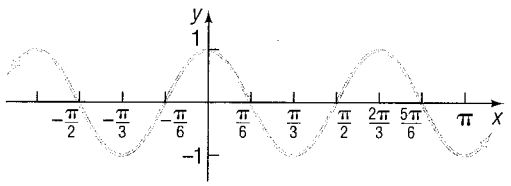
respectivamente. El número $|A|$ es la **amplitud** de $y = A \operatorname{sen} x$ o $y = A \cos x$. *Véase* la figura 11.

FIGURA 11



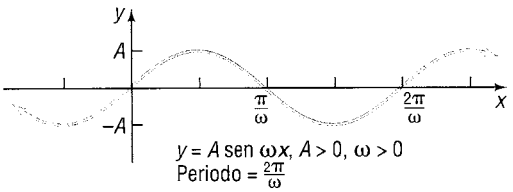
En el ejemplo 4 de la sección 6.1 obtuvimos la gráfica de $y = \cos 3x$, la cual reproducimos en la figura 12. Observe que el periodo de esta función es $2\pi/3$.

FIGURA 12
$y = \cos 3x$



En general, si $\omega > 0$, las funciones y = sen ωx y $y = \cos \omega x$ tendrán un periodo $T = 2\pi/\omega$. Para ver por qué ocurre esto, recordemos que la gráfica de $y = \text{sen } \omega x$ se obtiene de la gráfica de $y = \text{sen } x$ realizando una compresión o un alargamiento horizontal adecuado. Esta compresión horizontal remplaza el intervalo $[0, 2\pi]$, el cual contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen } x$, por el intervalo $[0, 2\pi/\omega]$, el cual contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen } \omega x$. Así, el periodo de las funciones $y = \text{sen } \omega x$ y $y = \cos \omega x$, $\omega > 0$ es $2\pi/\omega$. *Véase* la figura 13.

FIGURA 13



Si $\omega < 0$ en $y = \text{sen } \omega x$ o $y = \cos \omega x$, utilizamos los hechos de que

$$\text{sen } \omega x = -\text{sen}(-\omega x) \quad \text{y} \quad \cos \omega x = \cos(-\omega x)$$

para obtener una forma equivalente en donde el coeficiente de x es positivo.

Si $\omega > 0$, la amplitud y el periodo de $y = A \text{ sen } \omega x$ y $y = A \cos \omega x$ están dados por

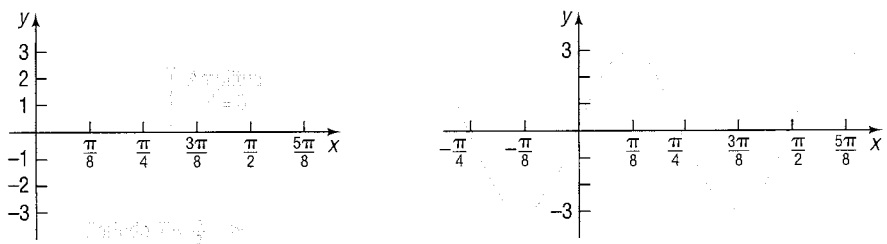
$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1}$$

Determinación de la amplitud y el periodo

Determinar la amplitud y el periodo de $y = 3 \text{ sen } 4x$ y hacer la gráfica de la función.

Al comparar $y = 3 \text{ sen } 4x$ con $y = A \text{ sen } \omega x$, vemos que $A = 3$ y $\omega = 4$. Así, por la ecuación (1), la amplitud es $|A| = 3$ y el periodo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4 = \pi/2$. Podemos utilizar esta información para hacer la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 4x$, comenzando como nos muestra la figura 14(a). Observe que utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, y el periodo para establecer la escala del eje x. (Esto produce por lo general una escala diferente para cada eje.) Ahora completemos la gráfica de la función seno. *Véase* la figura 14(b).

FIGURA 14



(a) **(b)** $y = 3 \text{ sen } 4x$

haga la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 4x$ y compare el resultado con la figura 14(b).

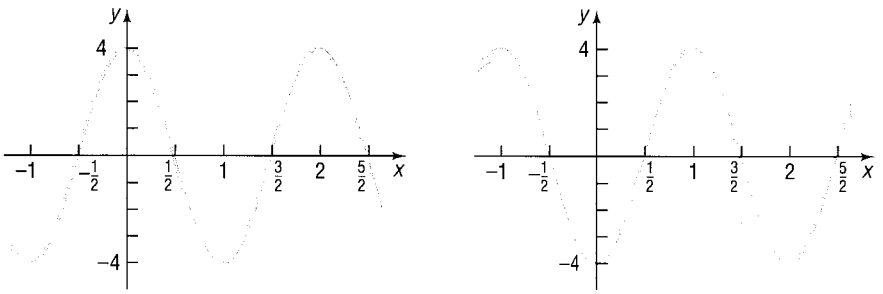
Ahora resuelva el problema 5.

EJEMPLO 2 *Determinación de la amplitud y el periodo de una función senoidal*

Determinar la amplitud y el periodo de $y = -4 \cos \pi x$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = -4 \cos \pi x$ con $y = A \cos \omega x$, vemos que $A = -4$ y $\omega = \pi$. Así, la amplitud es $|A| = |-4| = 4$ y el periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2$. Utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, y el periodo para establecer la escala del eje x; después completamos la gráfica de la función coseno y obtenemos la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$ que aparece en la figura 15(a). Ahora, como queremos obtener la gráfica de $y = -4 \cos \pi x$, reflejamos la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$ con respecto al eje x, como nos muestra la figura 15(b).

FIGURA 15



(a) $y = 4 \cos \pi x$ **(b)** $y = -4 \cos \pi x$

haga la gráfica de $y = -4 \cos \pi x$ y compare el resultado con la figura 15(b).

EJEMPLO 3 *Determinación de la amplitud y el periodo de una función senoidal*

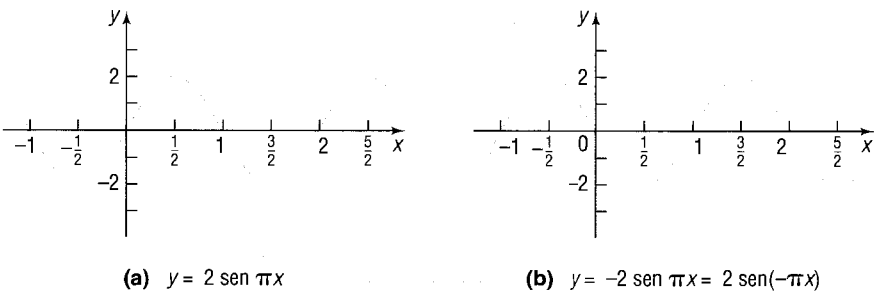
Determinar la amplitud y el periodo de $y = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$ y hacer la gráfica de la función.

Como la función seno es impar, utilizamos la forma equivalente

$$y = -2 \operatorname{sen} \pi x$$

Al comparar $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$ con $y = A \operatorname{sen} \omega x$, vemos que $A = -2$ y $\omega = \pi$. Así, la amplitud es $|A| = 2$ y el periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2$. De nuevo, utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, el periodo para establecer la escala del eje x, y después completamos la gráfica de la función seno. La figura 16(a) muestra la gráfica resultante de $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$. Para obtener la gráfica de $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$, reflejamos la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$ respecto del eje x, como muestra la figura 16(b).

FIGURA 16



(a) $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$ **(b)** $y = -2 \operatorname{sen} \pi x = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$

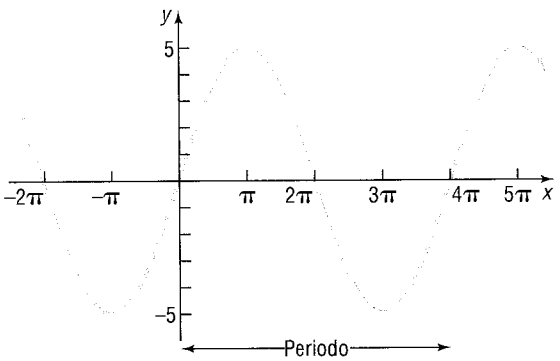
Verificación: haga la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$ y compare el resultado con la figura 16(b).

También podemos utilizar las ideas de amplitud y periodo para identificar una función senoidal cuando está especificada su gráfica.

EJEMPLO 4 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 17.

FIGURA 17



Solución Podemos ver esta gráfica como la de una función seno, con amplitud $A = 5$.* Observamos que el periodo T es 4π. Así, por la ecuación (1),

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

Una función seno cuya gráfica está dada por la figura 17 es

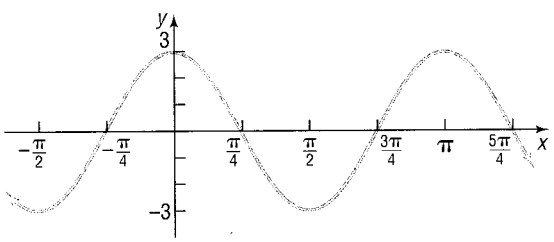
$$y = A \operatorname{sen} \omega x = 5 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

Verificación: haga la gráfica de $y = 5 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ y compare el resultado con la figura 17.

EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 18.

FIGURA 18



*La ecuación también se puede ver como una función coseno con un corrimiento horizontal, pero es más sencillo verla como una función seno.

Solución Esta gráfica permite concluir que es más sencillo ver la ecuación como una función coseno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = \pi$. Así, $2\pi/\omega = \pi$, de modo que $\omega = 2$. Una función coseno cuya gráfica está dada por la figura 18 es

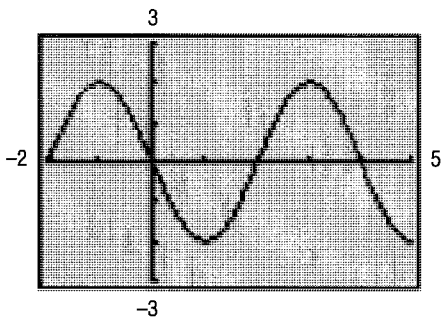
$$y = A \cos \omega x = 3 \cos 2x$$

Verificación: haga la gráfica de $y = 3 \cos 2x$ y compare el resultado con la figura 18. ▩

EJEMPLO 6 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 19.

FIGURA 19



Solución La gráfica es senoidal, con amplitud $A = 2$. El periodo es 4, de modo que $2\pi/\omega = 4$ o $\omega = \pi/2$. Como la gráfica pasa por el origen es más sencillo ver la ecuación como una función seno, pero observe que, en realidad, la gráfica es la reflexión de una función seno con respecto al eje x (ya que la gráfica es decreciente cerca del origen). Así, tenemos

$$y = -A \text{ sen } \omega x = -2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x, \qquad A > 0$$

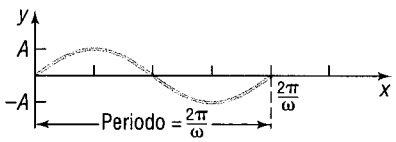
Verificación: haga la gráfica de $y = -2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x$ y compare el resultado con la figura 19. ▩

▩ Ahora resuelva el problema 31.

Desfasamiento

Hemos visto que la gráfica de $y = A \text{ sen } \omega x$, $\omega > 0$, tiene amplitud $|A|$ y periodo $T = 2\pi/\omega$. Así, un periodo se puede obtener al variar x de 0 a $2\pi/\omega$ o, en forma equivalente, cuando ωx varía de 0 a 2π. *Véase* la figura 20.

FIGURA 20
Un periodo de $y = A \text{ sen } \omega x$, $A > 0$, $\omega > 0$



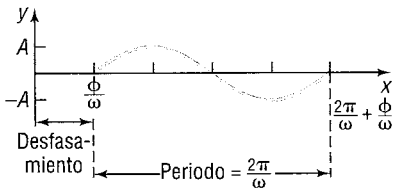
Ahora analizaremos la gráfica de

$$y = A \text{ sen}(\omega x - \phi)$$

donde $\omega > 0$ y ϕ (la letra griega *phi*) son números reales. La gráfica será una curva seno de amplitud $|A|$. Como $\omega x - \phi$ varíe de 0 a 2π obtendremos un periodo. Este periodo comienza cuando

$$\omega x - \phi = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{\phi}{\omega}$$

FIGURA 21
Un periodo de $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, $\phi > 0$



y termina cuando

$$\omega x - \phi = 2\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega}$$

Véase la figura 21.

Así, vemos que la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$ es igual a la gráfica de $y = A \operatorname{sen} \omega x$, excepto que ha sido recorrida ϕ/ω unidades (a la derecha si $\phi > 0$ y a la izquierda si $\phi < 0$). El número ϕ/ω es el **desfasamiento de la gráfica** de $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$.

Para las gráficas de $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$ o $y = A \cos(\omega x - \phi)$, $\omega > 0$,

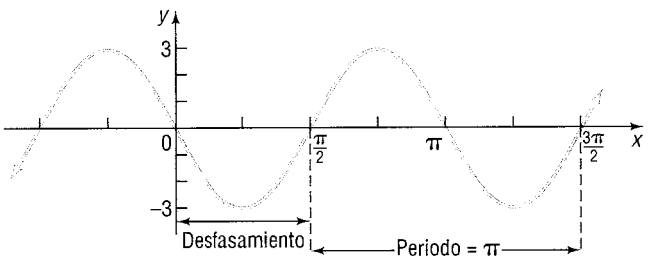
$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Desfasamiento} = \frac{\phi}{\omega}$$

EJEMPLO 7 *Determinación de la amplitud, el periodo y el desfasamiento de una función senoidal*

Determinar la amplitud, el periodo y el desfasamiento de $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi)$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi)$ con $y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$, vemos que $A = 3$, $\omega = 2$, y $\phi = \pi$. La gráfica es una curva seno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$. Un periodo de la curva seno comienza en $2x - \pi = 0$ o $x = \pi/2$ (este es el desfasamiento) y termina en $2x - \pi = 2\pi$ o $x = 3\pi/2$. *Véase* la figura 22.

FIGURA 22
$y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi)$



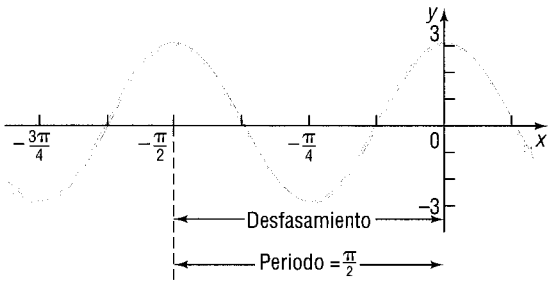
Verificación: haga la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi)$ y compare el resultado con la figura 22. ∎

EJEMPLO 8 *Determinación de la amplitud, el periodo y el desfasamiento de una función senoidal*

Determinar la amplitud, el periodo y el desfasamiento de $y = 3 \cos(4x + 2\pi)$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = 3 \cos(4x + 2\pi)$ con $y = A \cos(\omega x - \phi)$, vemos que $A = 3$, $\omega = 4$, y $\phi = -2\pi$. La gráfica es una curva coseno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4 = \pi/2$. Un periodo de la curva coseno comienza en $4x + 2\pi = 0$ o $x = -\pi/2$ (el desfasamiento) y termina en $4x + 2\pi = 2\pi$ o $x = 0$. *Véase* la figura 23.

FIGURA 23
$y = 3\cos(4x + 2\pi)$



Verificación: haga la gráfica de $y = 3\cos(4x+2\pi)$ y compare el resultado con la figura 23.

Ahora resuelva el problema 45.

Ejercicio 6.2

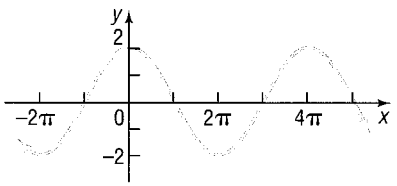
En los problemas del 1 al 10 determine la amplitud y el periodo de cada función sin hacer la gráfica.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x$ **2.** $y = 3\cos x$ **3.** $y = -4\cos 2x$ **4.** $y = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$

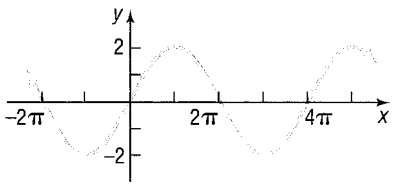
5. $y = 6 \operatorname{sen} \pi x$ **6.** $y = -3\cos 3x$ **7.** $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}x$ **8.** $y = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x$

9. $y = \frac{5}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$ **10.** $y = \frac{9}{5}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}x\right)$

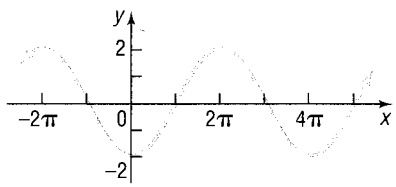
En los problemas del 11 al 20 relacione la función dada con alguna de las gráficas de la (A) a la (J).



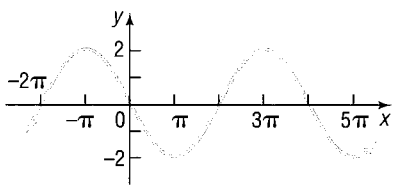
(A)



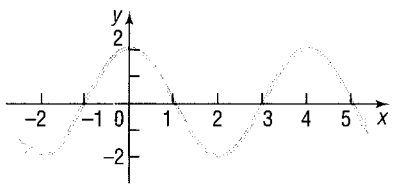
(B)



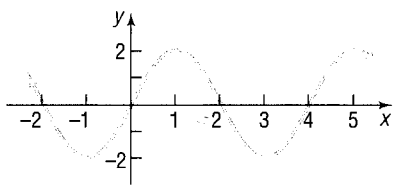
(C)



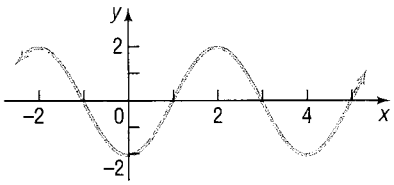
(D)



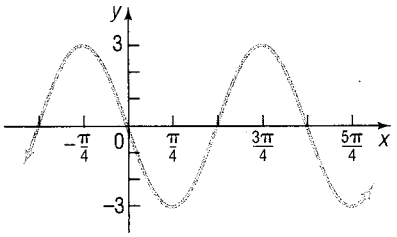
(E)



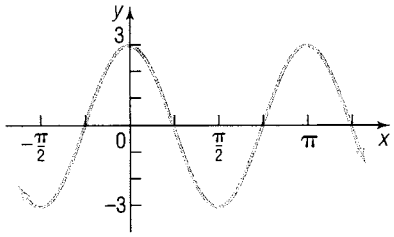
(F)



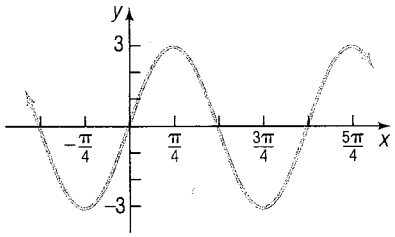
(G)



(H)



(I)



(J)

11. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$ **12.** $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$ **13.** $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$

14. $y = 3 \cos 2x$ **15.** $y = -3 \operatorname{sen} 2x$ **16.** $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

17. $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$ **18.** $y = -2 \cos \frac{\pi}{2}x$ **19.** $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

20. $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

En los problemas del 21 al 30 Haga la gráfica de cada función.

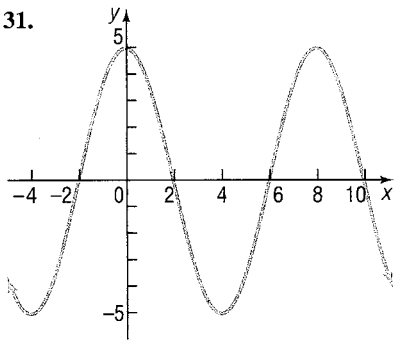
21. $y = 5 \operatorname{sen} 4x$ **22.** $y = 4 \cos 6x$ **23.** $y = 5 \cos \pi x$ **24.** $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$

25. $y = -2 \cos 2\pi x$ **26.** $y = -5 \cos 2\pi x$ **27.** $y = -4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ **28.** $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$

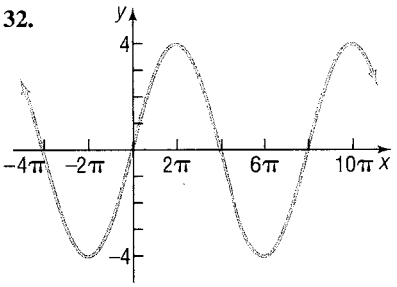
29. $y = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(-\frac{2}{3}x)$ **30.** $y = \frac{4}{3} \cos(-\frac{1}{3}x)$

En los problemas del 31 al 44 determine la función cuya gráfica está dada.

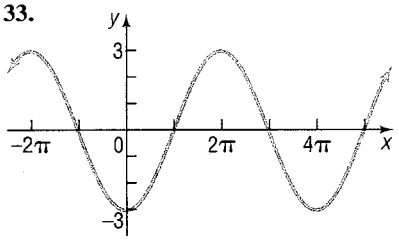
31.



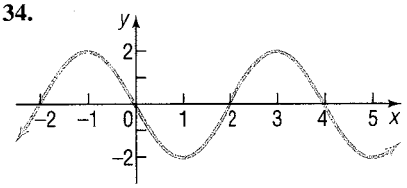
32.



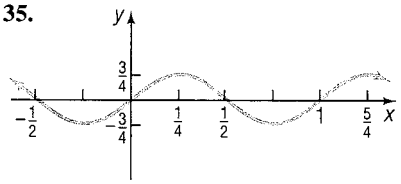
33.



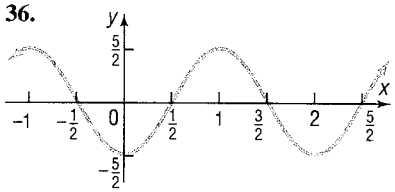
34.



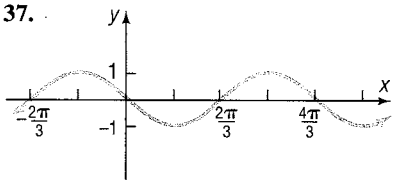
35.



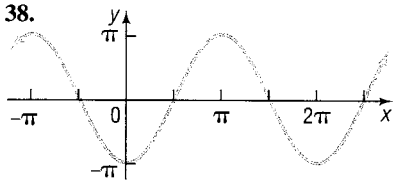
36.



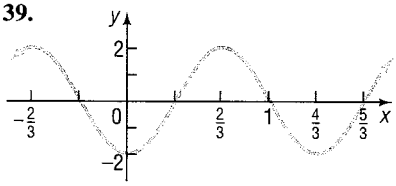
37.



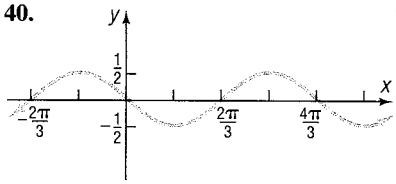
38.



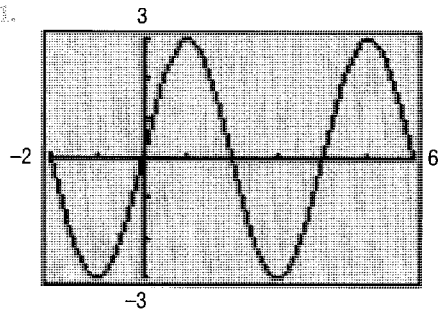
39.



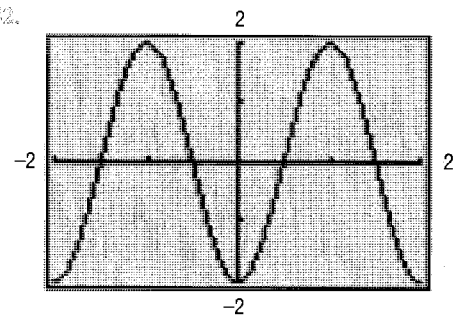
40.



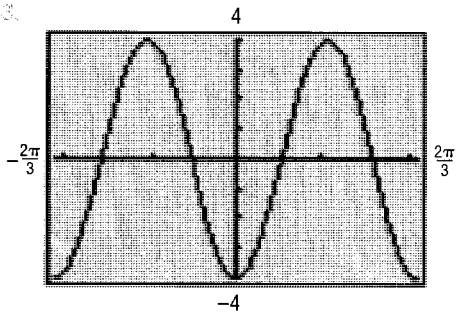
41.



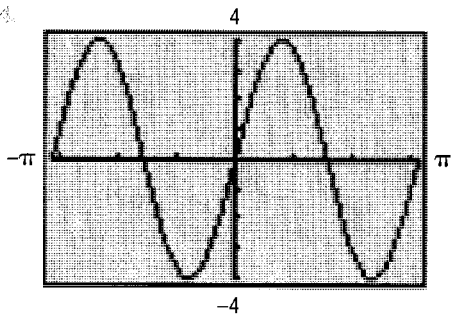
42.



43.



44.



En los problemas del 45 al 52 determine la amplitud, el periodo y el desfasamiento de cada función. Haga la gráfica de un periodo.

45. $y = 4\ \text{sen}(2x - \pi)$

46. $y = 3\ \text{sen}(3x - \pi)$

47. $y = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

48. $y = 3\cos(2x + \pi)$

49. $y = -3\ \text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

50. $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

51. $y = 4 \operatorname{sen}(\pi x + 2)$ **52.** $y = 2 \cos(2\pi x + 4)$ **53.** $y = 3 \cos(\pi x - 2)$

54. $y = 2 \cos(2\pi x - 4)$ **55.** $y = 3 \operatorname{sen}\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **56.** $y = 3 \cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$

57. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220 \operatorname{sen} 60\pi t, \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

58. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 120 \operatorname{sen} 30\pi t, \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

59. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 120 \operatorname{sen}\left(30\pi t - \frac{\pi}{3}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

60. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220 \operatorname{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

61. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es

$$V = 220 \operatorname{sen} 120\pi t$$

(a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
(b) Haga la gráfica de dos periodos de V, comenzando en $t = 0$.
(c) Si existe una resistencia de $R = 10$ ohms, ¿cuál es la corriente? [*Sugerencia:* utilice la ley de Ohm, $V = IR$.]
(d) ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la corriente I?
(e) Haga la gráfica de dos periodos de I, comenzando en $t = 0$.

62. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es

$$V = 120 \operatorname{sen} 120\pi t$$

(a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
(b) Haga la gráfica de dos periodos de V, comenzando en $t = 0$.
(c) Si existe una resistencia de $R = 20$ ohms, ¿cuál es la corriente? [*Sugerencia:* utilice la ley de Ohm, $V = IR$.]
(d) ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la corriente I?
(e) Haga la gráfica de dos periodos de I, comenzando en $t = 0$.

63. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es senoidal. Como función del tiempo, el voltaje V es

$$V = V_0 \operatorname{sen} 2\pi f t$$

donde f es la **frecuencia,** [número de oscilaciones completas (ciclos) por segundo]. [En Estados Unidos y Canadá f es 60 hertzios (Hz).] La **potencia** P dada a una resistencia R en cualquier instante t se define como

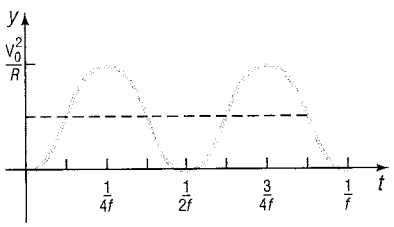
$$P = \frac{V^2}{R}$$

(a) Muestre que $P = \frac{V_0^2}{R} \operatorname{sen}^2 2\pi f t$.

(b) La gráfica de P aparece en la figura anexa. Exprese P como una función senoidal.

(c) Deduzca que

$$\operatorname{sen}^2 2\pi f t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi f t)$$



Potencia en un generador de corriente alterna

64. *Biorritmos* En la teoría de biorritmos, una función seno de la forma

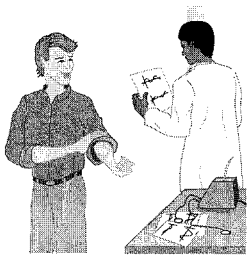
$$P = 100 \text{ sen } \omega t$$

sirve para medir el porcentaje P del potencial de una persona en el instante t, donde t se mide en días y $t = 0$ corresponde al nacimiento de la persona. Por lo general, se miden tres características:

Potencial físico: periodo de 23 días

Potencial emocional: periodo de 28 días

Potencial intelectual: periodo de 33 días



(a) Determine ω para cada característica.

(b) Haga la gráfica de las tres funciones.

(c) ¿Existe un instante t en el que las tres características tengan un potencial del 100%? ¿Cuándo ocurre?

(d) Suponga que usted tiene 20 años el día de hoy ($t = 7\,305$ días). Describa su potencial físico, emocional e intelectual para los próximos 30 días.

65. Explique cómo utilizar la amplitud y el periodo de una gráfica senoidal para establecer la escala en cada eje de coordenadas.

66. Determine una aplicación, relacionada con su campo de interés, que conduzca a una gráfica senoidal. Escriba un ensayo sobre sus hallazgos.

Aplicaciones

Combinación de ondas; amplificación y amortiguamiento; graficación de sumas y productos

Muchas aplicaciones físicas y biológicas requieren utilizar gráficas de sumas y productos de funciones, tales como

$$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x \quad \text{y} \quad g(x) = e^x \text{ sen } x$$

Por ejemplo, al emitir dos tonos, el sonido resultante es la suma de las ondas producidas por los dos tonos. Remítase al problema 29 para una explicación del funcionamiento de los teléfonos por tono.

Para hacer la gráfica de la suma de dos (o más) funciones, podemos utilizar el método de suma de ordenadas descrito a continuación.

EJEMPLO 1 *Graficación de la suma de dos funciones*

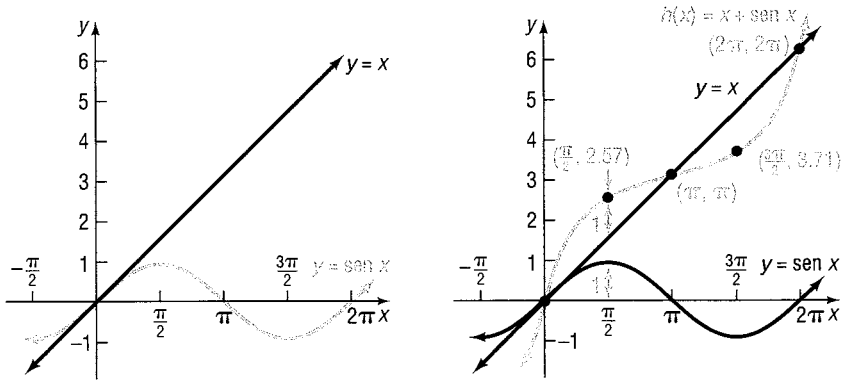
Utilizar el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de $h(x) = x + \text{sen } x$.

Solución Primero hacemos la gráfica de las funciones componentes,

$$y = h_1(x) = x \qquad y = h_2(x) = \text{sen } x$$

en el mismo sistema de coordenadas. *Véase* la figura 24(a). Luego elegimos diversos valores de x, digamos, $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$, $x = 3\pi/2$, y $x = 2\pi$, donde calculamos $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$. La tabla 3 muestra el cálculo. Localizamos estos puntos y los unimos para obtener la gráfica, como muestra la figura 24(b).

FIGURA 24



(a) (b)

TABLA 3

x	**0**	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = h_1(x) = x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = h_2(x) = \text{sen } x$	0	1	0	-1	0
$h(x) = x + \text{sen } x$	0	$\pi/2 + 1 \approx 2.57$	π	$3\pi/2 - 1 \approx 3.71$	2π
PUNTO EN LA GRÁFICA DE h	(0, 0)	$(\pi/2, 2.57)$	(π, π)	$(3\pi/2, 3.71)$	$(2\pi, 2\pi)$

En el ejemplo 1, observamos que la gráfica de $h(x) = x+\text{sen } x$ corta a la recta $y = x$ cuando sen $x = 0$. Vemos también que la gráfica de h no es periódica.

Verificación: haga la gráfica de $y = x+\text{sen } x$ y compare el resultado con la figura 24(b). Utilice TRACE para verificar que las gráficas se cortan cuando sen $x = 0$.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica periódica de la suma de dos funciones.

EJEMPLO 2 *Graficación de la suma de dos funciones senoidales*

Utilizar el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de

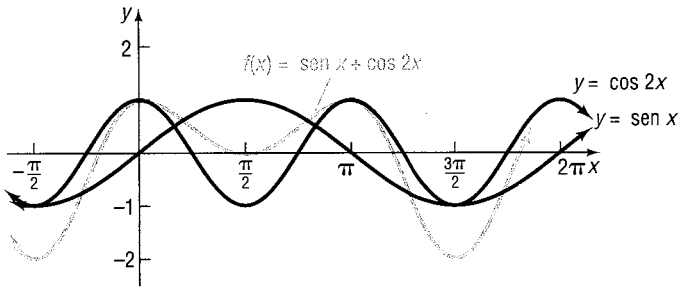
$$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$$

Solución La tabla 4 muestra los pasos para calcular varios puntos en la gráfica de f. La figura 25 muestra las gráficas de las funciones componentes, $y = f_1(x) = \text{sen } x$ y $y = f_2(x) = \cos 2x$ y la gráfica de $f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$, que aparece en color.

TABLA 4

x	$-\pi/2$	**0**	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = f_1(x) = \text{sen } x$	-1	0	1	0	-1	0
$y = f_2(x) = \cos 2x$	-1	1	-1	1	-1	1
$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$	-2	1	0	1	-2	1
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	$(-\pi/2, -2)$	(0, 1)	$(\pi/2, 0)$	$(\pi, 1)$	$(3\pi/2, -2)$	$(2\pi, 1)$

FIGURA 25
$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$



Verificación: haga la gráfica de $y = \text{sen } x + \cos 2x$ y compare el resultado con la figura 25.

Si debemos hacer la gráfica de una función f que sea la diferencia de dos funciones g y h, es decir,

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

podemos ver f como

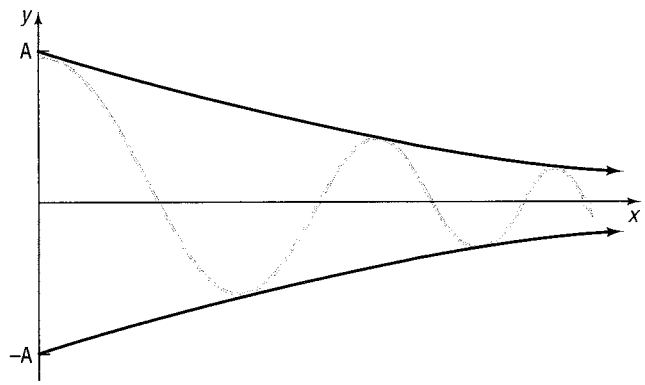
$$f(x) = g(x) + [-h(x)]$$

y utilizar el método de suma de ordenadas ya descrito.

Ahora resuelva el problema 1.

La amplitud de cualquier resorte o péndulo oscilante real disminuye con el tiempo debido a la resistencia del aire, la fricción, etc. *Véase* la figura 26. La gráfica de tales fenómenos está dada generalmente por el producto de dos funciones.

FIGURA 26



EJEMPLO 3 *Graficación del producto de dos funciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = x \text{ sen } x$.

Solución En este caso, f es el producto de $y = x$ y $y = \text{sen } x$. Utilizamos las propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\text{sen } x| \leq 1$ para obtener

$$|f(x)| = |x \text{ sen } x| = |x| \ |\text{sen } x| \leq |x|$$

Si $x \geq 0$, esto se reduce a

$$|f(x)| \leq x \quad \text{o} \quad -x \leq f(x) \leq x, \qquad x > 0$$

Si x $<$ 0, tenemos que

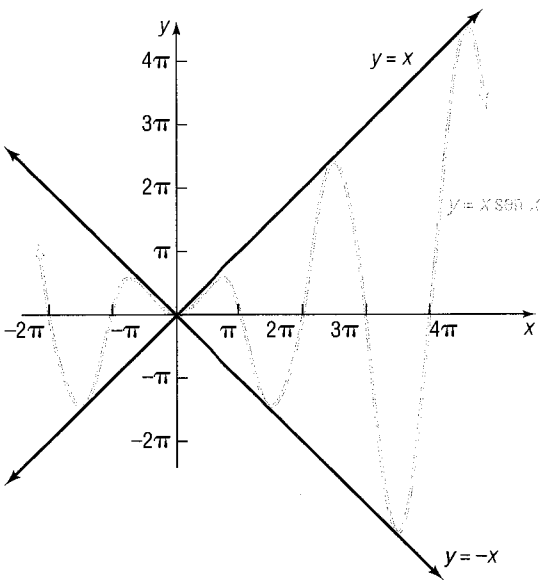
$$|f(x)| \leq -x \quad \text{o} \quad x \leq f(x) \leq -x, \qquad x < 0$$

Así, en cualquier caso, la gráfica de f estará entre las rectas $y = x$ y $y = -x$. Además, concluimos que la gráfica de f tocará esas rectas cuando sen $x = \pm 1$, es decir, cuando $x = -\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, etcétera. Como $y = f(x) = x$ sen $x = 0$ cuando $x = -\pi$, 0, π, 2π, etc., conocemos la posición de las intersecciones-x y la gráfica de f. Por último, la función f es una función par [$f(-x) = -x$ sen$(-x) = x$ sen $x = f(x)$], de modo que la gráfica es simétrica con respecto al eje y. *Véase* la tabla 5. La figura 27 nos muestra la gráfica.

TABLA 5

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y =$ sen x	0	1	0	-1	0
$y = f(x) = x$ sen x	0	$\pi/2$	0	$-3\pi/2$	0
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	(0, 0)	$(\pi/2, \pi/2)$	$(\pi, 0)$	$(3\pi/2, -3\pi/2)$	$(2\pi, 0)$

FIGURA 27
$f(x) = x$ sen x

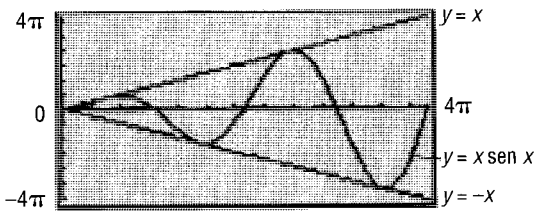


EJEMPLO 4 *Análisis de la gráfica de $y = x$ sen x*

Hacer la gráfica de $y = x$ sen x, junto con $y = x$ y $y = -x$, para $0 \leq x \leq 4\pi$. Determinar los puntos donde $y = x$ sen x toca a $y = x$. Compare esto con los puntos donde $y = x$ sen x tiene un punto de retorno (máximo local). Exprese las respuestas redondeadas a dos cifras decimales.

Solución La figura 28 muestra las gráficas de $y = x$ sen x, $y = x$, y $y = -x$. Utilizamos TRACE y BOX para ver que $y = x$ sen x toca a $y = x$ en $x = 1.57$ y $x = 7.85$. Los puntos de retorno (máximos locales) aparecen justo a la derecha de estos valores, en $x = 2.02$ y en $x = 7.97$.

FIGURA 28



Si $x \geq 0$, la gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ es una onda **seno amplificada** y x es el **factor de amplificación.** Podemos obtener otras ondas senoidales utilizando diversos factores. El siguiente ejemplo ilustra un **factor de amortiguamiento.**

EJEMPLO 5 *Graficación del producto de dos funciones*

La curva de vibración amortiguada

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \qquad x \geq 0$$

es importante para muchas aplicaciones tales como el movimiento de las cuerdas musicales, las oscilaciones de un péndulo y la corriente en un circuito eléctrico. Haga la gráfica de esta función.

Solución La función f es el producto de $y = e^{-x}$ y $y = \operatorname{sin} x$. Utilizamos las propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para ver que

$$|f(x)| = |e^{-x} \operatorname{sen} x| = |e^{-x}|\,|\operatorname{sen} x| \leq |e^{-x}| = e^{-x}$$

$e^{-x} > 0$ para toda x

Así,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

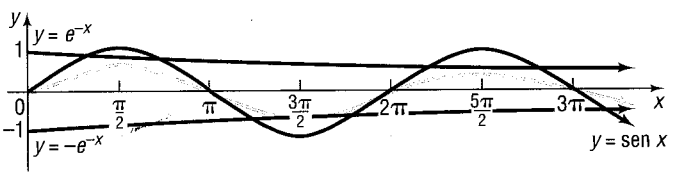
y la gráfica de f estará entre las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$. Además, la gráfica de f tocará estas gráficas cuando $|\operatorname{sen} x| = 1$, es decir, cuando $x = -\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, etc. Las intersecciones del eje x y la gráfica de f aparecen en $x = -\pi$, 0, π, 2π, etc. *Véase* la tabla 6. La figura 26 muestra la gráfica.

TABLA 6

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = e^{-x}$	1	$e^{-\pi/2}$	$e^{-\pi}$	$e^{-3\pi/2}$	$e^{-2\pi}$
$y = \operatorname{sen} x$	0	1	0	−1	0
$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$	0	$e^{-\pi/2}$	0	$-e^{-3\pi/2}$	0
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	(0, 0)	$(\pi/2, e^{-\pi/2})$	$(\pi, 0)$	$(3\pi/2, -e^{-3\pi/2})$	$(2\pi, 0)$

FIGURA 29

$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$, $x \geq 0$

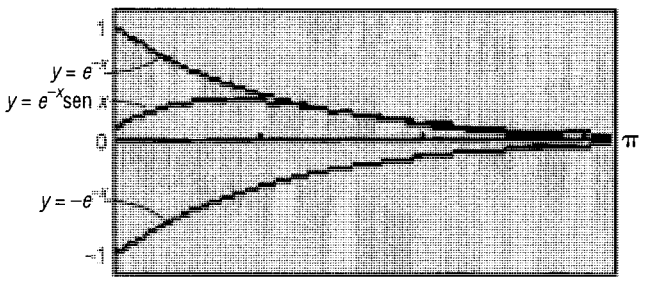


EJEMPLO 6 *Análisis de la gráfica de $y = e^{-x}$ sen x*

Hacer la gráfica de $y = e^{-x}$ sen x, junto con $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ para $0 \le x \le 3\pi$, Determinar los puntos donde $y = e^{-x}$ sen x toca $y = e^{-x}$. Compare esto con los puntos donde $y = e^{-x}$ sen x tiene un punto de retorno (máximo local). Exprese las respuestas redondeadas a dos decimales.

Solución La figura 30 muestra las gráficas de $y = e^{-x}$ sen x, $y = e^{-x}$, y $y = -e^{-x}$. Utilizamos TRACE y BOX para ver que $y = e^{-x}$ sen x toca a $y = e^{-x}$ en $x = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$. El punto de retorno (máximo local) aparece en $x = 0.78$.

FIGURA 30



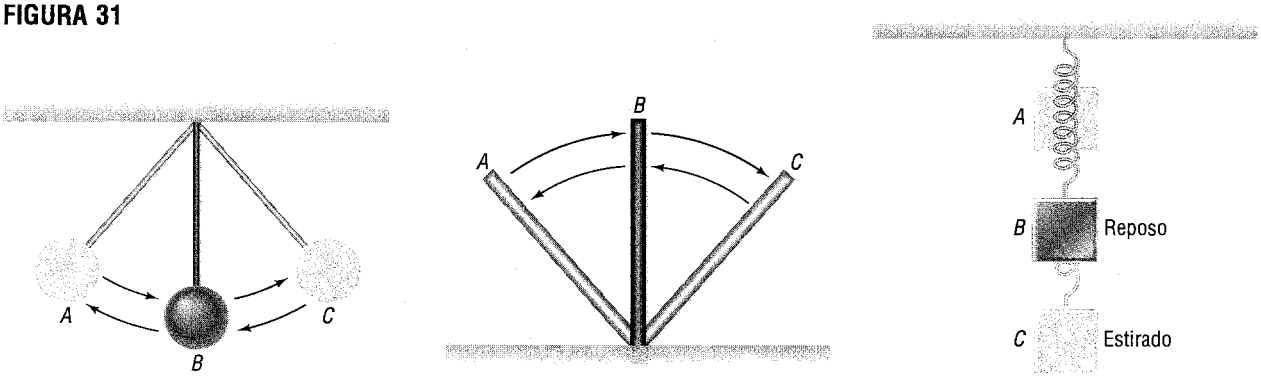
Ahora resuelva el problema 21.

Movimiento armónico simple

Existen muchos fenómenos físicos que pueden describirse mediante un movimiento armónico simple. Las ondas de radio, televisión, de la luz y el sonido, y las olas del mar exhiben un movimiento armónico simple. Incluso las temperaturas máxima y mínima anual en un lugar dado se modelan mediante una ecuación para el movimiento armónico simple.

La oscilación de un péndulo, las vibraciones de un diapasón y el bamboleo de un peso sujeto por un resorte en espiral, también son ejemplos de movimientos vibratorios. En este tipo de movimiento, un objeto oscila hacia uno y otro lados en un mismo trayecto. En cada una de las ilustraciones de la figura 31, el punto B es la **posición de equilibrio (reposo)** del objeto vibrante. La **amplitud** de la vibración es la distancia desde la posición de equilibrio del objeto hasta su punto de máximo desplazamiento (cualquiera de los puntos A o C de la figura 31). El **periodo** de un objeto vibrante es el tiempo que se tarda en completar una vibración; es decir, el tiempo que tarda en ir desde, digamos, el punto A a través de B hasta C y regresar a A.

FIGURA 31



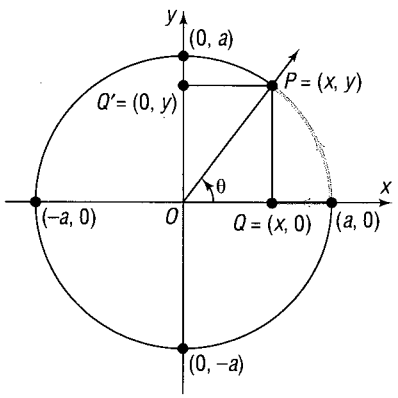
(a) Péndulo **(b)** Diapasón **(c)** Resorte

Movimiento armónico simple

El **movimiento armónico simple** es un tipo especial de movimiento de vibración en el cual la aceleración a del objeto es directamente proporcional al negativo de su desplazamiento d desde su posición de reposo. Es decir, $a = -kd$, $k > 0$.

Por ejemplo, cuando la masa que cuelga del resorte de la figura 31(c) es jalada hacia abajo desde su posición de equilibrio B hasta el punto C, la fuerza del resorte intenta regresar la masa hasta su posición de equilibrio. Si no existe fuerza de fricción* que retarde el movimiento, la amplitud será constante. La fuerza aumenta en proporción directa con la distancia hasta donde la masa es jalada desde su posición de equilibrio. Como la fuerza crece en forma directa, la aceleración de la masa ha de comportarse de la misma forma, debido a que (por la segunda ley del movimiento de Newton) la fuerza es directamente proporcional a la aceleración. Así, la aceleración del objeto varía en forma directa con su desplazamiento, y este fenómeno es un ejemplo de movimiento armónico simple.

FIGURA 32



El movimiento armónico simple se relaciona con el movimiento circular. Para apreciar esta relación consideremos un círculo de radio a con centro en (0,0). *Véase* la figura 32. Supongamos que un objeto colocado inicialmente en $(a,0)$ se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en torno al círculo, con una velocidad angular constante ω. Supongamos además que, después de transcurrir un tiempo t, el objeto se encuentra en el punto $P = (x, y)$ del círculo. El ángulo θ en radianes, abarcado por la raya $\overrightarrow{OP}$ en este tiempo t es

$$\theta = \omega t$$

Las coordenadas del punto P en el instante t son

$$x = a \cos \theta = a \cos \omega t$$
$$y = a \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} \omega t$$

A cada posición $P = (x, y)$ del objeto que se mueve sobre el círculo, le corresponde el punto $Q = (x, 0)$, llamado **proyección de P sobre el eje x.** Cuando P se mueve en el círculo con velocidad constante, el punto Q se mueve de un lado a otro, entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, a lo largo del eje x, con un movimiento que es armónico simple. De manera análoga, para cada punto P existe un punto $Q' = (0, y)$, la proyección de P sobre el eje y. Cuando P se mueve en el círculo con velocidad constante, el punto Q' se mueve de un lado a otro, entre los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$, a lo largo del eje y, con un movimiento que es armónico simple. Así, podemos describir el movimiento armónico simple como la proyección de un movimiento circular constante en un eje de coordenadas.

Teorema movimiento armónico simple

Un objeto que se mueve en un eje de coordenadas de modo que su distancia d al origen en el instante t está dada por

$$d = a \cos \omega t \quad \text{o} \quad d = a \operatorname{sen} \omega t$$

donde a y ω son constantes, obedece a un movimiento armónico simple. El movimiento tiene amplitud $|a|$ y periodo $2\pi/\omega$.

La **frecuencia** f de un objeto en movimiento armónico simple es el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Como el periodo es el tiempo necesario para una oscilación, esto implica que la frecuencia es el recíproco del periodo; es decir,

*Si existe fricción, la amplitud disminuye hasta cero al paso del tiempo. Este tipo de movimiento es un ejemplo de movimiento amortiguado.

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

EJEMPLO 7 *Determinación de una ecuación para un objeto en movimiento armónico simple*

Suponga que el objeto sujeto al resorte en espiral de la figura 31(c) es jalado hacia abajo hasta una distancia de 5 pulgadas desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el tiempo para una oscilación es de 3 segundos, escriba una ecuación que relacione la distancia d del objeto desde su posición de equilibrio con el tiempo t (en segundos). Suponga que no existe fricción.

Solución El movimiento del objeto es armónico simple. Como el objeto se libera en el instante $t = 0$ cuando su distancia d a la posición de equilibrio es de 5 pulgadas, es más sencillo utilizar la ecuación

$$d = a \cos \omega t$$

para describir el movimiento. (¿Advierte usted por qué? Para esta ecuación, cuando $t = 0$, entonces $d = a = 5$.) Ahora, la amplitud es 5 y el periodo 3. Así,

$$a = 5 \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\omega} = \text{Periodo} = 3 \quad \text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{3}$$

Una ecuación para el movimiento del objeto es

$$d = 5 \cos \frac{2\pi}{3} t$$

Nota: En la solución del ejemplo 7 hacemos a = 5, lo cual nos indica que la dirección positiva del movimiento es hacia abajo. Si queremos que la dirección positiva sea hacia arriba, podemos hacer a = –5.

Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 8 *Análisis del movimiento de un objeto*

Suponga que la distancia x (en metros) que un objeto recorre en un tiempo t (en segundos) satisface la ecuación

$$x = 10 \operatorname{sen} 5t$$

(a) Describa el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde su posición de equilibrio?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?

(d) ¿Cuál es la frecuencia?

Solución Observe que la ecuación dada es de la forma

$$d = a \operatorname{sen} \omega t \qquad d = 10 \operatorname{sen} 5t$$

donde $a = 10$ y $\omega = 5$.

(a) El movimiento es armónico simple.

(b) El máximo desplazamiento del objeto con respecto de su posición de equilibrio es la amplitud: a = 10 metros.

(c) El tiempo necesario para una oscilación es el periodo:

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ segundos}$$

(d) La frecuencia es el recíproco del periodo. Así,

$$\text{Frecuencia} = f = \frac{5}{2\pi} \text{ oscilaciones por segundo.}$$

Ahora resuelva el problema 41.

Ejercicio 6.3

En los problemas del 1 al 20 utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función.

1. $f(x) = x + \cos x$
2. $f(x) = x + \cos 2x$
3. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$
4. $f(x) = x - \cos x$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
6. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos x$
7. $g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
8. $g(x) = \cos 2x + \cos x$
9. $h(x) = \sqrt{x} + \operatorname{sen} x$
10. $h(x) = \sqrt{x} + \cos x$
11. $F(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x$
12. $F(x) = 2 \cos 2x - \operatorname{sen} x$
13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x$
14. $f(x) = 2 \cos \frac{\pi}{2}x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$
15. $f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} + \operatorname{sen} 2x$
16. $f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} - \cos 2x$
17. $f(x) = |x| + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$
18. $f(x) = |x| + \cos \pi x$
19. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 3x$
20. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 3 \cos 2x$

En los problemas del 21 al 28 haga la gráfica de cada función.

21. $f(x) = x \cos x$
22. $f(x) = x \operatorname{sen} 2x$
23. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
24. $f(x) = x^2 \cos x$
25. $f(x) = |x| \cos x$
26. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$
27. $f(x) = e^{-x} \cos 2x,\ x \geq 0$
28. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 2x,\ x \geq 0$

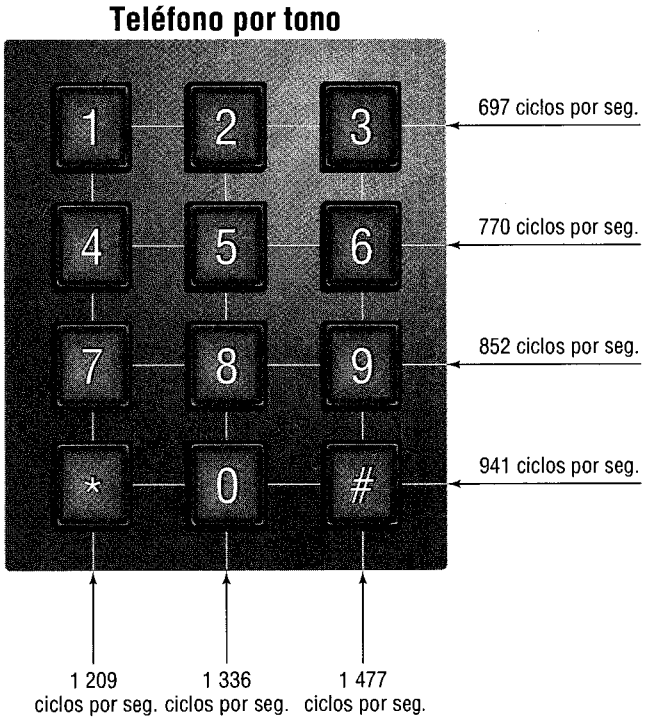
29. *Teléfonos por tono.* En un teléfono por tono cada botón produce un sonido único. Ese sonido es la suma de dos tonos y está dada por

$$y = \operatorname{sin} 2\pi lt \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen} 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias alta y baja (ciclos por segundo) que aparecen en la figura anexa. Por ejemplo, si usted oprime 7, la frecuencia baja es $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es $h = 1.209$ ciclos por segundo. El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \operatorname{sen} 2\pi(852)t + \operatorname{sen} 2\pi(1209)t$$

Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir 7.



30. Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir la tecla asterisco (*) de un teléfono por tono. Consulte el problema 29.

31. *La curva diente de sierra.* Con frecuencia, un osciloscopio muestra una curva diente de sierra. Esta curva se puede aproximar mediante curvas senoidales de varios periodos y amplitudes.

(a) Haga la gráfica de la siguiente función, la cual se utiliza para aproximar una curva diente de sierra:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi x \qquad 0 \leq x \leq 2$$

(b) Una mejor aproximación a la curva diente de sierra está dada por

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi x + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 8\pi x$$

Haga la gráfica de esta función para $0 \leq x \leq 4$ y compare el resultado con la gráfica obtenida en la parte (a).

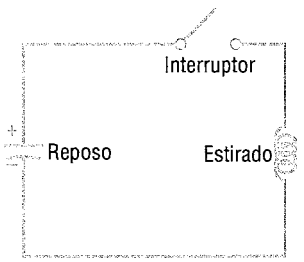
(c) Una tercera y mejor aproximación a la curva diente de sierra es

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi x + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 8\pi x + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 16\pi x$$

Haga la gráfica de esta función para $0 \le x \le 4$ y compare el resultado con las gráficas obtenidas en las partes (a) y (b).

(d) ¿Cuál piensa usted que sería la siguiente aproximación a la curva diente de sierra?

32. *Carga de un condensador* Si un condensador con carga se conecta cerrando un interruptor (*véase* la figura), la energía es transferida a la bobina y después regresa al condensador en un movimiento oscilatorio. El voltaje V (en voltios) que pasa por el condensador disminuye en forma gradual hasta 0 con el tiempo t.



(a) Haga la gráfica de la ecuación que relaciona V con t:

$$V(t) = e^{-1.9t} \cos \pi t \qquad 0 \le t \le 3$$

(b) ¿En qué instante t la gráfica de V toca la gráfica de $y = e^{-1.9t}$? ¿En qué instante V toca la gráfica de $y = -e^{-1.9t}$?

(c) Haga la gráfica de $V = V(t)$, $0 \le t \le 3$.
¿En qué instante el voltaje V estará entre –0.1 y 0.1 voltios?

Para los problemas del 33 al 36, suponga que un objeto sostenido por un resorte en espiral es jalado hacia abajo hasta una distancia a desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el movimiento es armónico simple con periodo T, escriba una ecuación que relacione la distancia d del objeto desde su posición de equilibrio después de t segundos. Suponga además que la dirección positiva del movimiento es hacia abajo.

33. $a = 5$; $T = 2$ segundos. **34.** $a = 10$; $T = 3$ segundos.

35. $a = 6$; $T = \pi$ segundos. **36.** $a = 4$; $T = \pi/2$ segundos.

37. Resuelva de nuevo el problema 33 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

38. Resuelva de nuevo el problema 34 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

39. Resuelva de nuevo el problema 35 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

40. Resuelva de nuevo el problema 36 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

En los problemas del 41 al 48 se proporciona la distancia d (en metros) recorrida por un objeto en el tiempo t (en segundos).

(a) Describa el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde su posición de equilibrio?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para una oscilación?

(d) ¿Cuál es la frecuencia?

41. $d = 5 \operatorname{sen} 3t$ **42.** $d = 4 \operatorname{sen} 2t$ **43.** $d = 6 \cos \pi t$ **44.** $d = 5 \cos \frac{\pi}{2} t$

45. $d = -3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$ **46.** $d = -2 \cos 2t$ **47.** $d = 6 + 2 \cos 2\pi t$ **48.** $d = 4 + 3 \operatorname{sen} \pi t$

49. Haga la gráfica de la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Con base en la gráfica, ¿qué podría suponerse respecto del valor de $(\operatorname{sen} x)/x$ para x cercana a cero?

50. Haga la gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$, $y = x^2 \operatorname{sen} x$, y $y = x^3 \operatorname{sen} x$ para $x > 0$. ¿Qué patrón observa?

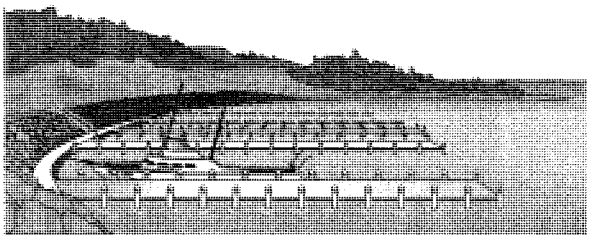
51. Gráfica $y = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x$, $y = \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen} x$, y $y = \dfrac{1}{x^3} \operatorname{sen} x$ para $x > 0$. ¿Qué patrón observa?

52. ¿Cómo explicaría a un amigo lo que es el movimiento armónico simple?

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 6

DETERMINACIÓN DE LA MAREA ALTA EN ROCK HARBOR



Su empresa consultora ha organizado unas vacaciones en Cabo Cod para todos los empleados. (Incluso en una empresa consultora se toman vacaciones.) En esas vacaciones usted planea ir a pescar a la bahía de Cabo Cod. El capitán del Madame B le indica que debe estar en el embarcadero el jueves en la mañana, durante la marea alta. Después de colgar el teléfono entre sus empleados se preguntan cuándo ocurrirá la marea alta y, en vez de llamar de nuevo al capitán, usted decide utilizar toda su capacidad para determinar la respuesta.

1. Usted sabe que el intervalo entre una marea alta y la marea baja es casi de 6 1/4 horas. Sabe también que la marea alta de hoy (lunes) ocurrió a las 3 a.m. ¿En qué momento ocurrirá la marea alta el jueves por la mañana?
2. ¿Por qué el bote de pesca deberá salir del embarcadero en la marea alta?
3. Cuando usted visitó la bahía en la marea alta observó marcas en los postes que indicaban la altura del agua. La profundidad es de 13.5 pies en la marea baja y de 15 pies en la marea alta. De pronto, usted comprende que tiene la información suficiente como para hacer un bosquejo de la gráfica de las mareas y ofrecérselo al capitán. Trace una gráfica senoidal que muestre la altura del agua en el poste, comenzando con la marea alta del lunes a las 3 a.m. y llegando hasta la marea alta del jueves por la mañana. ¿Cuántas mareas altas ocurrirán entre las 3 a.m. del lunes y las 3 a.m. del jueves?
4. ¿Cuál sería la ecuación de esta gráfica considerando la amplitud, la frecuencia y cualquier tipo de corrimiento? ¿Sería más sencillo utilizar una función seno o una coseno?
5. Las mareas alta y baja no son tan regulares como podría indicar la fórmula. ¿Cuáles factores podrían afectar la altura de las mareas?
6. Cuando el capitán regresa al embarcadero deja cierta cantidad de cable sobrante antes de asegurar el bote a los postes. ¿Por qué? ¿Qué podría ocurrir si no lo hiciera?

Las gráficas de $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$

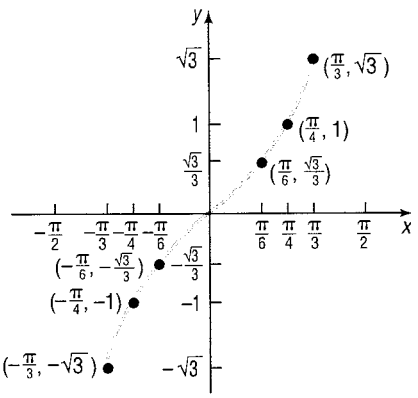
La gráfica de $y = \tan x$

Como la función tangente tiene periodo π, sólo debemos determinar la gráfica en un intervalo de longitud π. El resto de la gráfica consta de repeticiones de ese intervalo. Como la función tangente no está definida en . . . , $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, . . . , nos concentraremos en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, de longitud π y construimos la tabla 7, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Como antes, trazamos los puntos de la tabla y los unimos mediante una curva suave. *Véase* la figura 33, con una gráfica parcial de $y = \tan x$, donde $-\pi/3 \le x \le \pi/3$.

TABLA 7

x	$y = \tan x$	(x, y)
$-\pi/3$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$	$(-\pi/3, -\sqrt{3})$
$-\pi/4$	-1	$(-\pi/4, -1)$
$-\pi/6$	$-\sqrt{3}/3 \approx -0.58$	$(-\pi/6, -\sqrt{3}/3)$
0	0	(0, 0)
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.58$	$(\pi/6, \sqrt{3}/3)$
$\pi/4$	1	$(\pi/4, 1)$
$\pi/3$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$(\pi/3, \sqrt{3})$

FIGURA 33
$y = \tan x$,
$-\pi/3 \le x \le \pi/3$



Para completar la gráfica de $y = \tan x$, debemos analizar el comportamiento de la función cuando x tiende a $-\pi/2$ y $\pi/2$. Sin embargo, hay que tener cuidado pues $y = \tan x$ no está definida en estos números. Para determinar dicho comportamiento utilizamos la identidad

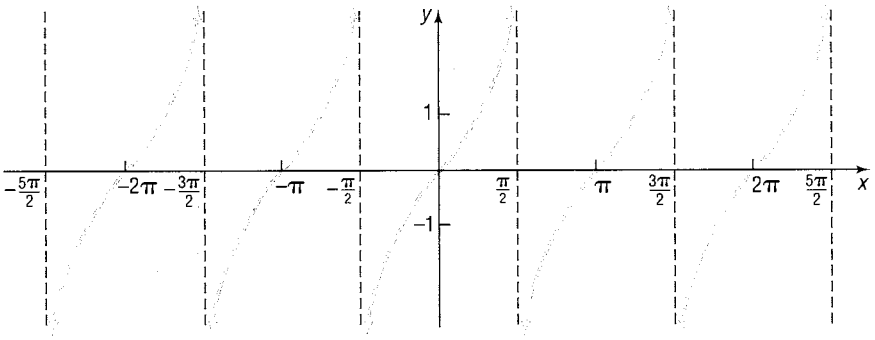
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Si x está cerca de $\pi/2$ pero sigue siendo menor, entonces sen x estará cerca de 1 y cos x será positivo y cercano a 0. (Consulte las gráficas de las funciones seno y coseno.) Por lo tanto, el cociente (sen x)/(cos x) será positivo y grande. De hecho, si x está más cercano a $\pi/2$, sen x se acerca a 1 y cos x se acerca a 0, de modo que tan x tiende a ∞. En otras palabras, la recta vertical $x = \pi/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $= \tan x$.

Si x es cercano a $-\pi/2$ pero sigue siendo menor, entonces sen x se acerca a -1 y cos x será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente (sen x)/(cos x) tiende a $-\infty$. En otras palabras, la recta vertical $x = -\pi/2$ también es una asíntota vertical de la gráfica.

Con estas observaciones podemos completar un periodo y obtener la gráfica de $y = \tan x$ repitiendo este periodo, como nos muestra la figura 34.

FIGURA 34
$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \tan x$ y compare el resultado con la figura 34. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x se acerca a $\pi/2$ pero sigue siendo menor. Asegúrese de establecer un rango adecuado.

La gráfica de $y = \tan x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función tangente:

Características de la función tangente

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$.
2. El rango consta de todos los números reales.
3. La función tangente es una función impar, como nos muestra la simetría de la gráfica con respecto al origen.
4. La función tangente es periódica, con periodo π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección-y es 0.
6. Las asíntotas verticales ocurren en $x = \ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$.

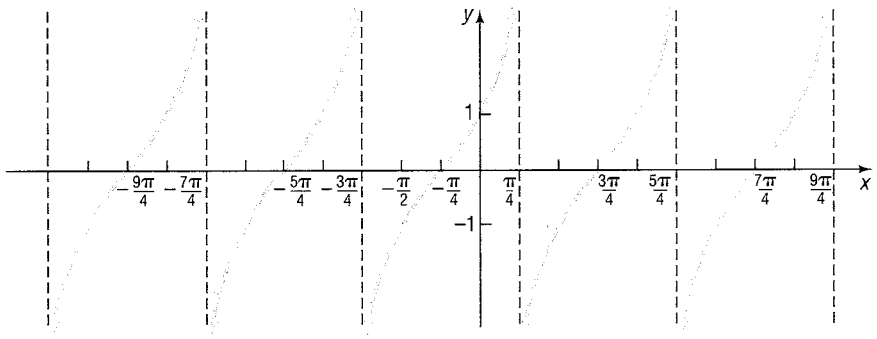
Ahora resuelva los problemas 1 y 9.

EJEMPLO 1 *Graficación de variaciones de $y = \tan x$: asíntotas verticales, reflexiones y corrimientos*

Haga la gráfica de $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución Comenzamos con la gráfica de $y = \tan x$ y la recorremos en forma horizontal a la izquierda en $\pi/4$ unidades. *Véase* la figura 35.

FIGURA 35
$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ y compare el resultado con la figura 35.

Ahora resuelva el problema 11.

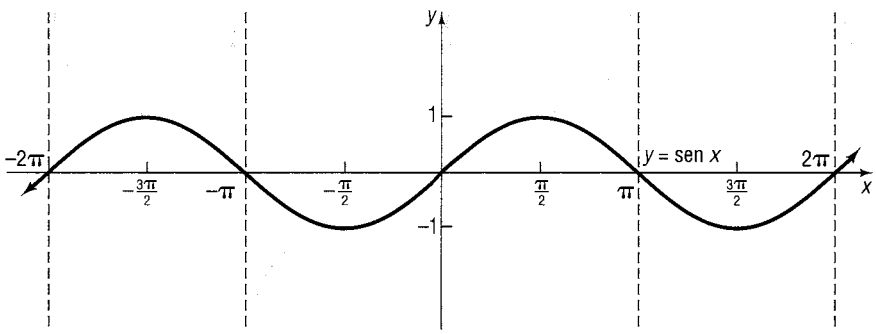
Las gráficas de $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$

Las gráficas de las funciones cosecante y secante, conocidas como **funciones recíprocas,** se hacen con la ayuda de las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por ejemplo, el valor de la función cosecante $y = \csc x$ en un número dado x es igual al recíproco del valor correspondiente de la función seno, siempre que este último valor no sea igual a 0. Si el valor de sen x es 0, entonces, en ese punto x, la función cosecante no está definida. De hecho, la gráfica de la función cosecante tiene asíntotas verticales en los múltiplos enteros de π. *Véase* la gráfica en la figura 36.

FIGURA 36
$y = \csc x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π, $|y| \geq 1$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \csc x$ y compare el resultado con la figura 36. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x es cercano a cero.

E J E M P L O 2 *Graficación de variaciones de $y = \csc x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Haga la gráfica de $y = 2\csc(x - \pi/2)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Solución La figura 37 muestra los pasos necesarios.

Verificación: Haga la gráfica de $y = 2\csc(x - \pi/2)$ y compare el resultado con la figura 37.

Podemos utilizar la idea de los recíprocos para obtener de manera análoga la gráfica de $y = \sec x$. *Véase* la figura 38.

FIGURA 37

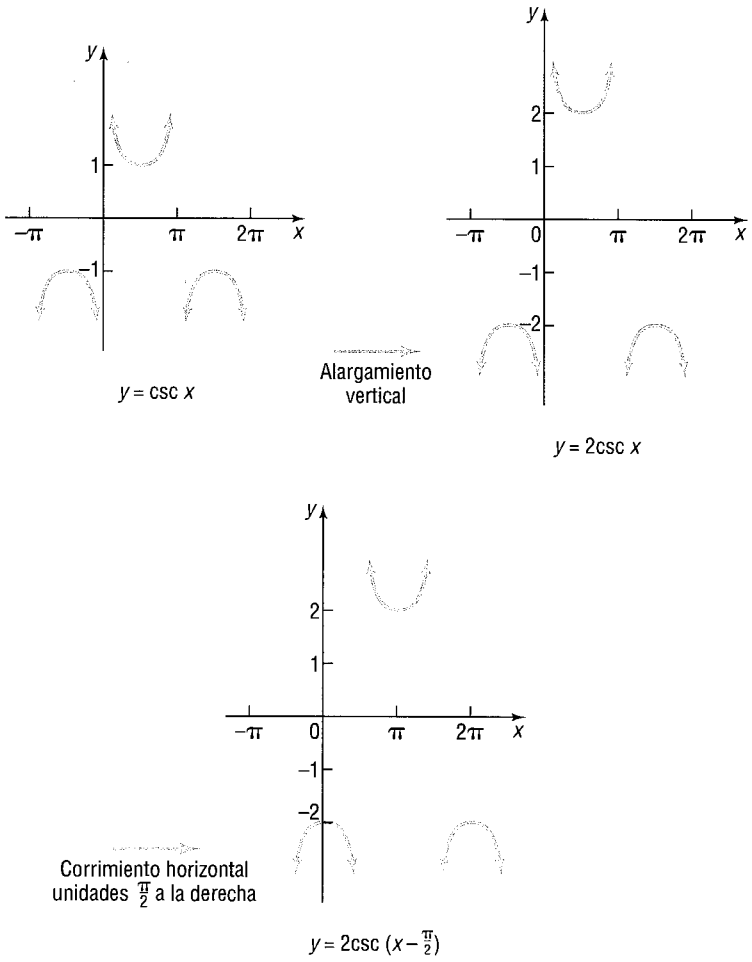


FIGURA 38

$y = \sec x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$, $|y| \geq 1$

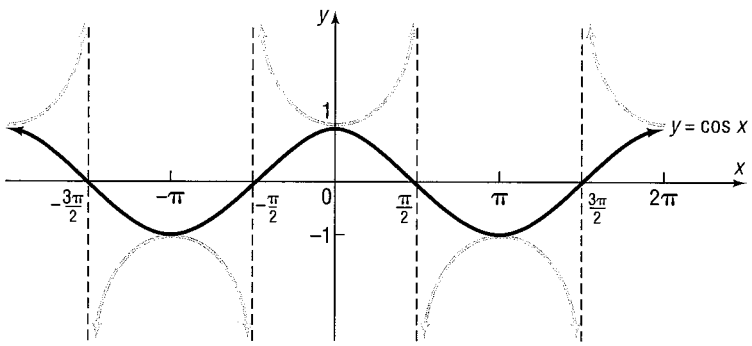


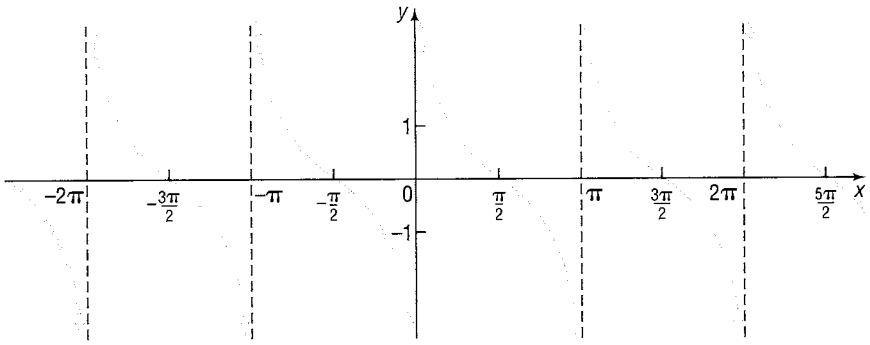
TABLA 8

x	$y = \cot x$	(x, y)
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$(\pi/6, \sqrt{3})$
$\pi/4$	1	$(\pi/4, 1)$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$	$(\pi/3, \sqrt{3}/3)$
$\pi/2$	0	$(\pi/2, 0)$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/3$	$(2\pi/3, -\sqrt{3}/3)$
$3\pi/4$	-1	$(3\pi/4, -1)$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$(5\pi/6, -\sqrt{3})$

Obtenemos la gráfica de $y = \cot x$ del mismo modo en que obtuvimos la de $y = \tan x$. El periodo de $y = \cot x$ es π. Como la función cotangente no está definida para múltiplos enteros de π, nos concentraremos en el intervalo $(0, \pi)$. La tabla 8 enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$. Cuando x tiende a 0 pero es mayor que 0, el valor de cos x será cercano a 1 y el valor de sen x será

positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente (cos x)/(sen x) será positivo y grande, de modo que cuando x tiende a 0, cot x tiende a ∞. De manera análoga, cuando x tiende a π con valores menores que π, el valor de cos x será cercano a -1 y el valor de sen x será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente (cos x)/(sen x) = cot x será negativo y tenderá a $-\infty$ cuando x tiende a π. La figura 39 muestra la gráfica.

FIGURA 39
$y = \cot x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π, $-\infty < y < \infty$



Haga la gráfica de $y = \cot x$ y compare el resultado con la figura 39. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x es cercano a cero.

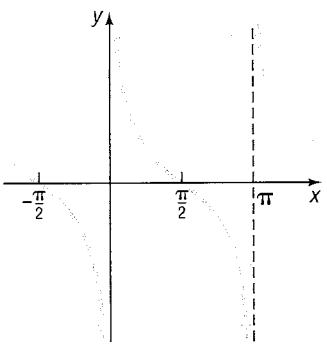
Ejercicio 6.4

1. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \tan x$?
2. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \cot x$?
3. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \sec x$?
4. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \csc x$?
5. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\sec x = 1$? ¿Qué puede usted decir en el caso de que $\sec x = -1$?
6. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\csc x = 1$? ¿Qué puede usted decir en el caso de que $\csc x = -1$?
7. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \sec x$ tiene asíntotas verticales?
8. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \csc x$ tiene asíntotas verticales?
9. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \tan x$ tiene asíntotas verticales?
10. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \cot x$ tiene asíntotas verticales?

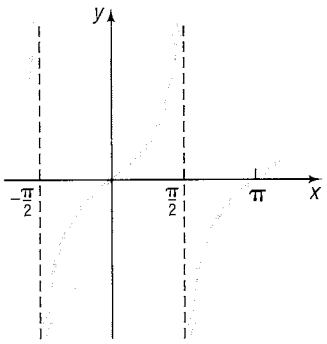
En los problemas del 11 al 14 relacione cada gráfica con una función.

A. $y = -\tan x$ B. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \tan(x + \pi)$ D. $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

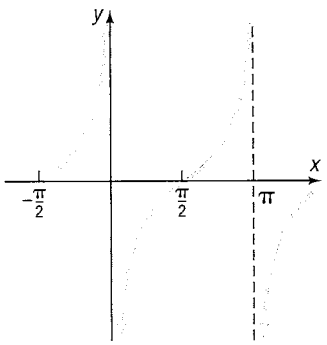
11.



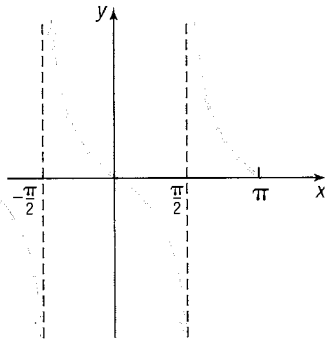
12.



13.



14.



En los problemas del 15 al 30 haga la gráfica de cada función.

15. $y = -\sec x$

16. $y = -\cot x$

17. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \csc(x - \pi)$

19. $y = \tan(x - \pi)$

20. $y = \cot(x - \pi)$

21. $y = 3 \tan 2x$

22. $y = 4 \tan \frac{1}{2}x$

23. $y = \sec 2x$

24. $y = \csc \frac{1}{2}x$

25. $y = \cot \pi x$

26. $y = \cot 2x$

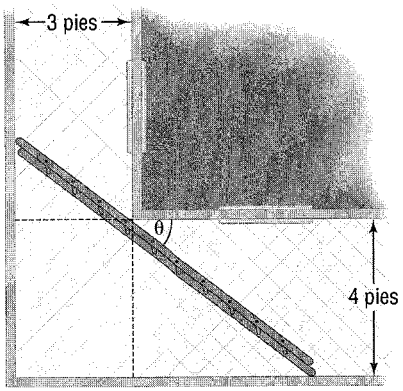
27. $y = -3 \tan 4x$

28. $y = -3 \tan 2x$

29. $y = 2 \sec \frac{1}{2}x$

30. $y = 2 \sec 3x$

31. **Paso de una escalera por una esquina.** Una escalera de longitud L se carga en forma horizontal y debe pasar por la esquina de un corredor de 3 pies de ancho hacia otro corredor que tiene 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración.



(a) Muestre que la longitud L de la escalera dada como función del ángulo θ es

$$L = 3 \sec \theta + 4 \csc \theta$$

(b) Haga la gráfica de L, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(c) Haga la gráfica de L, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. ¿Dónde alcanza L un mínimo?

(d) ¿Cuál es la longitud de la escalera más grande que puede pasar por la esquina? ¿Por qué también es éste el valor mínimo de L?

32. Haga la gráfica de

$$y = \tan x \quad \text{y} \quad y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

¿Cree usted que $\tan x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?

Funciones trigonométricas inversas

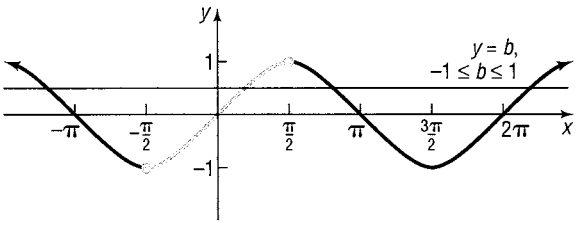
En la sección 2.5 analizamos las funciones inversas y observamos que si una función es uno a uno, entonces tiene una inversa. También observamos que si una función no es uno a uno podríamos restringir su dominio de manera adecuada, de modo que la función restringida sea uno a uno. En esta sección utilizaremos estas ideas para definir las funciones trigonométricas inversas. (Tal vez desee repasar la sección 2.4 en este momento.) Comenzaremos con la inversa de la función seno.

La función seno inverso

En la figura 40 reproducimos la gráfica de $y = \text{sen } x$. Como toda recta horizontal

$y = b$, donde b está entre -1 y 1, corta a la gráfica de $y = \text{sen } x$ una infinidad de veces, se deduce que la función $y = \text{sen } x$ no es uno a uno.

FIGURA 40
$y = \text{sen } x$, $-\infty < x < \infty$, $-1 \leq y \leq 1$

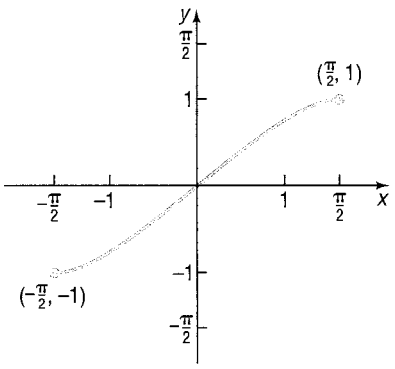


Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \text{sen } x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la función restringida

$$y = \text{sen } x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa.* *Véase* la figura 41.

FIGURA 41
$y = \text{sen } x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-1 \leq y \leq 1$



La función inversa es el **seno inverso** de x y se simboliza como $y = \text{sen}^{-1} x$. Así,

Función seno inverso

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \text{sen } y$$
$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{1}$$

Como $y = \text{sen}^{-1} x$ significa que $x = \text{sen } y$, leemos $y = \text{sen}^{-1} x$ como "y es el ángulo cuyo seno es igual a x". O bien, "y es el seno inverso de x". Tenga cuidado con la notación utilizada. El superíndice -1 que aparece en $y = \text{sen}^{-1} x$ no es un exponente, sirve para recordarnos el símbolo f^{-1} utilizado para denotar la inversa de una función f. (Para evitar esta notación algunos libros utilizan $y = \text{arcsen } x$ en vez de $y = \text{sen}^{-1} x$.)

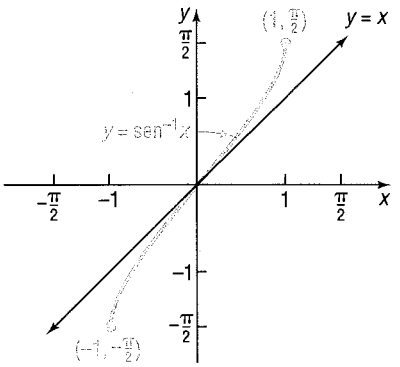
Con base en el análisis general de las funciones y sus inversas (sección 2.5), tenemos los siguientes resultados:

*Aunque existen muchas otras formas de restringir el dominio y obtener una función uno a uno, los matemáticos han acordado un uso consistente del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para definir la inversa de $y = \text{sen } x$.

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} u) = u \quad \text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} v) = v \quad \text{donde} \quad -1 \le v \le 1$$

Examinemos la función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Su dominio es $-1 \le x \le 1$ y su rango $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte adecuada de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 42.

FIGURA 42
$y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 42.

Para algunos números x es posible determinar el valor exacto de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

EJEMPLO 1 *Determinación del valor exacto de una función seno inverso*

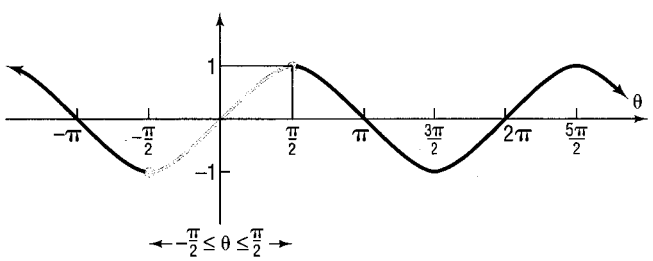
Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1} 1$.

Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 1$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, cuyo seno es igual a 1:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{sen} \theta = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{Por definición.}$$

La figura 43 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es 1, es $\pi/2$. (Observe que $\operatorname{sen}(5\pi/2)$ también es igual a 1, pero $5\pi/2$ está fuera del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 43



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

De modo que

$$\operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 Determinación del valor exacto de $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$.

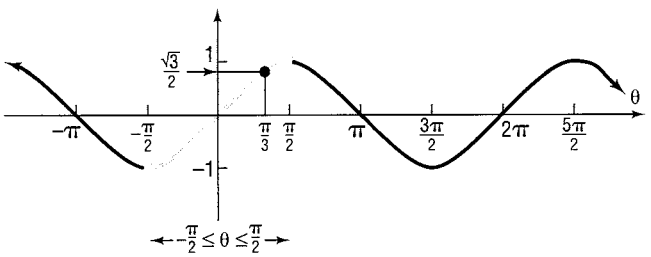
Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, cuyo seno es igual a $\sqrt{3}/2$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

La figura 44 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. (Observe que $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ también es igual a $\sqrt{3}/2$, pero $2\pi/3$ está fuera del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 44



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

De modo que

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

EJEMPLO 3 Determinación del valor exacto de una función seno inverso

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$.

Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, cuyo seno es igual a $-\frac{1}{2}$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

(Consulte la figura 44, en caso necesario.) El único ángulo dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Así,

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

De modo que

$$\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Ahora resuelva el problema 3.

Para la mayor parte de los números x hay que aproximar el valor de $y = \text{sen}^{-1}x$ mediante una calculadora. Algunas calculadoras utilizan una única tecla con la leyenda [sen^{-1}] o [arcsin]. En otras hay que oprimir la tecla [inv] o [SHIFT], y después la tecla [sen], para evaluar la función seno inverso.

Determinar el valor aproximado de

(a) $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3}$ (b) $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{4})$

Como queremos medir el ángulo en radianes, primero hacemos que la calculadora utilice el modo en radianes.

(a) Teclas oprimidas:* [1] [÷] [3] [=] [SHIFT] [sen]

Pantalla: 1 → 3 → 0.3333333 → 0.3398369

Así, $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.34$.

(b) Teclas oprimidas: [0.25] [+/−] [SHIFT] [sen]

Pantalla: 0.25 → −0.25 → −0.2526802

Así, $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{4}) \approx -0.25$.

Ahora resuelva el problema 13.

Función coseno inverso

En la figura 45 reproducimos la gráfica de $y = \cos x$. Como toda recta horizontal $y = b$, donde b está entre −1 y 1, corta a la gráfica de $y = \cos x$ una infinidad de veces, esto implica que la función $y = \cos x$ no es uno a uno.

*En algunas calculadoras, primero se oprime [sen^{-1}] y luego se introduce el valor [1/3]. Consulte la sucesión correcta en el manual del usuario.

FIGURA 45
$y = \cos x$, $-\infty < x < \infty$, $-1 \le y \le 1$

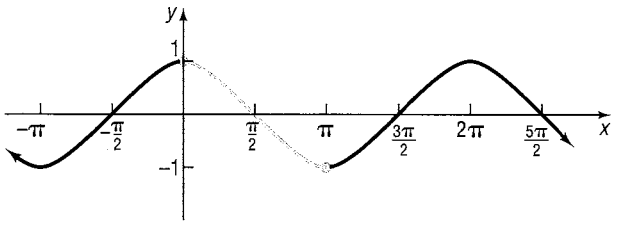
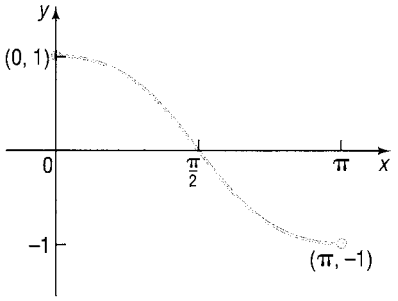


FIGURA 46
$y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, $-1 \le y \le 1$



Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$, la función restringida

$$y = \cos x, \qquad 0 \le x \le \pi$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa.* *Véase* la figura 46.

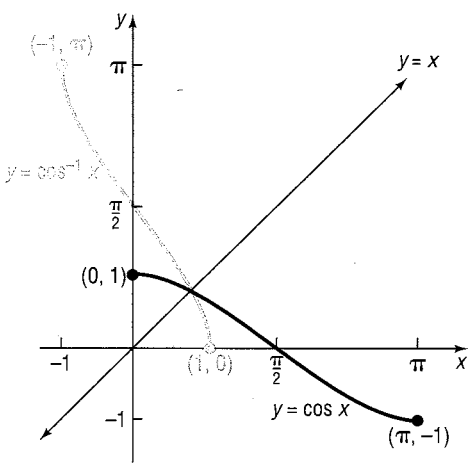
La función inversa es el **coseno inverso** de x y se simboliza como $y = \cos^{-1} x$ (o por $y = \arccos x$). Así,

Función coseno inverso

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cos y$$
$$\text{donde} \quad 0 \le y \le \pi \quad \text{y} \quad -1 \le x \le 1 \tag{2}$$

En este caso, y es el ángulo cuyo coseno es x. El dominio de la función $y = \cos^{-1} x$ es $-1 \le x \le 1$ y el rango $0 \le y \le \pi$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte restringida de la gráfica de $y = \cos x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 47.

FIGURA 47
$y = \cos^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$



Verificación: haga la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 47.

*Esta es la restricción aceptada por lo general para definir la inversa.

En general,

$$\cos^{-1}(\cos u) = u, \quad \text{donde} \quad 0 \le u \le \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} v) = v, \quad \text{donde} \quad -1 \le v \le 1$$

EJEMPLO 5 *Determinación del valor exacto de una función coseno inversa*

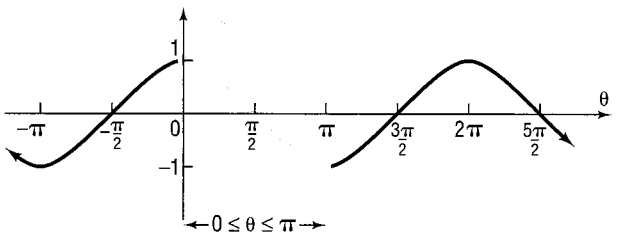
Determinar el valor exacto de cos–10.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1} 0$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a 0:

$$\theta = \cos^{-1} 0, \quad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = 0, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

La figura 48 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0, es $\pi/2$. (Observe que $\cos(3\pi/2)$ también es igual a 0, pero $3\pi/2$ está fuera del intervalo $[0, \pi]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 48



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

De modo que

$$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

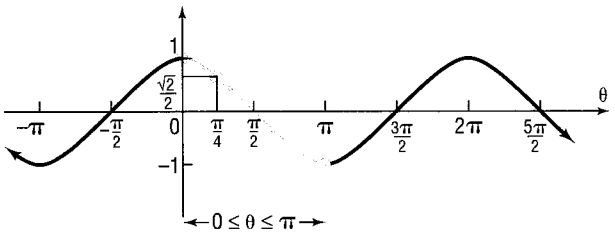
Determinar el valor exacto de $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$.

Sea $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a $\sqrt{2}/2$:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

La figura 49 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{2}/2$, es $\pi/4$.

FIGURA 49



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

De modo que

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

EJEMPLO 7 *Determinación del valor exacto de una función coseno inversa*

Determinar el valor exacto de $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a $-\frac{1}{2}$:

$$\theta = \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}), \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = -\tfrac{1}{2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

(Consulte la figura 49, en caso necesario.) El único ángulo dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Así,

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

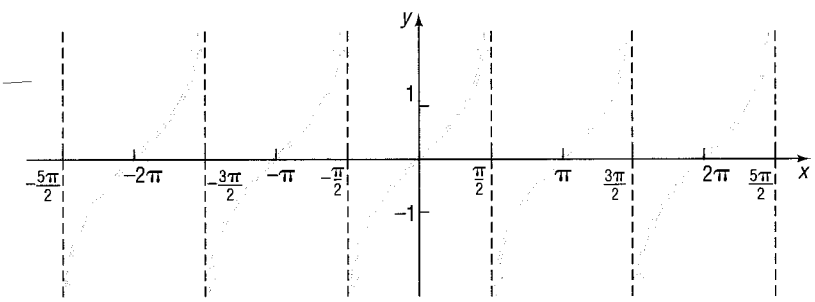
De modo que

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Función tangente inversa

En la figura 50 reproducimos la gráfica de $y = \tan x$. Como toda recta horizontal corta a la gráfica una infinidad de veces, esto implica que la función tangente no es uno a uno.

FIGURA 50
$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$, $-\infty < y < \infty$

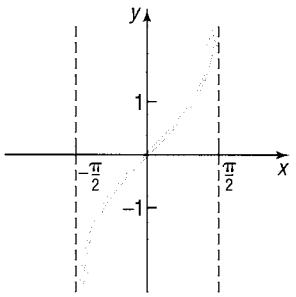


Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \tan x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$,* la función restringida

$$y = \tan x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa. *Véase* la figura 51.

FIGURA 51
$y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$



La función inversa es la **tangente inversa** de x y se simboliza como $y = \tan^{-1} x$ (o $y = \arctan x$). Así,

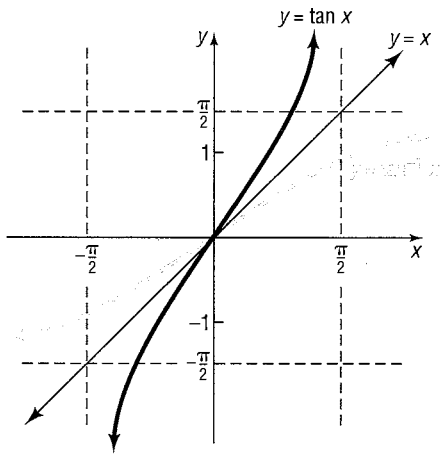
Función tangente inversa

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \tan y \tag{3}$$

$$\text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad -\infty < x < \infty$$

En este caso, y es el ángulo cuya tangente es x. El dominio de la función $y = \tan^{-1} x$ es $-\infty < x < \infty$ y el rango $-\pi/2 < y < \pi/2$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte restringida de la gráfica de $y = \tan x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 52.

FIGURA 52
$y = \tan^{-1} x$, $-\infty < x < \infty$, $-\pi/2 < y < \pi/2$



haga la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 52.

*Esta es la restricción aceptada por lo general.

En general,

$$\tan^{-1}(\tan u) = u, \quad \text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan(\tan^{-1} v) = v, \quad \text{donde} \quad -\infty < v < \infty$$

EJEMPLO 3 *Determinación del valor exacto de una función tangente inversa*

Determinar el valor exacto de $\tan^{-1} 1$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1} 1$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a 1:

$$\theta = \tan^{-1} 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan \theta = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Consulte la figura 51. El único ángulo θ dentro del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es 1, es $\pi/4$.

Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

De modo que

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

EJEMPLO 4 *Determinación del valor exacto de una función tangente inversa*

Determinar el valor exacto de $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a $-\sqrt{3}$:

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan \theta = -\sqrt{3} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Consulte de nuevo la figura 51. El único ángulo θ dentro del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es $-\sqrt{3}$ es $-\pi/3$. Así,

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

De modo que

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Ahora resuelva el problema 5.

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)]$.

Sea $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$. Buscamos el ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, cuyo coseno es igual a $\sqrt{3}/2$:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Entonces

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Determinar el valor exacto de $\cos[\tan^{-1}(-1)]$.

Sea $\theta = \tan^{-1}(-1)$. Buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a -1:

$$\tan\theta = -1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4},$$

Entonces

$$\cos(\tan^{-1}(-1)] = \cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Determinar el valor exacto de $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2})$.

Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$. Buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, cuyo seno es igual a $\frac{1}{2}$.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Entonces

$$\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right) = \sec\theta = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ahora resuelva el problema 25.

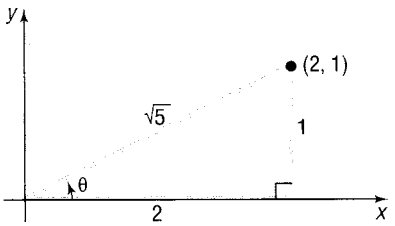
No es necesario determinar el ángulo para resolver problemas como los que aparecieron en los ejemplos 10, 11 y 12.

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}[\tan^{-1}\frac{1}{2}]$.

Sea $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Como $\tan\theta > 0$, esto implica que $0 < \theta < \pi/2$. Ahora, en la figura 53, trazamos un triángulo en el cuadrante adecuado, el cual muestra que $\tan\theta = \frac{1}{2}$. Podemos determinar con facilidad la magnitud de la hipotenusa de este triángulo, que es $\sqrt{5}$. Por lo tanto, el seno de θ es $1/\sqrt{5}$, de modo que

$$\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

FIGURA 53
$\tan\theta = \frac{1}{2}$

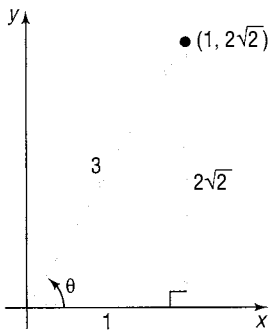


Determinar el valor exacto de $\tan(\cos^{-1}\frac{1}{3})$.

Sea $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$. Entonces $\cos\theta = \frac{1}{3}$, donde $0 \le \theta \le \pi$. Como $\cos\theta > 0$, esto implica que $0 \le \theta \le \pi/2$. Observemos el triángulo en la figura 54. El lado opuesto al ángulo θ mide $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Así,

$$\tan(\cos^{-1}\tfrac{1}{3}) = \tan\theta = 2\sqrt{2}$$

FIGURA 54
$\cos\theta = \frac{1}{3}$



Determinar el valor exacto de $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$.

Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Como $\operatorname{sen}\theta < 0$, esto implica que $-\pi/2 \le \theta \le 0$. Con base en la figura 55, concluimos que

$$\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

FIGURA 55
sen $\theta = -\frac{1}{3}$

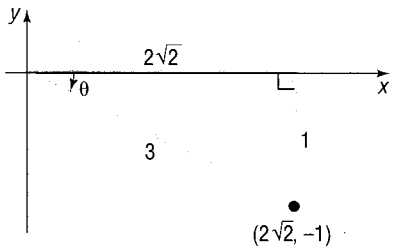
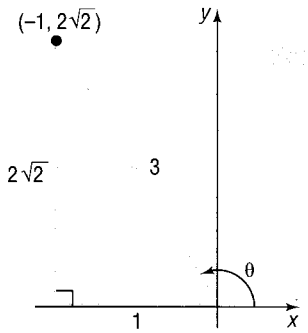


FIGURA 56
cos $\theta = -\frac{1}{3}$



Determinar el valor exacto de $\tan[\cos^{-1}(-\frac{1}{3})]$.

Sea $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{3})$. Entonces $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Como $\cos\theta < 0$, esto implica que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Con base en la figura 56, concluimos que

$$\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2}$$

Ahora resuelva el problema 39.

Muestre que $\text{sen}(\tan^{-1} v) = \dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}$

Sea $\theta = \tan^{-1} v$ de modo que $\tan\theta = v$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Existen dos posibilidades: $-\pi/2 < \theta < 0$ o $0 \leq \theta < \pi/2$. Si $0 \leq \theta < \pi/2$, entonces $\tan\theta = v \geq 0$. Con base en la figura 57, concluimos que

$$\text{sen}(\tan^{-1} v) = \text{sen}\,\theta = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Si $-\pi/2 < \theta < 0$, entonces $\tan\theta = v < 0$. Con base en la figura 58, concluimos que

$$\text{sen}(\tan^{-1} v) = \text{sen}\,\theta = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

FIGURA 57
$v > 0$

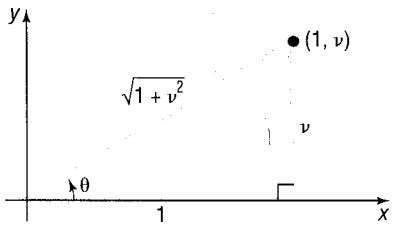
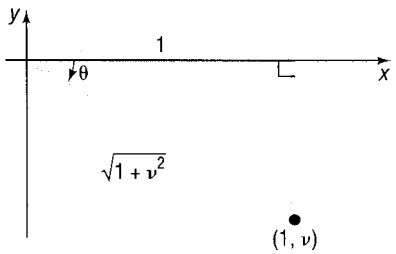


FIGURA 58
$v < 0$



Otra forma de resolver el ejemplo 17 utiliza las identidades fundamentales. Si $\theta = \tan^{-1} v$, entonces $\tan \theta = v$ y $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ $\theta < \pi/2$, igual que antes. Como resultado, sabemos que $\sec \theta > 0$. Así,

$$\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

Ahora resuelva el problema 57.

Las demás funciones trigonométricas inversas

Las funciones cotangente inversa, secante inversa y cosecante inversa se definen como sigue:

$$y = \cot^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cot y \tag{4}$$
$$\text{donde} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad 0 < y < \pi$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \sec y \tag{5}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi, \; y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \csc y \tag{6}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \; y \neq 0$$

La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para evaluar estas funciones trigonométricas inversas. La forma más sencilla de evaluarlas es convertirlas en una función trigonométrica inversa con un rango igual al de la original. A este respecto, observe que $y = \cot^{-1} x$ y $y = \sec^{-1} x$ (excepto cuando no están definidas) tienen el mismo rango que $y = \cos^{-1} x$, mientras que $y = \csc^{-1} x$ (excepto cuando no está definida) tiene el mismo rango que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

Utilizar una calculadora para aproximar con dos cifras decimales:

(a) $\sec^{-1} 3$ (b) $\csc^{-1}(-4)$ (c) $\cot^{-1} \frac{1}{2}$ (d) $\cot^{-1}(-2)$

Antes que nada, la calculadora debe trabajar en modo de radianes.

(a) Sea $\theta = \sec^{-1} 3$. Entonces $\sec \theta = 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \pi/2$. Así, $\cos \theta = \frac{1}{3}$ y

$$\sec^{-1} 3 = \theta = \cos^{-1} \tfrac{1}{3} \approx 1.23$$

FIGURA 59
cot $\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$

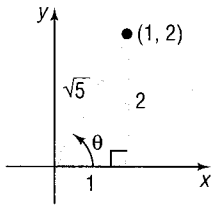
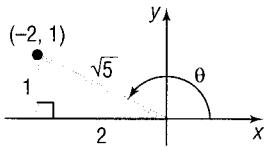


FIGURA 60
cot $\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$



(b) Sea $\theta = \csc^{-1}(-4)$. Entonces csc $\theta = -4$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $\theta \neq 0$. Así, sen $\theta = -\frac{1}{4}$ y

$$\csc^{-1}(-4) = \theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\tfrac{1}{4}) \approx -0.25$$

(c) Sea $\theta = \cot^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces cot $\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$. Estos hechos indican que θ está en el cuadrante I. Trazamos la figura 59 como ayuda para determinar cos θ. Así, cos $\theta = 1/\sqrt{5}$, $0 < \theta < \pi/2$ y

$$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 1.11$$

(d) Sea $\theta = \cot^{-1}(-2)$. Entonces cot $\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$. Estos hechos indican que θ está en el cuadrante II. Trazamos la figura 60 como ayuda para determinar cos $\theta = -2/\sqrt{5}$, $\pi/2 < \theta < \pi$ y

$$\cot^{-1}(-2) = \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 2.68$$

Ahora resuelva el problema 67.

Ejercicio 6.5

En los problemas del 1 al 12 determine el valor exacto de cada expresión.

1. $\operatorname{sen}^{-1} 0$ **2.** $\cos^{-1} 1$ **3.** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **4.** $\cos^{-1}(-1)$

5. $\tan^{-1} 0$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$ **7.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ **8.** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **10.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **11.** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **12.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los problemas del 13 al 24, utilice una calculadora para determinar el valor aproximado de cada expresión, redondeado a dos cifras decimales.

13. $\operatorname{sen}^{-1} 0.1$ **14.** $\cos^{-1} 0.6$ **15.** $\tan^{-1} 5$ **16.** $\tan^{-1} 0.2$

17. $\cos^{-1}\frac{7}{8}$ **18.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{8}$ **19.** $\tan^{-1}(-0.4)$ **20.** $\tan^{-1}(-3)$

21. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.12)$ **22.** $\cos^{-1}(-0.44)$ **23.** $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}$ **24.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$

En los problemas del 25 al 46 determine el valor exacto de cada expresión.

25. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **26.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **27.** $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **28.** $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

29. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **30.** $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **31.** $\csc(\tan^{-1} 1)$ **32.** $\sec(\tan^{-1}\sqrt{3})$

33. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-1)]$ **34.** $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **35.** $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **36.** $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

37. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$ **38.** $\tan\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ **39.** $\sec\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **40.** $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

41. $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$ **42.** $\csc[\tan^{-1}(-2)]$ **43.** $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-3)]$ **44.** $\cot\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

45. $\sec\left(\text{sen}^{-1}\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ **46.** $\csc\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$

En los problemas del 47 al 56, utilice una calculadora para aproximar el valor de cada expresión, redondeado a dos cifras decimales.

47. $\text{sen}^{-1}(\tan 0.5)$ **48.** $\cos^{-1}(\tan 0.4)$ **49.** $\tan^{-1}(\text{sen } 0.1)$ **50.** $\tan^{-1}(\cos 0.2)$

51. $\cos^{-1}(\text{sen } 1)$ **52.** $\tan^{-1}(\cos 1)$ **53.** $\text{sen}^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{8}\right)$ **54.** $\cos^{-1}\left(\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$

55. $\tan^{-1}\left(\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$ **56.** $\tan^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$

57. Muestre que $\sec(\tan^{-1} v) = \sqrt{1+v^2}$.

58. Muestre que $\tan(\text{sen}^{-1} v) = v/\sqrt{1-v^2}$.

59. Muestre que $\tan(\cos^{-1} v) = \sqrt{1-v^2}/v$.

60. Muestre que $\text{sen}(\cos^{-1} v) = \sqrt{1-v^2}$.

61. Muestre que $\cos(\text{sen}^{-1} v) = \sqrt{1-v^2}$.

62. Muestre que $\cos(\tan^{-1} v) = 1/\sqrt{1+v^2}$.

63. Muestre que $\text{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v = \pi/2$.

64. Muestre que $\tan^{-1} v + \cot^{-1} v = \pi/2$.

65. Muestre que $\tan^{-1} 1/v = \pi/2 - \tan^{-1} v$.

66. Muestre que $\cot^{-1} e^{v} = \tan^{-1} e^{-v}$.

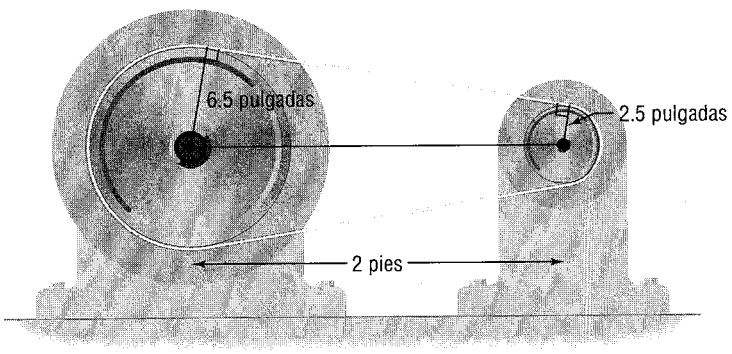
En los problemas del 67 al 78, utilice una calculadora para aproximar cada expresión, redondeada a dos cifras decimales.

67. $\sec^{-1} 4$ **68.** $\csc^{-1} 5$ **69.** $\cot^{-1} 2$ **70.** $\sec^{-1}(-3)$

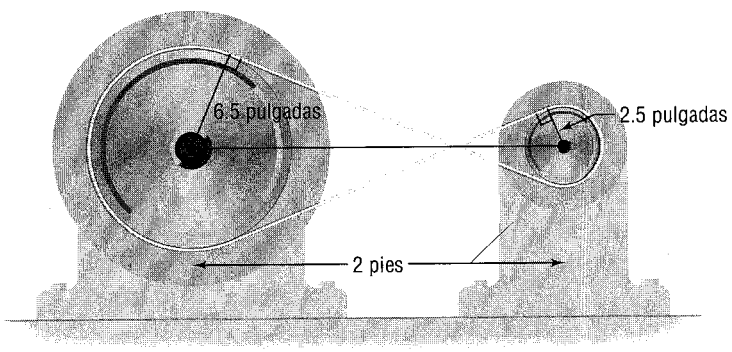
71. $\csc^{-1}(-3)$ **72.** $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ **73.** $\cot^{-1}(-\sqrt{5})$ **74.** $\cot^{-1}(-8.1)$

75. $\csc^{-1}(-\frac{3}{2})$ **76.** $\sec^{-1}(-\frac{4}{3})$ **77.** $\cot^{-1}(-\frac{3}{2})$ **78.** $\cot^{-1}(-\sqrt{10})$

79. La rueda de transmisión de un motor mide 13 pulgadas de diámetro y la polea en la bomba rotatoria mide 5 pulgadas de diámetro. Si los ejes de la rueda de transmisión y de la polea están separados por una distancia de 2 pies, ¿qué longitud de banda es necesaria para unirlos como muestra la siguiente figura?



80. Vuelva a resolver el problema 79 si la banda está cruzada, como muestra la siguiente figura.



81. ¿Para cuáles números x ocurre que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$?

82. ¿Para cuáles números x ocurre que $\cos(\cos^{-1} x) = x$?

83. ¿Para cuáles números x ocurre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$?

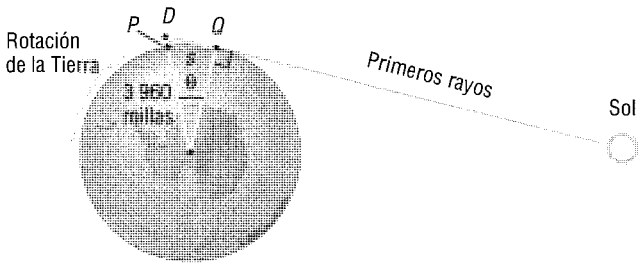
84. ¿Para cuáles números x ocurre que $\cos^{-1}(\cos x) = x$?

85. Trace la gráfica de $y = \cot^{-1} x$.

86. Trace la gráfica de $y = \sec^{-1} x$.

87. Trace la gráfica de $y = \csc^{-1} x$.

88. El Monte Cadillac, con altura de 1 530 pies, se localiza en el parque nacional de Acadia, Maine, y es el pico más alto en la costa este de Estados Unidos. Se dice que una persona parada en la cumbre sería la primera de Estados Unidos en ver los rayos del Sol al amanecer. ¿Cuánto tiempo antes verá una persona en la cima del Monte Cadillac los primeros rayos del Sol, con respecto de una persona parada en línea recta debajo de ella, pero al nivel del mar? [*Sugerencia:* Consulte la figura. Cuando la persona en D ve los primeros rayos del Sol, la persona en P no los ve. La persona en P ve los primeros rayos del Sol sólo después que la Tierra ha girado, de modo que P esté en la posición Q. Calcule la longitud de arco s subtendida por el ángulo central θ. A continuación, utilice el hecho de que en 24 horas se subtiende una longitud de $2\pi(3\,960)$ millas y determine el tiempo necesario para subtender la longitud s.]



89. Explique con sus propias palabras la forma en que utilizaría su calculadora para determinar el valor de $\cot^{-1} 10$.

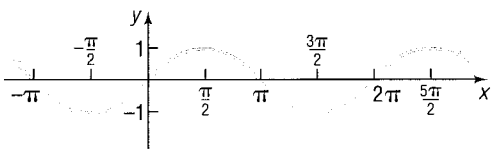
90. Consulte tres libros de cálculo y escriba la definición que proporciona cada uno de $y = \sec^{-1} x$ y $y = \csc^{-1} x$. Compare esas definiciones con las dadas en este libro.

Repaso del capítulo

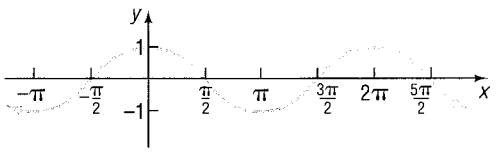
Conceptos fundamentales

Las gráficas de las seis funciones trigonométricas

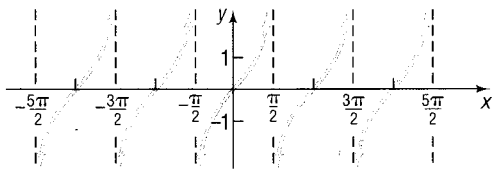
$y = \operatorname{sen} x$
$-\infty < x < \infty$
$-1 \le y \le 1$



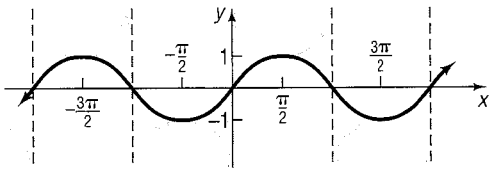
$y = \cos x$
$-\infty < x < \infty$
$-1 \le y \le 1$



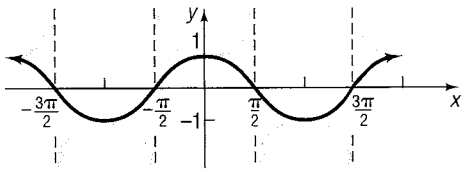
$y = \tan x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$,
$-\infty < y < \infty$



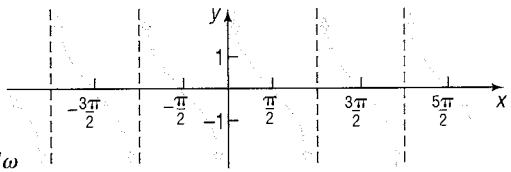
$y = \csc x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π,
$|y| \geq 1$



$y = \sec x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$,
$|y| \geq 1$



$y = \cot x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π,
$-\infty < y < \infty$



Gráficas senoidales

$y = A \operatorname{sen} \omega x$, $\omega > 0$
$y = A \cos \omega x$, $\omega > 0$
$y = A \operatorname{sen}(\omega x - \phi)$
$y = A \cos(\omega x - \phi)$

Periodo $= 2\pi/\omega$
Amplitud $= |A|$
Desfasamiento $= \phi/\omega$

Definiciones de las seis funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ significa $x = \operatorname{sen} y$ donde $-1 \leq x \leq 1$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \cos^{-1} x$ significa $x = \cos y$ donde $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$
$y = \tan^{-1} x$ significa $x = \tan y$ donde $-\infty < x < \infty$, $-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \cot^{-1} x$ significa $x = \cot y$ donde $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$
$y = \sec^{-1} x$ significa $x = \sec y$ donde $|x| \geq 1$, $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$
$y = \csc^{-1} x$ significa $x = \csc y$ donde $|x| \geq 1$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$

CÓMO HACER PARA

Hacer la gráfica de las funciones trigonométricas, incluyendo variaciones

Determinar el periodo y amplitud de una función senoidal y utilizarlos para hacer la gráfica de la función

Determinar una función con gráfica senoidal dada

Hacer la gráfica de ciertas sumas de funciones, sumando sus ordenadas

Hacer la gráfica de ciertos productos de funciones

Determinar el valor exacto de ciertas funciones trigonométricas inversas

Utilizar una calculadora para aproximar los valores de funciones trigonométricas inversas

LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO

1. La siguiente función tiene amplitud 3 y periodo 2:

$y =$ _____ sen _____ x

2. La función $y = 3 \operatorname{sen} 6x$ tiene amplitud _____ y periodo _____.

3. El factor de amplificación de $f(x) = 5x \cos 3\pi x$ es _____.

4. La función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ tiene dominio _____ y rango _____.

5. El valor de $\operatorname{sen}^{-1}[\cos(\pi/2)]$ es _____.

6. El movimiento de un objeto satisface la ecuación $x = 4 \cos 6t$. Este movimiento se conoce como _____ _____ _____.

7. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen gráficas simétricas con respecto del eje y?

8. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen gráficas simétricas con respecto del origen?

Cierto o Falso

C F **1.** Las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ son idénticas salvo un corrimiento horizontal.

C F **2.** Las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ tienen una infinidad de asíntotas verticales.

C F **3.** Para $y = -2 \text{ sen } \pi x$, la amplitud es 2 y el periodo es $\pi/2$.

C F **4.** El dominio de $y = \text{sen}^{-1} x$ es $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

C F **5.** $\cos(\text{sen}^{-1} 0) = 1$ y $\text{sen}(\cos^{-1} 0) = 1$.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 4, determine la amplitud y el periodo de cada función, sin hacer la gráfica.

1. $y = 4 \cos x$ **2.** $y = \text{sen } 2x$ **3.** $y = -8 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x$ **4.** $y = -2 \cos 3\pi x$

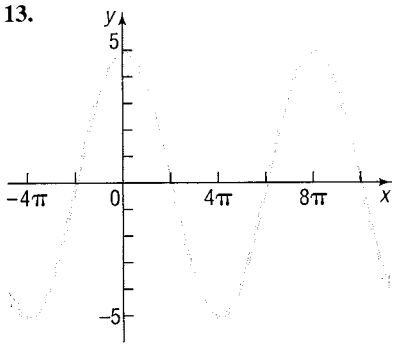
En los problemas del 5 al 12, determine la amplitud, el periodo y el desfasamiento de cada función. Haga la gráfica de un periodo.

5. $y = 4 \text{ sen } 3x$ **6.** $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$ **7.** $y = -2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ **8.** $y = -6 \text{ sen}(2\pi x - 2)$

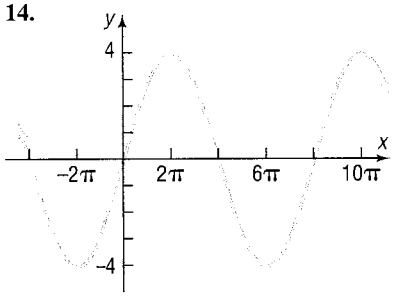
9. $y = \frac{1}{2} \text{sen}(\frac{3}{2}x - \pi)$ **10.** $y = \frac{3}{2} \cos(6x + 3\pi)$ **11.** $y = -\frac{2}{3} \cos(\pi x - 6)$ **12.** $y = -7 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{4}{3}\right)$

En los problemas del 13 al 16 determine una función cuya gráfica está dada.

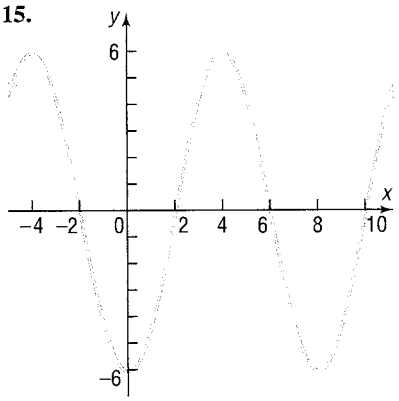
13.



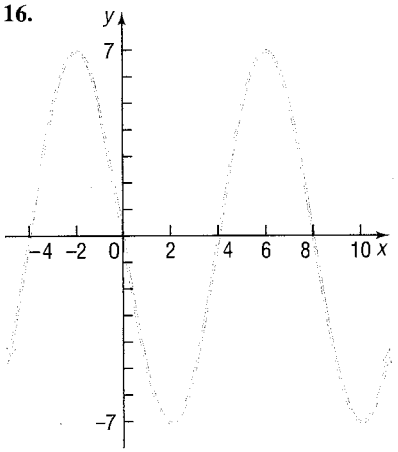
14.



15.



16.



En los problemas del 17 al 20 haga la gráfica de cada función. Cada gráfica debe contener al menos un periodo.

17. $y = \tan(x + \pi)$ **18.** $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **19.** $y = -2 \tan 3x$ **20.** $y = 4 \tan 2x$

En los problemas del 21 al 26 utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función.

21. $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$ **22.** $f(x) = 2x + \cos 2x$ **23.** $f(x) = \operatorname{sen} \pi x + \cos \frac{\pi}{2}x$

24. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + \cos \pi x$ **25.** $f(x) = 3 \operatorname{sen} \pi x + 2 \cos \pi x$ **26.** $f(x) = 3 \cos 2\pi x + 4 \operatorname{sen} 2\pi x$

En los problemas del 27 al 32 haga la gráfica de cada función.

27. $f(x) = x \cos 2x$ **28.** $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x$ **29.** $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x$

30. $f(x) = e^{-x} \cos \pi x$ **31.** $f(x) = e^{x} \operatorname{sen} \pi x$ **32.** $f(x) = e^{x} \cos \pi x$

En los problemas del 33 al 48 determine el valor exacto de cada expresión.

33. $\operatorname{sen}^{-1} 1$ **34.** $\cos^{-1} 0$ **35.** $\tan^{-1} 1$ **36.** $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$

37. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **38.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **39.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **40.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0)$

41. $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **42.** $\tan[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$ **43.** $\sec\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **44.** $\csc\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

45. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}\frac{3}{4})$ **46.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$ **47.** $\tan[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{4}{5})]$ **48.** $\tan[\cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$

En los problemas del 49 al 52 se proporciona la distancia d (en pies) recorrida por un objeto en un tiempo t (en segundos).

(a) Describa el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo con respecto de su posición de equilibrio?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?

(d) ¿Cuál es la frecuencia?

49. $d = 6 \operatorname{sen} 2t$ **50.** $d = 2 \cos 4t$ **51.** $d = -2 \cos \pi t$ **52.** $d = -3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}t$

53. La fuerza electromotriz E, en voltios, en un determinado circuito de corriente alterna cumple la ecuación

$$E = 120 \operatorname{sen} 120 \pi t, \; t \geq 0$$

donde t se mide en segundos.

(a) ¿Cuál es el valor máximo de E?

(b) ¿Cuál es el periodo?

(c) Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

54. La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220 \operatorname{sen}\left(30 \pi t + \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

(a) ¿Cuál es el periodo?

(b) ¿Cuál es la amplitud?

(c) ¿Cuál es el desfasamiento?

(d) Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

TEMA 3

Trigonometría analítica

CAPÍTULO 7

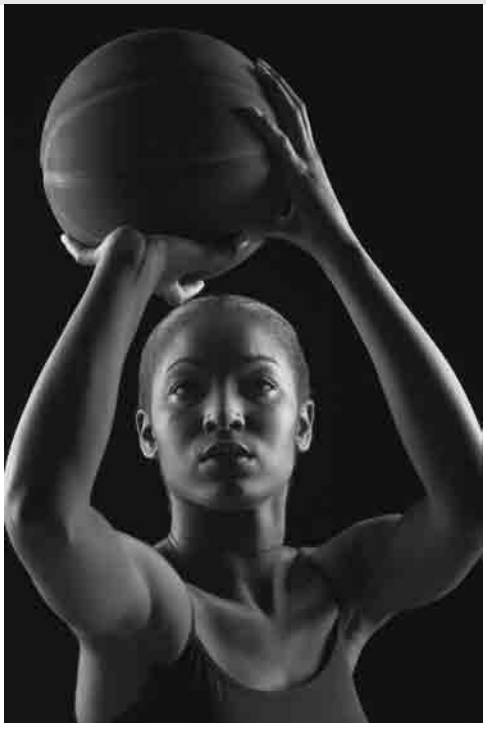
7.1 Identidades trigonométricas

7.2 Fórmulas para la suma y la diferencia

7.3 Fórmulas para ángulo doble y ángulo medio

7.4 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

7.5 Ecuaciones trigonométricas
Repaso del capítulo



Panorama **Movimiento de un proyectil**

Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ respecto de la horizontal con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si pasamos por alto la resistencia al aire, la distancia horizontal R que ***recorre****, el alcance, está dada por*

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

(a) Demostrar que $R = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Encontrar el ángulo θ para el cual R es máximo.

[Véase el ejemplo 4, sección 7.3.]

En este capítulo continuaremos la deducción de identidades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades juegan un papel importante en cálculo, ciencias físicas, sociales y economía, donde son usadas para simplificar expresiones complicadas.

La última sección de este capítulo proporciona técnicas para la resolución de ecuaciones que contienen funciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas

Primero revisemos una definición fundamental:

Dos funciones f y g se dice que son **idénticamente iguales** si

$$f(x) = g(x)$$

para todos los valores de x en que ambas funciones están definidas. Una ecuación de este tipo es conocida como **identidad.** Una ecuación que no es una identidad es llamada **ecuación condicional.**

Por ejemplo, las expresiones siguientes son identidades:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Las siguientes expresiones son ecuaciones condicionales:

$2x + 5 = 0$ Verdadera sólo si $x = -\frac{5}{2}$

$\operatorname{sen} x = 0$ Verdadera sólo si $x = k\pi$, k un entero

$\operatorname{sen} x = \cos x$ Verdadera sólo si $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, k un entero

El siguiente recuadro resume las identidades trigonométricas que hemos establecido hasta este punto:

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades par o impar

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

A las identidades de esta lista las llamaremos **identidades trigonométricas básicas.** Estas identidades no sólo deben ser memorizadas si no que deben *conocerse* (al igual que usted conoce su nombre en lugar de tener que memorizarlo). En realidad,

el uso que se hace de una identidad básica con frecuencia es una pequeña variación de la forma enlistada aquí. Por ejemplo, podríamos querer usar $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$ en lugar de $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$. Por esta razón, entre otras, necesita conocer estas relaciones para sentirse más confiado al trabajar con variaciones de ellas.

En los ejemplos que siguen las instrucciones que leerá son: "Demostrar la identidad. . . " Lo cual, como verá, se realiza empezando con un miembro de la ecuación dada (por lo regular la que contenga la expresión más complicada) usando identidades básicas apropiadas y operaciones algebraicas hasta llegar al otro miembro. Saber seleccionar una identidad básica apropiada para obtener el resultado deseado sólo se consigue por medio de la experiencia y mucha práctica.

EJEMPLO 1 Demostración de una identidad

Demostrar la identidad: $\sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = \tan\theta$

Solución Empezamos con el miembro izquierdo, ya que tiene la expresión más complicada, y aplicamos un identidad recíproca:

$$\sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Una vez que se llega al miembro derecho la identidad está demostrada.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 Demostración de una identidad

Demostrar la identidad: $\text{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$

Empezamos con el miembro izquierdo y aplicamos las identidades par e impar:

$$\begin{aligned}\text{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) &= [\text{sen}(-\theta)]^2 + [\cos(-\theta)]^2 \\ &= (-\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= (\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Demostrar la identidad: $\dfrac{\text{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} = \cos\theta - \text{sen}\,\theta$

Empezamos con dos observaciones: el lado izquierdo parece que tiene la expresión complicada. También, el lado izquierdo tiene expresiones con el argumento $-\theta$, mientras que el lado derecho tiene expresiones con el argumento θ. Por lo tanto, decidimos empezar con el lado izquierdo y aplicamos las identidades par e impar:

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} &= \frac{[\text{sen}(-\theta)]^2 - [\cos(-\theta)]^2}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} \\ &= \frac{(-\text{sen}\,\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\text{sen}\,\theta - \cos\theta} \\ &= \frac{(\text{sen}\,\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\text{sen}\,\theta - \cos\theta} \\ &= \frac{(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)}{-(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)} \\ &= \cos\theta - \text{sen}\,\theta\end{aligned}$$

Demostrar la identidad: $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \tan\theta$

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 + \dfrac{1}{\tan\theta}} = \frac{1 + \tan\theta}{\dfrac{\tan\theta + 1}{\tan\theta}} = \frac{\tan\theta(1 + \tan\theta)}{\tan\theta + 1} = \tan\theta$$

Ahora resuelva el problema 9.

Cuando aparecen sumas o diferencias de cocientes, por lo regular es mejor reescribirlos como un solo cociente, en especial si el otro miembro de la identidad contiene un solo término.

Demostrar la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} + \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta$

El lado izquierdo es más complicado, así que empezamos con él y procedemos a sumar:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 1 + 2\cos\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2 + 2\cos\theta}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \\
&= 2\csc\theta
\end{aligned}$$

Demostrar la identidad: $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \tan\theta$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + (1 - \cos^2\theta)}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{sen } \theta(1 + \text{sen } \theta)}{\cos \theta(1 + \text{sen } \theta)}$$
$$= \tan \theta$$

Ahora resuelva el problema 23.

Algunas veces, multiplicar el numerador y el denominador por un factor adecuado ayudará a una simplificación.

Demostrar la identidad: $\dfrac{1 - \text{sen } \theta}{\cos \theta} = \dfrac{\cos \theta}{1 + \text{sen } \theta}$

Empezamos con el miembro izquierdo y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \text{sen } \theta$. (De manera alterna, podríamos multiplicar el numerador y el denominador del miembro derecho por $1 - \text{sen } \theta$.)

$$\frac{1 - \text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \text{sen } \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1 + \text{sen } \theta}{1 + \text{sen } \theta}$$
$$= \frac{1 - \text{sen}^2 \theta}{\cos \theta(1 + \text{sen } \theta)}$$
$$= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \text{sen } \theta)}$$
$$= \frac{\cos \theta}{1 + \text{sen } \theta}$$

Ahora resuelva el problema 35.

Aunque mucha práctica es la única manera de aprender a demostrar identidades, las siguientes directrices le serán útiles:

Directrices para demostrar identidades

1. Casi siempre es preferible empezar con el miembro que tenga la expresión más complicada.
2. Reescribir sumas o diferencias de cocientes como un solo cociente.
3. Algunas veces reescribir un miembro sólo en términos de senos y cosenos ayudará.
4. Siempre tenga en mente su objetivo. Conforme trabaje en un miembro de la expresión mantenga en su mente la forma de la expresión del otro miembro.

Advertencia: Tenga cuidado de no manejar identidades que están demostradas como si fueran ecuaciones. No puede demostrar una identidad por métodos como sumar la misma expresión a cada miembro y obtener un enunciado verdadero. Esta práctica no está permitida, ya que el enunciado original es precisamente el que se está tratando de demostrar. No sabrá si es verdadero hasta que lo haya demostrado.

Ejercicio 7.1

En los problemas del 1 al 80 demuestre cada identidad.

1. $\csc\theta \cdot \cos\theta = \cot\theta$

2. $\csc\theta \cdot \tan\theta = \sec\theta$

3. $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2\theta$

4. $1 + \cot^2(-\theta) = \csc^2\theta$

5. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$

6. $\operatorname{sen}\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

7. $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

8. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

9. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$

10. $(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1) = \cot^2\theta$

11. $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

12. $(\csc\theta + \cot\theta)(\csc\theta - \cot\theta) = 1$

13. $\operatorname{sen}^2\theta(1 + \cot^2\theta) = 1$

14. $(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$

15. $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 2$

16. $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\operatorname{sen}^2\theta = 1$

17. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

18. $\csc^4\theta - \csc^2\theta = \cot^4\theta + \cot^2\theta$

19. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

20. $\csc\theta - \cot\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

21. $3\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

22. $9\sec^2\theta - 5\tan^2\theta = 5 + 4\sec^2\theta$

23. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta$

24. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 - \cos\theta} = -\cos\theta$

25. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$

26. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta + 1} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

27. $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$

28. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\cot\theta} = \dfrac{\cot\theta}{\csc\theta + 1}$

29. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta - 1}$

30. $\dfrac{\cos\theta + 1}{\cos\theta - 1} = \dfrac{1 + \sec\theta}{1 - \sec\theta}$

31. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = 2\sec\theta$

32. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\sec\theta$

33. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1}{1 - \cot\theta}$

34. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos\theta} = \cos\theta$

35. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

36. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

37. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cot\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

38. $\dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

39. $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta$

40. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

41. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

42. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta}$

43. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

44. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\sec\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$

45. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = 2\operatorname{sen}^2\theta - 1$

46. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

47. $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \tan\theta\sec\theta$

48. $\dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

49. $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1$

50. $\dfrac{1 - \cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

51. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

52. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta - \tan\theta}{\cos^2\theta - \cot\theta} = \tan^2\theta$

53. $\sec\theta - \cos\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$

54. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

55. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

56. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = 4\tan\theta\sec\theta$

57. $\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

58. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

59. $\dfrac{(\sec\theta - \tan\theta)^2 + 1}{\csc\theta(\sec\theta - \tan\theta)} = 2\tan\theta$

60. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

61. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$

62. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sec\theta\csc\theta$

63. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

64. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{1 - 2\cos^2\theta} = \dfrac{\sec\theta - \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta - 1}$

65. $\dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = \cos^2\theta$

66. $\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta + \cos^2\theta$

67. $\dfrac{(2\cos^2\theta - 1)^2}{\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

68. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

69. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

70. $\dfrac{1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

71. $(a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta)^2 = a^2 + b^2$

72. $(2a\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 + a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 = a^2$

73. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

74. $(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \cot\alpha\cot\beta) + (\cot\alpha + \cot\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta) = 0$

75. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = 2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)$

76. $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = -2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)$

77. $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

78. $\ln|\tan\theta| = \ln|\operatorname{sen}\theta| - \ln|\cos\theta|$

79. $\ln|1 + \cos\theta| + \ln|1 - \cos\theta| = 2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

80. $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

81. Escriba en unos cuantos párrafos su estrategia para demostrar identidades.

Fórmulas para la suma y la diferencia

En esta sección continuaremos la deducción de identidades trigonométricas obteniendo fórmulas que involucren la suma y diferencia de dos ángulos, tales como $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, o $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Estas fórmulas son llamadas **fórmulas para la suma y la diferencia.** Empezamos con las fórmulas para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

Teorema
fórmulas para el coseno de una suma y una diferencia

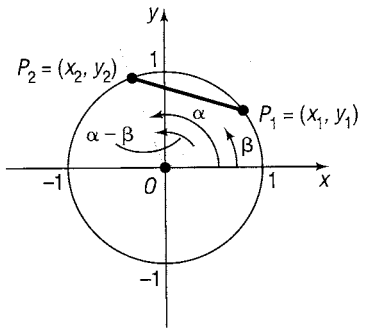
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (2)$$

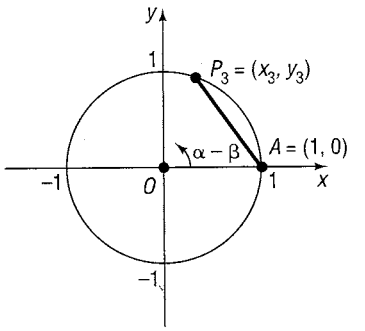
En palabras, la fórmula (1) establece que el coseno de la suma de dos ángulos es igual al coseno del primero por el coseno del segundo, menos el seno del primero por el seno del segundo.

Primero probaremos la fórmula (2). Aunque ésta es cierta para todos los números α y β, en nuestra demostración supondremos que $0 < \beta < \alpha < 2\pi$. Empezamos con un círculo cuyo centro está en el origen (0, 0) y su radio es igual a 1 (el círculo unitario), luego colocamos los ángulos α y β en posición estándar, como se muestra en la figura 1(a). El punto $P_1 = (x_1, y_1)$ está en el lado terminal de β, y el punto $P_2 = (x_2, y_2)$ está en el lado terminal de α.

FIGURA 1



(a)



(b)

Ahora, colocamos el ángulo $\alpha - \beta$ en posición estándar, como se muestra en la figura 1(b), donde el punto A tiene coordenadas (1,0) y el punto $P_3 = (x_3, y_3)$ está sobre el lado terminal del ángulo $\alpha - \beta$.

Al observar el triángulo OP_1P_2 en la figura 1(a) y el triángulo OAP_3 en la figura 1(b), vemos que estos triángulos son congruentes.(¿Advierte por qué? Porque dos lados y el ángulo entre ellos, $\alpha - \beta$, son iguales.) De modo que el lado desconocido de cada triángulo deba ser igual; esto es,

$$d(A, P_3) = d(P_1, P_2)$$

Al usar la fórmula de distancia, encontramos que

$$\sqrt{(x_3 - 1)^2 + y_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$(x_3 - 1)^2 + y_3^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 \qquad (3)$$

Ya que $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, y $P_3 = (x_3, y_3)$ son puntos sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, se deduce que

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \qquad x_2^2 + y_2^2 = 1 \qquad x_3^2 + y_3^2 = 1$$

En consecuencia, la ecuación (3) se simplifica a

$$x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 + 1 = (x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$
$$2 - 2x_3 = 2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$
$$x_3 = x_1x_2 + y_1y_2 \qquad (4)$$

Pero $P_1 = (x_1, y_1)$ está en el lado terminal del ángulo b y a una distancia de 1 unidad del origen. Así que,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{y_1}{1} = y_1 \qquad \cos \beta = \frac{x_1}{1} = x_1 \qquad (5)$$

De forma análoga,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y_2}{1} = y_2 \qquad \cos \alpha = \frac{x_2}{1} = x_2 \qquad \cos(\alpha - \beta) = \frac{x_3}{1} = x_3 \qquad (6)$$

Al usar las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4), obtenemos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

que es la fórmula (2).

La prueba de la fórmula (1) es consecuencia de la fórmula (2). Usamos el hecho de que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Una aplicación de las fórmulas (1) y (2) es obtener el valor exacto del coseno de un ángulo que pueda ser expresado como la suma o diferencia de ángulos cuyos seno y coseno son conocidos exactamente.

Encontrar el valor exacto de cos 75°.

Ya que $75° = 45° + 30°$, usamos la fórmula (2) para obtener

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \operatorname{sen} 45°\operatorname{sen} 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Encontrar el valor exacto de $\cos(\pi/12)$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 3.

Otra aplicación de las fórmulas (1) y (2) es establecer otras identidades. A continuación se da un par de identidades importantes:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \tag{7a}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \tag{7b}$$

Para demostrar la fórmula (7a), usamos la fórmula $\cos(\alpha - \beta)$ con $\alpha = \pi/2$ y $\beta = \theta$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta \\ &= 0\cdot\cos\theta + 1\cdot\operatorname{sen}\theta \\ &= \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

Para demostrar la fórmula (7b), hacemos uso de la identidad (7a) que se acaba de demostrar:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \cos\theta$$

Las fórmulas (7a) y (7b) deben parecerle familiares. Son la base para el teorema establecido en el capítulo 5: cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

Además, ya que $\cos(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta - \pi/2)$, como consecuencia de la fórmula (7a) se tiene que $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$. Así, las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos(x - \pi/2)$ son idénticas, algo que usamos antes en la sección 6.2.

Ahora resuelva el problema 29.

Fórmulas para sen($\alpha + \beta$) y sen($\alpha - \beta$)

Hemos establecido las identidades de las fórmulas (7a) y (7b), ahora podemos deducir las fórmulas para la suma y la diferencia, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] \\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta) \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Así

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{8}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{9}$$

En palabras, la fórmula (8) establece que el seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo más el coseno del primero por el seno del segundo.

EJEMPLO 3 *Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}(7\pi/12)$.

Solución

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad \text{Fórmula (8).}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$ ■

EJEMPLO 4 *Uso de la fórmula de la diferencia para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de sen 165°.

Solución

$$\operatorname{sen} 165° = \operatorname{sen}(225° - 60°)$$

$$= \operatorname{sen} 225°\cos 60° - \cos 225°\operatorname{sen} 60° \quad \text{Fórmula (9).}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 5 *Uso de la fórmula de la diferencia para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\cos 80° \cos 20° + \operatorname{sen} 80° \operatorname{sen} 20°$.

Solución La forma de la expresión $\cos 80° \cos 20° + \operatorname{sen} 80° \operatorname{sen} 20°$ es la del lado derecho de la fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$ con $\alpha = 80°$ y $\beta = 20°$. Entonces

$$\cos 80° \cos 20° + \operatorname{sen} 80° \operatorname{sen} 20° = \cos(80° - 20°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 *Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}$.

Solución Observamos que la forma de la expresión dada es la del lado derecho de la fórmula para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ con $\alpha = \pi/9$ y $\beta = \pi/18$. Así,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{18} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{18} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 7 *Determinación de valores exactos*

Si se sabe que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, y que $\operatorname{sen}\beta = -2/\sqrt{5} = -2\sqrt{5}/5$, $\pi < \beta < 3\pi/2$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\cos\alpha$ (b) $\cos\beta$ (c) $\cos(\alpha+\beta)$ (d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$

Solución (a) Véase la figura 2. Como $(x, 4)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y queda en el segundo cuadrante, tenemos

$$x^2 + 4^2 = 25, \qquad x < 0$$

$$x^2 = 25 - 16 = 9$$

$$x = -3$$

Así,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

FIGURA 2
Pado sen $\alpha = \frac{4}{5}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$

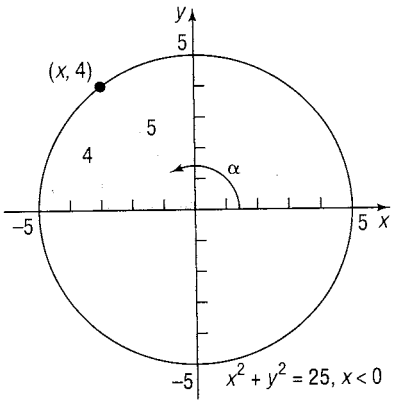
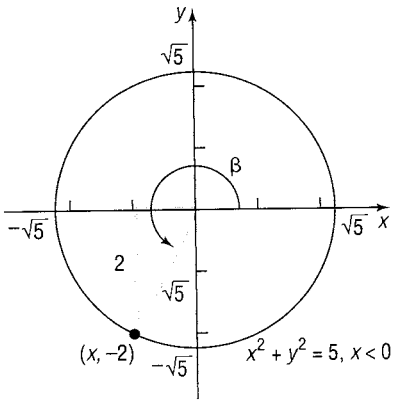


FIGURA 3
Pado sen $\beta = -2/\sqrt{5}, \pi < \beta < 3\pi/2$



(b) *Véase* la figura 3. Como $(x,-2)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 5$ y queda en el tercer cuadrante, tenemos

$$x^2 + (-2)^2 = 5, \qquad x < 0$$
$$x^2 = 5 - 4 = 1$$
$$x = -1$$

Así,

$$\cos \beta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) Al usar los resultados encontrados en las partes (a) y (b) y la fórmula (1), tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$= -\frac{3}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{11\sqrt{5}}{25}$$

(d)
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$= \frac{4}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

Ahora resuelva el problema 23.

Fórmulas para $\tan(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$

Usamos la identidad $\tan \theta = (\operatorname{sen} \theta)/(\cos \theta)$ y las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ al deducir una fórmula para $\tan(\alpha + \beta)$.

Demostración

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Ahora dividimos el numerador y el denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \dfrac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\dfrac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \dfrac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Usamos la fórmula de la tangente de una suma, $\tan(\alpha + \beta)$ para obtener la fórmula de la tangente de una diferencia:

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Así, hemos probado los enunciados siguientes:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \tag{10}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \tag{11}$$

En palabras, la fórmula (10) establece que la tangente de la suma de dos ángulos es igual a la tangente del primero más la tangente del segundo entre uno menos su producto.

Demostrar la identidad: $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\tan\theta + \tan\pi}{1 - \tan\theta\tan\pi} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - \tan\theta \cdot 0} = \tan\theta$$

El resultado obtenido en el ejemplo 8 verifica que la función tangente es periódica con periodo π, un hecho que fue mencionado anteriormente.

Advertencia: Tenga cuidado cuando use las fórmulas (10) y (11). Estas pueden ser usadas sólo para ángulos α y β para los cuales $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ están definidas, esto es, todos los ángulos excepto múltiplos impares de $\pi/2$.

Demostrar la identidad: $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

No podemos usar la fórmula (10), ya que $\tan(\pi/2)$ no está definida. En lugar de eso, procedemos como sigue:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$$

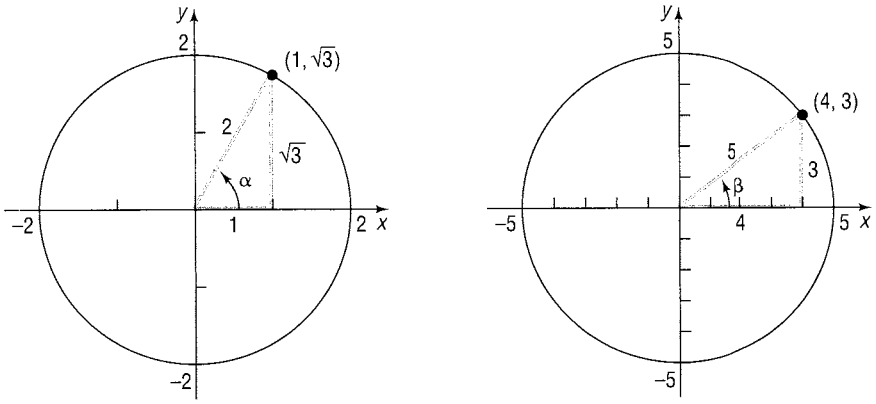
$$= \frac{(\operatorname{sen}\theta)(0) + (\cos\theta)(1)}{(\cos\theta)(0) - (\operatorname{sen}\theta)(1)} = \frac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$.

Sea $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ y $\beta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad 0 \le \alpha \le \pi, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\beta = \tfrac{3}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$

FIGURA 4



(a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, 0 \le \alpha \le \pi$ **(b)** $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}, -\pi/2 \le \beta \le \pi/2$

Con base en la figura 4, obtenemos $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{3}/2$ y $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Así,

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$$

Ahora resuelva el problema 57.

EJEMPLO 11 *Escribir una expresión trigonométrica como una expresión algebraica*

Escribir $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u + \cos^{-1}v)$ como una expresión algebraica que contenga a u y a v (esto es, sin funciones trigonométricas).

Solución Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}u$ y $\beta = \cos^{-1}v$. Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = u, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos\beta = v, \quad 0 \le \beta \le \pi$$

Ya que $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$, sabemos que $\cos\alpha \ge 0$. Como consecuencia,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - u^2}$$

De manera análoga, ya que $0 \le \beta \le \pi$, sabemos que $\operatorname{sen}\beta \ge 0$. Así,

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - v^2}$$

Ahora,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u + \cos^{-1}v) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$= uv + \sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}$$

Resumen

El siguiente recuadro sintetiza las fórmulas para la suma y la diferencia:

Fórmulas para la suma y la diferencia

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Ejercicio 7.2

En los problemas del 1 al 12 encuentre el valor exacto de cada función trigonométrica.

1. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$ **2.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ **3.** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **4.** $\tan\frac{7\pi}{12}$ **5.** $\cos 165°$ **6.** $\operatorname{sen} 105°$

7. $\tan 15°$ **8.** $\tan 195°$ **9.** $\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}$ **10.** $\tan\frac{19\pi}{12}$ **11.** $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **12.** $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

En los problemas del 13 al 22 encuentre el valor exacto de cada expresión.

13. $\operatorname{sen} 20°\cos 10° + \cos 20°\operatorname{sen} 10°$

14. $\operatorname{sen} 20°\cos 80° - \cos 20°\operatorname{sen} 80°$

15. $\cos 70°\cos 20° - \operatorname{sen} 70°\operatorname{sen} 20°$

16. $\cos 40°\cos 10° + \operatorname{sen} 40°\operatorname{sen} 10°$

17. $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20°\tan 25°}$

18. $\dfrac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40°\tan 10°}$

19. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$

20. $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$

21. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{18}$

En los problemas del 23 al 28 encuentre el valor exacto de lo siguiente bajo las condiciones dadas:

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ *(b)* $\cos(\alpha + \beta)$ *(c)* $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ *(d)* $\tan(\alpha - \beta)$

23. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\cos\beta = 2/\sqrt{5}$, $-\pi/2 < \beta < 0$

24. $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\operatorname{sen}\beta = -\frac{4}{5}$, $-\pi/2 < \beta < 0$

25. $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \pi/2$

26. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

27. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, $-3\pi/2 < \alpha < -\pi$; $\tan\beta = -\sqrt{3}$, $\pi/2 < \beta < \pi$

28. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi/2 < \alpha < 0$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, $0 < \beta < \pi/2$

En los problemas del 29 al 54 demuestre cada identidad.

29. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

30. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$

31. $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

32. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

33. $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$

34. $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

35. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

36. $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$

37. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

38. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$

39. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

40. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = 1 + \cot\alpha\tan\beta$

42. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

43. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1-\tan\alpha\tan\beta$

44. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=\cot\alpha+\tan\beta$

45. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

46. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

47. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$

48. $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

49. $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{\csc\alpha\csc\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}$

50. $\sec(\alpha-\beta)=\dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

51. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

52. $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

53. $\operatorname{sen}(\theta+k\pi)=(-1)^k\cdot\operatorname{sen}\theta$, k cualquier entero

54. $\cos(\theta+k\pi)=(-1)^k\cdot\cos\theta$, k cualquier entero

En los problemas 55 al 64 encuentre el valor exacto de cada expresión.

55. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}0)$

56. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos^{-1}1\right)$

57. $\operatorname{sen}[\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}(-\frac{4}{5})]$

58. $\operatorname{sen}[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{4}{5})-\tan^{-1}\frac{3}{4}]$

59. $\cos(\tan^{-1}\frac{4}{3}+\cos^{-1}\frac{5}{13})$

60. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}\frac{5}{12}-\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{5})]$

61. $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{13}-\tan^{-1}\frac{3}{4})$

62. $\sec(\tan^{-1}\frac{4}{3}+\cot^{-1}\frac{5}{12})$

63. $\cot\left(\sec^{-1}\dfrac{5}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

64. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\csc^{-1}\dfrac{5}{3}\right)$

En los problemas del 65 al 70, escriba cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica que contenga u y v.

65. $\cos(\cos^{-1}u+\operatorname{sen}^{-1}v)$

66. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u-\cos^{-1}v)$

67. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}u-\operatorname{sen}^{-1}v)$

68. $\cos(\tan^{-1}u+\tan^{-1}v)$

69. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}u-\cos^{-1}v)$

70. $\sec(\tan^{-1}u+\cos^{-1}v)$

71. Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x)=\operatorname{sen}x$ está dado por

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\cos x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}-\operatorname{sen}x\cdot\frac{1-\cos h}{h}$$

72. Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x)=\cos x$ está dado por

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\operatorname{sen}x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}-\cos x\cdot\frac{1-\cos h}{h}$$

73. Demuestre que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u+\cos^{-1}u)=1$.

74. Demuestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1}u+\cos^{-1}u)=0$.

75. Explique por qué la fórmula (11) no puede ser utilizada para demostrar que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

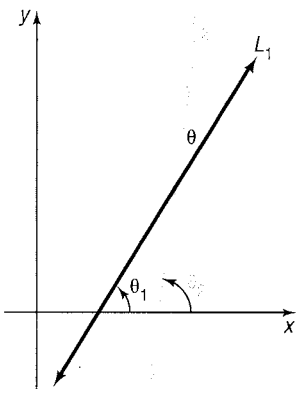
Establezca esta identidad utilizando las fórmulas (7a) y (7b).

76. Si $\tan\alpha=x+1$ y $\tan\beta=x-1$, demuestre que $2\cot(\alpha-\beta)=x^2$.

77. Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales que se cortan, y sea θ el ángulo agudo entre ellas (*véase* la figura). Demuestre que

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. [*Sugerencia:* Utilice el hecho de que $\tan\theta_1=m_1$ y $\tan\theta_2=m_2$.]



78. Si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y $\cot\theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$, $0 < \theta < 90°$, demuestre que

$$\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\operatorname{sen}(\beta - \theta)\operatorname{sen}(\gamma - \theta)$$

79. Analice la siguiente deducción:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan\theta + \tan(\pi/2)}{1 - \tan\theta\tan(\pi/2)} = \frac{\dfrac{\tan\theta}{\tan(\pi/2)} + 1}{\dfrac{1}{\tan(\pi/2)} - \tan\theta} = \frac{0 + 1}{0 - \tan\theta} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

¿Puede justificar cada paso?

Fórmulas para ángulo doble y ángulo medio

En esta sección deduciremos fórmulas para $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$ y $\cos\frac{1}{2}\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Son fáciles de deducir utilizando las fórmulas para la suma.

Fórmulas para ángulo doble

En la suma para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$, sea $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}(\theta + \theta) &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\theta + \theta) &= \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\end{aligned} \tag{2}$$

Una aplicación de la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ conduce a otras dos formas de escribir la fórmula (2) para $\cos 2\theta$:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

y

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

Así, hemos establecido las **fórmulas para ángulo doble** siguientes:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{3}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \tag{4a}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \tag{4b}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \tag{4c}$$

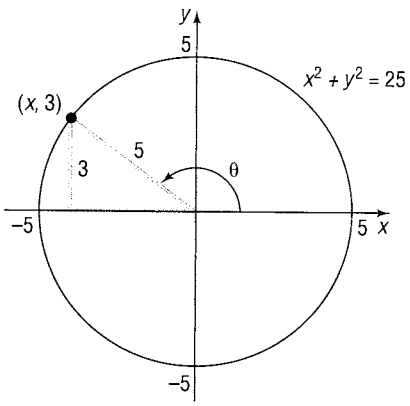
EJEMPLO 1 Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\operatorname{sen} 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$

Solución

(a) Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y ya sabemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, sólo necesitamos encontrar $\cos\theta$ (véase la figura 5). Como $\pi/2 < \theta < \pi$, resulta que $(x, 3)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y queda en el segundo cuadrante. Así,

FIGURA 5



$$x^2 + 3^2 = 25, \qquad x < 0$$
$$x^2 = 25 - 9 = 16$$
$$x = -4$$

Así, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Ahora usaremos la fórmula (3) para obtener

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 2(\tfrac{3}{5})(-\tfrac{4}{5}) = -\tfrac{24}{25}$$

(b) Ya que se nos dio $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, es más fácil usar la fórmula (4b) para obtener 2θ:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2(\tfrac{9}{25}) = 1 - \tfrac{18}{25} = \tfrac{7}{25}$$

Advertencia: En el resultado de $\cos 2\theta$ del ejemplo 1(b), elegimos usar una versión de la fórmula para ángulo doble, la fórmula (4b). Observe que no podemos usar la identidad pitagórica $\cos 2\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 2\theta}$, con $\operatorname{sen} 2\theta = -\frac{24}{25}$, ya que no tenemos forma de saber cuál signo elegir.

Ahora resuelva los problemas 1(a) y 1(b).

EJEMPLO 2 *Demostración de identidades*

(a) Desarrollar una fórmula para $\tan 2\theta$ en términos de $\tan\theta$.

(b) Desarrollar una fórmula para $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Solución (a) En la fórmula de la suma para $\tan(\alpha + \beta)$, hacemos $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$
$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta \tan\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \tag{5}$$

(b) Para obtener una fórmula para $\operatorname{sen} 3\theta$, usamos la fórmula para la suma y escribimos 3θ como $2\theta + \theta$.

$$\operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen}(2\theta + \theta) = \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta$$

Ahora usamos las fórmulas para el ángulo doble para obtener

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\theta &= (2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)(\cos\theta) + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\operatorname{sen}\theta) \\ &= 2 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta \\ &= 3 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

La fórmula obtenida en el ejemplo 2(b) también puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta &= 3 \operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^3\theta \\ &= 3 \operatorname{sen}\theta - 4 \operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

Esto es, $\operatorname{sen} 3\theta$ es un polinomio de tercer grado en la variable $\operatorname{sen}\theta$. En realidad, $\operatorname{sen} n\theta$, n, siendo un entero impar positivo, siempre puede ser escrito como un polinomio de grado n en la variable $\operatorname{sen}\theta$ *.

*Debido al trabajo realizado por P. L. Chebyshëv, algunas veces estos polinomios son llamados *polinomios de Chebyshëv.*

Ahora resuelva el problema 47.

Otras variaciones de las fórmulas para el ángulo doble

Al reacomodar las fórmulas para el ángulo doble (4b) y (4c), obtenemos otras que usaremos un poco más adelante en esta sección.

Si resolvemos la fórmula (4b) para $\operatorname{sen}^2 \theta$, obtenemos

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$$
$$2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{6}$$

De manera análoga, podemos resolver para $\cos^2 \theta$ en la fórmula (4c):

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \tag{7}$$

Las fórmulas (6) y (7) pueden ser usadas para desarrollar una fórmula para $\tan^2 \theta$:

$$\tan^2 \theta = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \tag{8}$$

Las fórmulas (6), (7) y (8) no tienen que ser memorizadas ya que su deducción es muy simple.

Las fórmulas (6) y (7) son importantes en cálculo. El ejemplo siguiente ilustra un problema que surge en cálculo y necesita el uso de la fórmula (7).

EJEMPLO 1 Demostración de una identidad

Escribir una expresión equivalente para $\cos^4 \theta$ que no involucre ninguna potencia de seno o coseno mayor que uno.

Solución Aquí la idea es aplicar la fórmula (7) dos veces:

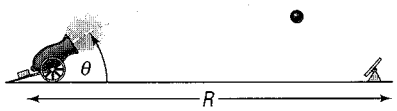
$$\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 \qquad \text{Fórmula (7).}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\left[\frac{1 + \cos 2(2\theta)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}(1 + \cos 4\theta)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$$

Ahora resuelva el problema 23.

Identidades tales como las fórmulas para el ángulo doble, algunas veces pueden ser usadas para reescribir expresiones en forma más adecuada. *Veamos* el ejemplo siguiente.

FIGURA 6



Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ con respecto a la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia horizontal R que recorre el objeto, el **alcance,** está dada por

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

(a) Demostrar que $R = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Encontrar el ángulo θ para el cual R es máximo.

(a) Reescribimos la expresión dada para el alcance usando la fórmula para el ángulo doble $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$. Entonces

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \frac{1}{16} v_0^2 \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

(b) En esta forma, el valor más grande para el alcance R puede ser encontrado fácilmente. Para una velocidad inicial fija v_0, el ángulo de inclinación θ con respecto a la horizontal determina el valor de R. Como el valor más grande de la función seno es 1, y ocurre cuando el argumento es 90°, resulta que para que R sea máximo debemos tener

$$2\theta = 90°$$
$$\theta = 45°$$

Con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal se obtiene un alcance máximo.

Fórmulas para medio ángulo

Otro uso importante de las fórmulas (6), (7) y (8) se da al **probar las fórmulas para medio ángulo.** En las fórmulas (6), (7) y (8), hacemos $\theta = \alpha/2$. Entonces:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \tag{9}$$

Si resolvemos para las funciones trigonométricas que aparecen en los miembros izquierdos de las ecuaciones (9), obtenemos las fórmulas para medio ángulo:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{10a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{10b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{10c}$$

donde el signo + o − se determina por el cuadrante del ángulo $\alpha/2$.

Usamos las fórmulas de medio ángulo en el ejemplo siguiente.

Encontrar el valor exacto de:

(a) $\cos 15°$ (b) $\operatorname{sen}(-15°)$

(a) Ya que $15° = 30°/2$, podemos usar la fórmula para medio ángulo de $\cos(\alpha/2)$ con $\alpha = 30°$. También, como 15° está en el primer cuadrante, $\cos 15° > 0$, y elegimos el signo + al usar la fórmula (10b):

$$\cos 15° = \cos\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(b) Usamos el hecho de que $\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} 15°$ y entonces aplicamos la fórmula (10a):

$$\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen}\frac{30°}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Es interesante comparar la respuesta encontrada en el ejemplo 5(a) con la del ejemplo 2 de la sección 7.2. Ahí calculamos

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

Con base en estos resultados, concluimos que

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

son iguales. (Como cada expresión es positiva, podemos verificar esta igualdad elevando al cuadrado cada expresión.) Así, se pueden obtener dos respuestas de apariencia muy diferente, pero correctas, dependiendo del enfoque tomado para resolver un problema.

Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 6 *Determinación de valores exactos usando fórmulas para medio ángulo*

Si $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ (b) $\cos \frac{\alpha}{2}$ (c) $\tan \frac{\alpha}{2}$

Solución Primero, observamos que si $\pi < \alpha < 3\pi/2$ entonces $\pi/2 < \alpha/2 < 3\pi/4$. Como consecuencia, $\alpha/2$ pertenece al segundo cuadrante.

(a) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(\alpha/2) > 0$. Así, usamos el signo + en la fórmula (10a) para obtener

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(b) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\cos(\alpha/2) < 0$. Así, usamos el signo − en la fórmula (10b) para obtener

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\tan(\alpha/2) > 0$. Así, usamos el signo − en la fórmula (10c) para obtener

$$\tan \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{1 + (-\frac{3}{5})}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -2$$

Otra manera de resolver el ejemplo 6(c) es usando las soluciones encontradas en las partes (a) y (b):

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2\sqrt{5}/5}{-\sqrt{5}/5} = -2$$

Ahora resuelva los problemas 1(c) y 1(d).

Hay una fórmula para $\tan(\alpha/2)$ que no tiene signo + ni −, lo cual la hace más útil que la fórmula 10(c). Como

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{Fórmula 9}$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{Fórmula para ángulo doble}$$

tenemos

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ya que también puede demostrarse que

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

tenemos las siguientes dos fórmulas para medio ángulo:

Fórmulas de medio ángulo para tan $\alpha/2$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{11}$$

Con esta fórmula, la solución para el ejemplo 6(c) puede ser dada como

$$\cos\alpha=-\tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\tfrac{9}{25}}=-\sqrt{\tfrac{16}{25}}=-\tfrac{4}{5}$$

Así por la ecuación (11),

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1-(-\frac{3}{5})}{-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}}=-2$$

El ejemplo siguiente ilustra un problema que surge en cálculo.

EJEMPLO *Uso de las fórmulas para medio ángulo en cálculo*

Si $z=\tan(\alpha/2)$, demostrar que:

(a) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2z}{1+z^2}$ (b) $\cos\alpha=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

Solución (a)

$$\frac{2z}{1+z^2}=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=\frac{2\tan(\alpha/2)}{\sec^2(\alpha/2)}=\frac{2\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}}{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha/2)}}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\operatorname{sen}2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha$$

Fórmula (3) para ángulo doble.

(b)

$$\frac{1-z^2}{1+z^2}=\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}}$$

$$=\frac{\cos^2(\alpha/2)-\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}=\frac{\cos 2(\alpha/2)}{1}=\cos\alpha$$

Fórmula para ángulo doble y la identidad pitagórica

Ejercicio 7.3

En los problemas del 1 al 10 utilice la información dada acerca del ángulo θ para encontrar el valor exacto de:

(*a*) $\operatorname{sen} 2\theta$ (*b*) $\cos 2\theta$ (*c*) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ (*d*) $\cos\frac{\theta}{2}$

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \pi/2$

2. $\cos\theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \pi/2$

3. $\tan\theta = \frac{4}{3}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$

4. $\tan\theta = \frac{1}{2}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$

5. $\cos\theta = -\sqrt{2}/\sqrt{3}, \quad \pi/2 < \theta < \pi$

6. $\operatorname{sen}\theta = -1/\sqrt{3}, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

7. $\sec\theta = 3, \quad \operatorname{sen}\theta > 0$

8. $\csc\theta = -\sqrt{5}, \quad \cos\theta < 0$

9. $\cot\theta = -2, \quad \sec\theta < 0$

10. $\sec\theta = 2, \quad \csc\theta < 0$

11. $\tan\theta = -3, \quad \operatorname{sen}\theta < 0$

12. $\cot\theta = 3, \quad \cos\theta < 0$

En los problemas del 13 al 22 utilice las fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de cada función trigonométrica.

13. $\operatorname{sen} 22.5°$

14. $\cos 22.5°$

15. $\tan\frac{7\pi}{8}$

16. $\tan\frac{9\pi}{8}$

17. $\cos 165°$

18. $\operatorname{sen} 195°$

19. $\sec\frac{15\pi}{8}$

20. $\csc\frac{7\pi}{8}$

21. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

22. $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$

23. Demuestre que $\operatorname{sen}^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$.

24. Desarrolle una fórmula para $\cos 3\theta$ como un polinomio de tercer grado en la variable $\cos\theta$.

25. Demuestre que $\operatorname{sen}^4\theta = (\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta)$.

26. Desarrolle una fórmula para $\cos 4\theta$ como un polinomio de cuarto grado en la variable $\cos\theta$.

27. Desarrolle una fórmula para $\operatorname{sen} 5\theta$ como un polinomio de quinto grado en la variable $\operatorname{sen}\theta$.

28. Desarrolle una fórmula para $\cos 5\theta$ como un polinomio de quinto grado en la variable $\cos\theta$.

En los problemas del 29 al 48 demuestre cada identidad.

29. $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = \cos 2\theta$

30. $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos 2\theta$

31. $\cot 2\theta = \dfrac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$

32. $\cot 2\theta = \frac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta)$

33. $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$

34. $\csc 2\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\csc\theta$

35. $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 4\theta$

36. $(4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen} 4\theta$

37. $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

38. $\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)$

39. $\sec^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

40. $\csc^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

41. $\cot^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

42. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

43. $\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$

44. $1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

45. $\dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$

46. $\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = 2\tan 2\theta$

47. $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

48. $\tan\theta + \tan(\theta + 120°) + \tan(\theta + 240°) = 3\tan 3\theta$

En los problemas del 49 al 62 encuentre el valor exacto de cada expresión.

49. $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2})$ **50.** $\operatorname{sen}[2 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)]$ **51.** $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$ **52.** $\cos(2 \cos^{-1} \frac{4}{5})$

53. $\tan[2 \cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$ **54.** $\tan(2 \tan^{-1} \frac{3}{4})$ **55.** $\operatorname{sen}(2 \cos^{-1} \frac{4}{5})$ **56.** $\cos[2 \tan^{-1}(-\frac{4}{3})]$

57. $\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5})$ **58.** $\cos^2(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$ **59.** $\sec(2 \tan^{-1} \frac{3}{4})$ **60.** $\csc[2 \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{5})]$

61. $\cot^2(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{4}{3})$ **62.** $\cot^2(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{5}{13})$

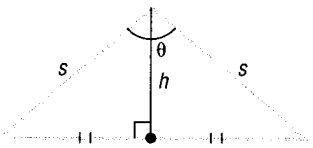
63. Encuentre el valor del número C: $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x$

64. Encuentre el valor del número C: $\frac{1}{2} \cos^2 x + C = \frac{1}{4} \cos 2x$

65. **Área de un triángulo isósceles.** Demuestre que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son de longitud s y el ángulo entre ellos es θ es

$$A = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} \theta$$

[*Sugerencia:* *Véase* la ilustración. La altura h bisecta el ángulo θ y es la mediatriz de la base.]



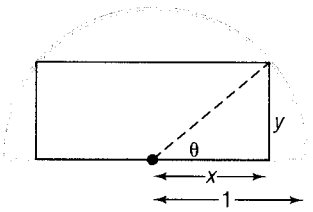
66. **Geometría.** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1. *Véase* la ilustración.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

(b) Demuestre que $A = \operatorname{sen} 2\theta$.

(c) Encuentre el ángulo θ con el que se obtiene el área más grande A.

(d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo más grande.



67. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ para $0 \le x \le 2\pi$ usando las ideas de desplazamiento, compresión, etcétera.

68. Repita el problema 67 para $g(x) = \cos^2 x$.

69. Use el hecho de que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

para encontrar $\operatorname{sen}(\pi/24)$ y $\cos(\pi/24)$.

70. Demuestre que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

y úselo para encontrar $\operatorname{sen}(\pi/16)$ y $\cos(\pi/16)$.

71. Demuestre que $\operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen}^3(\theta + 120°) + \operatorname{sen}^3(\theta + 240°) = -\frac{3}{4} \operatorname{sen} 3\theta$.

72. Si $\tan \theta = a \tan(\theta/3)$, exprese $\tan(\theta/3)$ en términos de a.

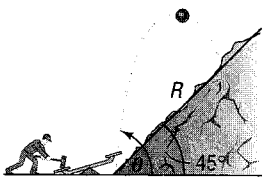
En los problemas 73 y 74 demuestre cada identidad.

73. $\ln|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2\theta| - \ln 2)$

74. $\ln|\cos \theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 + \cos 2\theta| - \ln 2)$

75. **Lanzamiento de proyectiles.** Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90$, con respecto a la horizontal y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que hace un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia R que el objeto recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por

$$R = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{32} \cos \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$



(a) Demuestre que

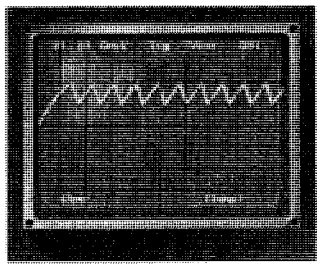
$$R = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{64} (\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

Trace la gráfica de $R = R(\theta)$. ¿Qué valor de θ hace más grande a R?

76. *Curva dientes de sierra.* Con frecuencia un osciloscopio muestra una curva dientes de sierra. Esta curva puede ser aproximada por curvas senoidales de periodos y amplitudes variables. Una primera aproximación está dada por

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\pi x.$$

Demuestre que $y = \operatorname{sen} 2\pi x \cos^2 \pi x$.



77. Vaya a la biblioteca e investigue acerca de los polinomios de Chebyshëv. Escriba un reporte de su investigación.

Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

Las fórmulas de suma y resta pueden ser usadas al deducir fórmulas para escribir los productos de senos y/o, cosenos como sumas o restas. Estas identidades por lo regular son llamadas **fórmulas de producto a suma.**

Teorema
Fórmulas de producto a suma

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (1)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (2)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] \quad (3)$$

Estas fórmulas no tienen que ser memorizadas. En lugar de eso, debe recordar cómo fueron deducidas. Luego, cuando quiera usarlas, véalas o dedúzcalas, según sea necesario.

Para deducir las fórmulas (1) y (2) anote las de suma y resta para el coseno:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (4)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (5)$$

Reste la ecuación (5) de la ecuación (4) para obtener

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

de lo cual

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Ahora, sume las ecuaciones (4) y (5) para obtener

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

de lo cual

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Para deducir la fórmula (3) de producto a suma, use las fórmulas para la suma y la resta del seno de manera análoga. (Se le pide que haga esto en el problema 41 al final de esta sección.)

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 7

¿QUÉ TAN LEJOS Y TAN ALTO DEBE IR UNA PELOTA DE BÉISBOL PARA QUE UN CUADRANGULAR SALGA DEL CAMPO DE JUEGO?

Los cronistas de los Indios de Cleveland decidieron estar mejor preparados para enfrentar cualquier eventualidad que pudiera presentarse cuando el nuevo parque de béisbol, Campo Jacob, abriera en 1994. Algo que les preocupaba era acerca de que Bell bateara un cuadrangular que resultara más alto y lejano que el lado izquierdo del parque. ¿Qué le dirían en ese caso a sus radioescuchas acerca de la altura y distancia de la pelota?

De modo que llamaron al equipo de Misión posible. Los cronistas necesitaban saber la distancia desde el home al punto más alto del estadio, y la distancia desde el nivel del suelo al punto más alto del estadio a cada cinco grados desde la línea de tercera base hasta la línea de primera base. El problema se complicó porque la distancia desde el home a la barda del jardín variaba desde 325 hasta 410 pies. Además, la altura que se tendría que librar también variaba, dependiendo de hacia dónde fuese golpeada la bola.

1. Primero, ¿cuántas distancias y alturas quieren conocer los cronistas deportivos?
2. Para apreciar una solución, use la distancia desde el home, cruzando la segunda base hasta la barda del jardín, 410 pies. Usando un tránsito, se encuentra que el ángulo de elevación desde el home hasta el punto más alto del estadio es de 10°, y que el ángulo de elevación desde la base de la barda del jardín hasta el punto más alto del estadio es de 32.5°. Use esta información para encontrar la distancia mínima desde el home hasta el punto más alto del estadio y la distancia desde el nivel del suelo hasta el punto más alto del estadio.
3. Usted dice a los cronistas deportivos que si le proporcionan los dos ángulos de elevación para cada cinco grados alrededor del estadio podrá resolver el problema. Después de conocer estos dos ángulos usted decide que sería más rápido desarrollar una fórmula general; de modo que, a partir de dichos ángulos y distancia desde el home a la barda, serían calculadas la distancia desde el home al techo y la altura del techo. Sean α y β los ángulos de elevación desde el home y la base de la barda del jardín, respectivamente, hasta el punto más alto en el techo, y sea L la distancia desde el home hasta la barda del jardín. ¿Cuáles son las fórmulas correctas?
4. Compare sus fórmulas con las de otros equipos. ¿Son iguales? ¿Son equivalentes? ¿Cuáles son más sencillas?
5. Ahora escriba cada fórmula correcta en la forma que se muestra a continuación:

$$\text{altura} = \frac{L \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} \qquad \text{distancia} = \frac{L \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

6. ¿Cuál es la trayectoria probable de una pelota bateada en un día sin viento? ¿Cómo podrían el viento y otros factores afectar la trayectoria de la pelota?
7. Si un jugador batea un cuadrangular fuera del parque, ¿cómo se compararía la distancia recorrida por la pelota con las cifras desarrolladas por usted para los cronistas deportivos? ¿Qué otros factores agregaría a la distancia?
8. ¿Podría haber un cuadrangular más largo? ¿Cómo lo mediría?

EJEMPLO 1 *Expresar productos como sumas*

Expresar cada uno de los productos siguientes como una suma que contenga sólo senos y cosenos:

(a) $\operatorname{sen} 6\theta \operatorname{sen} 4\theta$ (b) $\cos 3\theta \cos \theta$ (c) $\operatorname{sen} 3\theta \cos 5\theta$

Solución (a) Usamos la fórmula (1) para obtener

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 6\theta \operatorname{sen} 4\theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(6\theta - 4\theta) - \cos(6\theta + 4\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 10\theta)\end{aligned}$$

(b) Usamos la fórmula (2) para obtener

$$\begin{aligned}\cos 3\theta \cos \theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta)\end{aligned}$$

(c) Con la fórmula (3) obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\theta \cos 5\theta &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(3\theta + 5\theta) + \operatorname{sen}(3\theta - 5\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen}(-2\theta)] = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 8\theta - \operatorname{sen} 2\theta)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1.

Las **fórmulas de suma a producto** se dan a continuación.

Teorema **fórmulas de suma a producto**

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{7}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{8}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{9}$$

Deduciremos la fórmula (6) y dejaremos las deducciones de las fórmulas (7), (8) y (9) como ejercicio (*véanse* los problemas 42, 43 y 44).

Demostración

$$2 \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Fórmula (3) producto a suma.

$$= \operatorname{sen}\frac{2\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{2\beta}{2} = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

EJEMPLO 2 *Expresar sumas (o restas) como un producto*

Expresar cada suma o diferencia como un producto de senos y/o, cosenos:

(a) $\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta$ (b) $\cos 3\theta + \cos 2\theta$

Solución (a) Usamos la fórmula (7) para obtener

$$\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta = 2 \operatorname{sen} \frac{5\theta - 3\theta}{2} \cos \frac{5\theta + 3\theta}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen} \theta \cos 4\theta$$

(b) $$\cos 3\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{3\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{3\theta - 2\theta}{2}$$ Fórmula (8)

$$= 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Ahora resuelva el problema 11.

Ejercicio 7.4

En los problemas del 1 al 10 exprese cada producto como una suma que sólo contenga senos o cosenos.

1. $\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} 2\theta$ **2.** $\cos 4\theta \cos 2\theta$ **3.** $\operatorname{sen} 4\theta \cos 2\theta$ **4.** $\operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 5\theta$

5. $\cos 3\theta \cos 5\theta$ **6.** $\operatorname{sen} 4\theta \cos 6\theta$ **7.** $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta$ **8.** $\cos 3\theta \cos 4\theta$

9. $\operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ **10.** $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{5\theta}{2}$

En los problemas del 11 al 18 exprese cada suma o diferencia como un producto de senos y/o, cosenos.

11. $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 2\theta$ **12.** $\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ **13.** $\cos 2\theta + \cos 4\theta$ **14.** $\cos 5\theta - \cos 3\theta$

15. $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta$ **16.** $\cos \theta + \cos 3\theta$ **17.** $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}$ **18.** $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}$

En los problemas del 19 al 36 demuestre cada identidad.

19. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta}{2 \operatorname{sen} 2\theta} = \cos \theta$ **20.** $\dfrac{\cos \theta + \cos 3\theta}{2 \cos 2\theta} = \cos \theta$ **21.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \tan 3\theta$

22. $\dfrac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta} = \tan 2\theta$ **23.** $\dfrac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta} = \tan \theta$ **24.** $\dfrac{\cos \theta - \cos 5\theta}{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 5\theta} = \tan 2\theta$

25. $\operatorname{sen} \theta(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta) = \cos \theta(\cos \theta - \cos 3\theta)$ **26.** $\operatorname{sen} \theta(\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta) = \cos \theta(\cos 3\theta - \cos 5\theta)$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \tan 6\theta$ **28.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta - \cos 8\theta} = -\cot 6\theta$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta} = -\dfrac{\tan 6\theta}{\tan 2\theta}$ **30.** $\dfrac{\cos 4\theta - \cos 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \tan 2\theta \tan 6\theta$

31. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta} = \tan \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cot \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ **32.** $\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cot \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

33. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ **34.** $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

35. $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta = 4 \cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta$

36. $1 - \cos 2\theta + \cos 4\theta - \cos 6\theta = 4 \operatorname{sen} \theta \cos 2\theta \operatorname{sen} 3\theta$

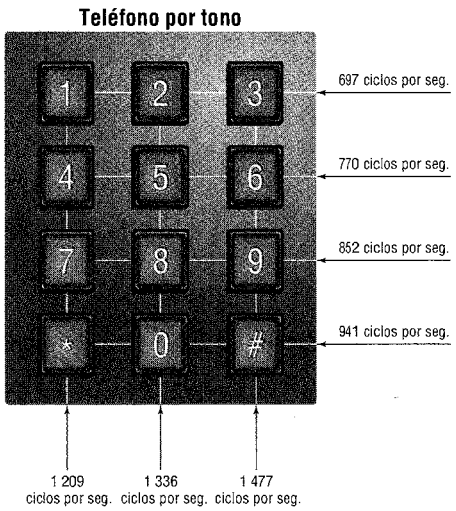
37. *Teléfonos por tono.* En un teléfono por tono, cada botón produce un sonido único. El sonido producido es la suma de dos tonos, dados por

$$y = \text{sen } 2\pi lt \quad \text{y} \quad y = \text{sen } 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias baja y alta (ciclos por segundo) mostradas en la ilustración. Por ejemplo, si oprime el 7, la frecuencia baja es $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es $h = 1209$ ciclos por segundo. El sonido producido al oprimir el 7 es

$$y = \text{sen } 2\pi(852)t + \text{sen } 2\pi(1\ 209)t$$

Escriba este sonido como un producto de senos y/o, cosenos.



38. Escriba el sonido producido al oprimir la tecla # como un producto de senos y/o, cosenos.

39. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que
$\text{sen } 2\alpha + \text{sen } 2\beta + \text{sen } 2\gamma = 4 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$.

40. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que
$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.

41. Deduzca la fórmula (3). **42.** Deduzca la fórmula (7).

43. Deduzca la fórmula (8). **44.** Deduzca la fórmula (9).

5.5 Ecuaciones trigonométricas

Las secciones anteriores de este capítulo trataron acerca de identidades trigonométricas —esto es, **ecuaciones que involucran funciones trigonométricas** que se satisfacen para todo valor en el dominio de la variable. En esta sección analizaremos ecuaciones trigonométricas —esto es, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen sólo para algunos valores de la variable (o, tal vez, no se satisfagan para ningún valor de la variable). Los valores que satisfacen la ecuación son llamados **soluciones** de la ecuación.

EJEMPLO 1 *Verificar si un número dado es una solución de una ecuación trigonométrica*

Determinar si $\theta = \pi/4$ es una solución de la ecuación $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$. ¿$\theta = \pi/6$ es una solución?

Solución Reemplace θ por $\pi/4$ en la ecuación dada. El resultado es

$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Concluimos que $\pi/4$ no es una solución.

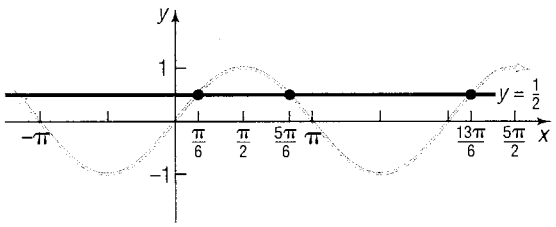
Ahora, reemplazamos θ por $\pi/6$ en la ecuación. El resultado es

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Así, $\pi/6$ es una solución de la ecuación dada. ■

La ecuación del ejemplo 1 tiene otras soluciones además de $\theta = \pi/6$. Por ejemplo, $\theta = 5\pi/6$ también es solución, así como $\theta = 13\pi/6$. (Usted tiene que

FIGURA 7
$y = \operatorname{sen} x$



verificar esto.) En realidad, la ecuación tiene un número infinito de soluciones debido a la periodicidad de la función seno, como puede verse en la figura 7.

A menos que se indique otra cosa, al resolver ecuaciones trigonométricas necesitamos encontrar *todas* las soluciones. Como lo ilustra el ejemplo siguiente, la determinación de todas las soluciones puede ser realizada encontrando las soluciones en un intervalo cuya longitud sea igual al periodo de la función, sumando luego múltiplos de ese periodo a las soluciones encontradas. Veamos algunos ejemplos.

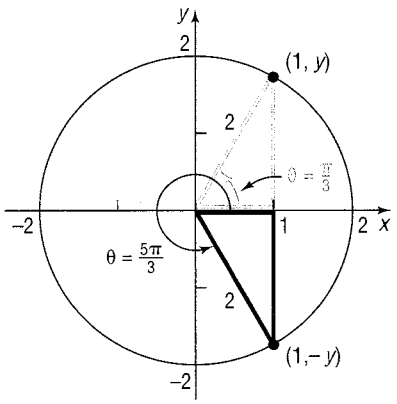
EJEMPLO 2 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\cos \theta = \frac{1}{2}$

Solución El periodo de la función coseno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, hay dos ángulos θ para los cuales $\cos \theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$. *Véase* la figura 8. Ya que la función coseno tiene periodo 2π, todas las soluciones de $\cos \theta = \frac{1}{2}$ pueden ser dadas por

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

FIGURA 8
$\cos \theta = \frac{1}{2}$



En la mayor parte de nuestro trabajo, sólo nos interesa encontrar las soluciones de ecuaciones trigonométricas para $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación: $\operatorname{sen} 2\theta = 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la función seno tiene el valor 1 sólo en $\pi/2$. Ya que en la ecuación dada el argumento es 2θ, tenemos

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de sen $2\theta = 1$ son $\pi/4$ ($k = 0$) y $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$ ($k = 1$). Observe que $k = -1$ da $\theta = -3\pi/4$ y $k = 2$ da $\theta = 9\pi/4$, ambas quedan fuera de $[0, 2\pi)$.

Advertencia: Al resolver una ecuación trigonométrica para θ, $0 \le \theta < 2\pi$, en la que el argumento no es θ (como en el ejemplo 3), primero debe anotar todas las soluciones y luego enlistar aquellas que están en el intervalo $[0, 2\pi)$. De lo contrario, las soluciones pueden perderse. Por ejemplo, al resolver sen $2\theta = 1$, si usted sólo escribe la solución $2\theta = \pi/2$ encontrará únicamente $\theta = \pi/4$ y perderá la solución $\theta = 5\pi/4$.

Ahora resuelva el problema 7.

EJEMPLO 4 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

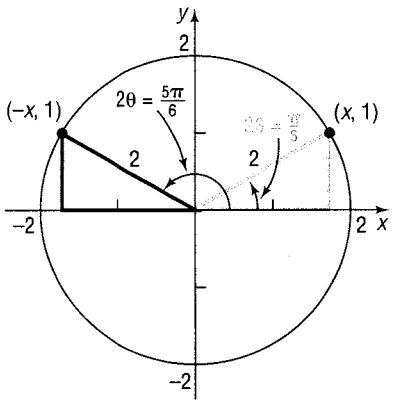
Resuelva la ecuación: sen $2\theta = \frac{1}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Solución El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la función seno tiene el valor $\frac{1}{2}$ en $\pi/6$ y en $5\pi/6$. *Véase* la figura 9. En consecuencia, ya que el argumento es 2θ en la ecuación sen $2\theta = \frac{1}{2}$ tenemos

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

FIGURA 9
sen $2\theta = \frac{1}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$



En el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de sen $2\theta = \frac{1}{2}$ son $\pi/12$, $\pi/12 + \pi = 13\pi/12$, $5\pi/12$, y $5\pi/12 + \pi = 17\pi/12$.

EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\tan \frac{\theta}{4} = 1$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función tangente es π. En el intervalo $[0, \pi)$, la función tangente tiene el valor 1 sólo en $\pi/4$. Ya que en la ecuación dada el argumento es $\theta/4$, tenemos

$$\frac{\theta}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \pi + 4k\pi$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, $\theta = \pi$ es la única solución.

EJEMPLO 6 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Usar una calculadora para resolver la ecuación: sen $\theta = 0.3$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución Para resolver sen $\theta = 0.3$ en una calculadora, primero seleccionamos el modo. Si lo ponemos en radianes, encontramos

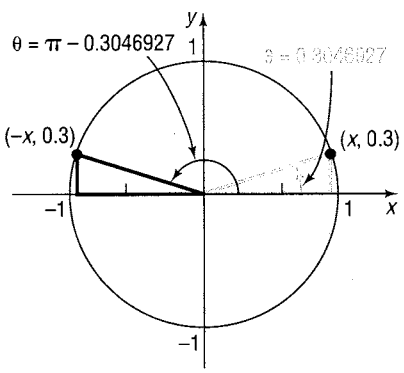
Expresión: 0.3 SHIFT sen^{-1} sen

Display: 0.3 0.3046927

El ángulo 0.3046927 radianes es el ángulo $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ para el cual sen $\theta = 0.3$. Otro ángulo para el que sen $\theta = 0.3$ es $\pi - 0.3046927$. *Véase* la figura 10. El ángulo $\pi - 0.3046927$ es el ángulo en el segundo cuadrante donde sen $\theta = 0.3$. Así, las soluciones para sen $\theta = 0.3$, $0 \le \theta < 2\pi$, son

$$\theta = 0.3046927 \quad \text{o} \quad \pi - 0.3046927 \approx 2.8369$$

FIGURA 10
sen $\theta = 0.3$



Advertencia: El ejemplo 6 ilustra el cuidado que debe tenerse cuando se resuelven ecuaciones trigonométricas con una calculadora. Recuerde que la calculadora proporciona un ángulo sólo dentro de las restricciones de la definición de la función trigonométrica inversa. Para encontrar las demás soluciones debe identificar otros cuadrantes, si los hay, en los que el ángulo pueda estar ubicado.

Ahora resuelva el problema 13.

Muchas ecuaciones trigonométricas pueden resolverse aplicando técnicas que ya conocemos, tales como la fórmula cuadrática (si la ecuación es un polinomio de segundo grado) o factorización.

EJEMPLO 7 *Resolución de una ecuación trigonométrica que tiene forma cuadrática*

Resolver la ecuación: $2 \text{ sen}^2 \theta - 3 \text{ sen } \theta + 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución Esta es una ecuación cuadrática (en sen θ) que puede ser factorizada:

$$2 \text{ sen}^2 \theta - 3 \text{ sen } \theta + 1 = 0 \qquad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x = \text{sen } \theta$$

$$(2 \text{ sen } \theta - 1)(\text{sen } \theta - 1) = 0 \qquad (2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$2 \text{ sen } \theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen } \theta - 1 = 0$$

$$\text{sen } \theta = \tfrac{1}{2} \qquad \text{sen } \theta = 1$$

Así,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Ahora resuelva el problema 23.

Cuando una ecuación trigonométrica contiene más de una función trigonométrica, algunas veces se pueden usar identidades para obtener una ecuación equivalente que sólo contenga una función trigonométrica.

EJEMPLO 8 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $3 \cos \theta + 3 = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Solución La ecuación en su forma actual contiene senos y cosenos. Sin embargo, se puede usar una forma de la identidad pitagórica para transformarla en una expresión equivalente que sólo contenga cosenos:

$$\begin{aligned} 3 \cos \theta + 3 &= 2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ 3 \cos \theta + 3 &= 2(1 - \cos^2 \theta) && \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ 3 \cos \theta + 3 &= 2 - 2 \cos^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1 &= 0 && \text{Cuadrática en } \cos \theta \\ (2 \cos \theta + 1)(\cos \theta + 1) &= 0 && \text{Factorizar} \\ 2 \cos \theta + 1 = 0 \quad &\text{o} \quad \cos \theta + 1 = 0 \\ \cos \theta = -\tfrac{1}{2} \quad & \qquad \cos \theta = -1 \end{aligned}$$

Así,

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \theta = \frac{4\pi}{3} \qquad \theta = \pi$$

Verificación: Trazar la gráfica de $y = 3 \cos x + 3$ y $y = 2 \operatorname{sen}^2 x$ y utilizar TRACE para encontrar sus puntos de intersección. ¿Qué tan cercanas están sus soluciones aproximadas a las exactas encontradas en este ejemplo?

EJEMPLO 9 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\cos 2\theta + 3 = 5 \cos \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Solución Primero, observamos que la ecuación dada contiene dos funciones coseno, pero con argumentos diferentes, θ y 2θ. Usamos la fórmula de ángulo doble $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ para obtener una ecuación equivalente que sólo contenga a $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + 3 &= 5 \cos \theta \\ (2 \cos^2 \theta - 1) + 3 &= 5 \cos \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 2 &= 0 \\ (\cos \theta - 2)(2 \cos \theta - 1) &= 0 \\ \cos \theta = 2 \quad &\text{o} \quad \cos \theta = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Para cualquier ángulo θ, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$; así, la ecuación $\cos \theta = 2$ no tiene solución. Las soluciones de $\cos \theta = \frac{1}{2}$ son

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 10 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 2$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Solución Usamos una forma de la identidad pitagórica:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 2$$
$$(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}\theta = 2$$
$$\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en sen θ. El discriminante es $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real.

Verificación: Trazar la gráfica de $y = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ y $y = 2$ para ver que las dos gráficas no se cortan.

EJEMPLO 11 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución El miembro izquierdo de la ecuación está en la forma de la fórmula de ángulo doble $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$, salvo por un factor de 2. Así, multiplicamos cada miembro por 2:

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\tfrac{1}{2}$$
$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -1$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = -1$$

Aquí el argumento es 2θ. Así, necesitamos escribir todas las soluciones de esta ecuación y luego enlistar aquellas que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Algunas veces es necesario elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación con el fin de obtener expresiones que permitan el uso de identidades. Sin embargo, recuerde que cuando se eleva al cuadrado a ambos miembros pueden introducirse soluciones extrañas. En consecuencia, las aparentes soluciones deben ser verificadas.

EJEMPLO 12 *Otros métodos para resolver una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución A Intentos de aprovechar identidades conocidas no conducen a ecuaciones que sean fáciles de resolver. (Pruebe usted.) Así, dada la forma de esta ecuación, decidimos elevar al cuadrado cada miembro:

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$
$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

Así,

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = 0$$

y las aparentes soluciones son

$$\theta = 0 \qquad \theta = \pi \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Ya que elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación original, debemos verificar estas aparentes soluciones por si alguna es extraña:

$\theta = 0$: $\operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

$\theta = \pi$: $\operatorname{sen}\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1$

Así, $\theta = 3\pi/2$ y $\theta = \pi$ son soluciones extrañas. Las verdaderas son $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Podemos resolver la ecuación dada en el ejemplo 12 de otra manera.

Solución 2 Empezamos con la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$

y dividimos cada lado entre $\sqrt{2}$. (La razón para esto será evidente en breve.) Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El miembro izquierdo ahora se parece a la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos, uno de los cuales es θ. El otro ángulo es desconocido (llamémosle ϕ). Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

donde

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

Por lo tanto, el ángulo ϕ es $\pi/4$. Como resultado de esto, la ecuación (1) se convierte en

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolvemos esta ecuación para obtener

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Estas soluciones coinciden con las encontradas anteriormente.

Este segundo método de solución puede ser usado para resolver cualquier ecuación lineal en las variables sen θ y cos θ.

EJEMPLO 10 *Resolución de una ecuación trigonométrica lineal en sen θ y cos θ*

Resolver

$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = c, \qquad 0 \le \theta < 2\pi \tag{2}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

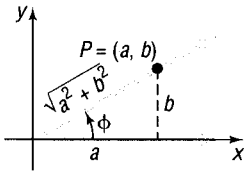
Solución Dividimos cada miembro de la ecuación (2) entre $\sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3}$$

Hay un único ángulo ϕ, $0 \le \phi < 2\pi$, para el cual

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4}$$

FIGURA 11



(*véase* la figura 11). Así, la ecuación (3) puede ser escrita como

$$\operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

o, de manera equivalente,

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{5}$$

donde ϕ satisface las ecuaciones (4).

Si $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces $\operatorname{sen}(\theta + \phi) > 1$ o $\operatorname{sen}(\theta + \phi) < -1$, y la ecuación (5) no tienen solución.

Si $|c| \le \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces las soluciones de la ecuación (5) son

$$\theta + \phi = \operatorname{sen}^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{o} \quad \theta + \phi = \pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ya que el ángulo θ está determinado por las ecuaciones (4), estas son las soluciones de la ecuación (2).

Soluciones mediante un dispositivo de graficación

Las técnicas introducidas en esta sección sólo se aplican a ciertos tipos de ecuaciones trigonométricas. Por lo común en cálculo se estudian soluciones de otros tipos, usando métodos numéricos. En el ejemplo siguiente mostramos cómo un dispositivo de graficación puede ser usado para obtener soluciones.

EJEMPLO 11 *Resolución de ecuaciones trigonométricas usando un dispositivo de graficación*

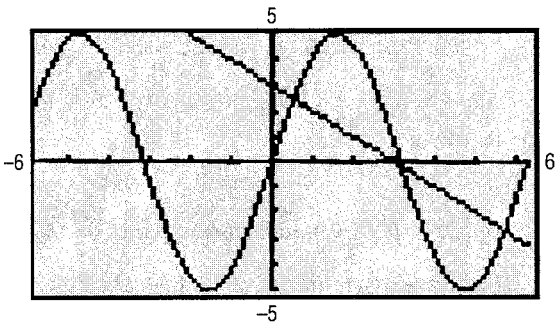
Resolver: $5 \operatorname{sen} x + x = 3$

Expresar la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

Solución Este tipo de ecuación trigonométrica no puede ser resuelta por los métodos ya vistos. Pero un dispositivo de graficación sí puede ser usado. Empezamos notando que la ecuación dada es equivalente a

$$5 \operatorname{sen} x = 3 - x$$

FIGURA 12



La solución (o soluciones) de esta ecuación es la misma que aparece en los puntos de intersección de las gráficas de $y = 5 \operatorname{sen} x$ y $y = 3 - x$. *Véase* la figura 12. Hay tres puntos de intersección, cuyas coordenadas x son las soluciones buscadas. Usando TRACE, ZOOM-IN y/o, BOX, encontramos

$$x = 0.51 \qquad x = 3.17 \qquad x = 5.71$$

redondeadas a dos decimales.

Observación: Las soluciones de la ecuación

$$5 \operatorname{sen} x + x = 3$$

pueden ser encontradas de otras formas.

1. Trazar la gráfica de $y = 5 \operatorname{sen} x + x$ y $y = 3$. Luego encontrar las coordenadas x de los puntos de intersección.
2. Trazar la gráfica de la función $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + x - 3$. Luego encontrar las intersecciones-x.

Intente estas dos formas. Decida cuál de las tres prefiere.

Ejercicio 7.5

En los problemas del 1 al 12 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

1. $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ **2.** $\tan \theta = 1$ **3.** $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **4.** $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{}$

5. $\cos \theta = 0$ **6.** $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **7.** $\operatorname{sen} 3\theta = -1$ **8.** $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

9. $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ **10.** $\operatorname{sen}\left(3\theta + \frac{\pi}{18}\right) = 1$ **11.** $\sec \frac{3\theta}{2} = -2$ **12.** $\cot \frac{2\theta}{3} = -\sqrt{3}$

En los problemas del 13 al 20 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. Redondee su respuesta a dos decimales.

13. $\operatorname{sen} \theta = 0.4$ **14.** $\cos \theta = 0.6$ **15.** $\tan \theta = 5$ **16.** $\cot \theta = 2$

17. $\cos \theta = -0.9$ **18.** $\operatorname{sen} \theta = -0.2$ **19.** $\sec \theta = -4$ **20.** $\csc \theta = -3$

En los problemas del 21 al 50 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

21. $2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 0$ **22.** $\operatorname{sen}^2 \theta - 1 = 0$ **23.** $2 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$

24. $2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$ **25.** $(\tan \theta - 1)(\sec \theta - 1) = 0$ **26.** $(\cot \theta + 1)(\csc \theta - \frac{1}{2}) = 0$

27. $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ **28.** $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$ **29.** $\tan\theta = 2\operatorname{sen}\theta$

30. $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta$ **31.** $\operatorname{sen}\theta = \csc\theta$ **32.** $\tan\theta = \cot\theta$

33. $\cos 2\theta = \cos\theta$ **34.** $\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ **35.** $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta = 0$

36. $\cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$ **37.** $\cos 4\theta - \cos 6\theta = 0$ **38.** $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 6\theta = 0$

39. $1 + \operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\theta$ **40.** $\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos\theta + 2$ **41.** $\tan^2\theta = \frac{3}{2}\sec\theta$

42. $\csc^2\theta = \cot\theta + 1$ **43.** $3 - \operatorname{sen}\theta = \cos 2\theta$ **44.** $\cos 2\theta + 5\cos\theta + 3 = 0$

45. $\sec^2\theta + \tan\theta = 0$ **46.** $\sec\theta = \tan\theta + \cot\theta$ **47.** $\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$

48. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$ **49.** $\tan 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ **50.** $\tan 2\theta + 2\cos\theta = 0$

En los problemas del 51 al 56 resuelva cada ecuación para $-\pi \le x \le \pi$. Exprese la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

51. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ trazando la gráfica $y = \cos x$ y $y = e^x$ y determine su(s) puntos de intersección.

52. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ trazando la gráfica $y = \cos x - e^x$ y determine la(s) intersecciones-x.

53. Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x = 0.7x$ trazando la gráfica $y = 2\operatorname{sen} x$ y $y = 0.7x$ y determine su(s) puntos de intersección.

54. Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x = 0.7x$ trazando la gráfica $y = 2\operatorname{sen} x - 0.7x$ y determine la(s) intersecciones-x.

55. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ trazando la gráfica $y = \cos x$ y $y = x^2$ y determine su(s) puntos de intersección.

56. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ trazando la gráfica $y = \cos x - x^2$ y determine la(s) intersecciones-x.

En los problemas del 57 al 68 utilice un dispositivo de graficación para resolver cada ecuación. Exprese la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

57. $x + 5\cos x = 0$ **58.** $x - 4\operatorname{sen} x = 0$ **59.** $22x - 17\operatorname{sen} x = 3$

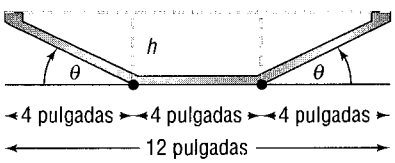
60. $19x + 8\cos x = 2$ **61.** $\operatorname{sen} x + \cos x = x$ **62.** $\operatorname{sen} x - \cos x = x$

63. $x^2 - 2\cos x = 0$ **64.** $x^2 + 3\operatorname{sen} x = 0$ **65.** $x^2 - 2\operatorname{sen} 2x = 3x$

66. $x^2 = x + 3\cos 2x$ **67.** $6\operatorname{sen} x - e^x = 2,\ x > 0$ **68.** $4\cos 3x - e^x = 1,\ x > 0$

69. *Construcción de un canal de desagüe pluvial.* Un canal de desagüe pluvial será construido con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a lo largo de las hojas, se doblan hacia arriba en un ángulo θ. *Véase* la ilustración. El área A de la abertura como función de θ está dada por

$$A = 16\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1),\ 0° \le \theta \le 90°$$



(a) En cálculo, se le pedirá encontrar el ángulo θ que maximiza A resolviendo la ecuación

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 90°$$

Resuelva esta ecuación para θ usando la fórmula del ángulo doble.

(b) Resuelva la ecuación para θ escribiendo la suma de los dos ángulos como un producto.

(c) ¿Cuál es el área máxima A de la abertura?

70. *Movimiento de un proyectil.* Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, con respecto a la horizontal y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia R que recorre el objeto hacia arriba del plano inclinado está dada por

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

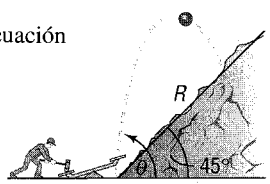
(a) En cálculo, se le pedirá que encuentre el ángulo θ que maximice R resolviendo la ecuación

$$\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta = 0$$

Resuelva la ecuación para θ usando el método del ejemplo 13.

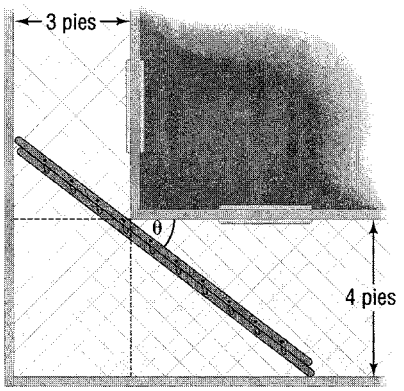
(b) Resuelva esta ecuación para θ dividiendo cada miembro entre $\cos 2\theta$.

(c) ¿Cuál es la distancia máxima R si $v_0 = 32$ pies por segundo?



71. *Transferencia de calor.* En el estudio del fenómeno de transferencia de calor, aparece la ecuación $x + \tan x = 0$. Trace la gráfica de $y = -x$ y $y = \tan x$ para $x \geq 0$. Concluya que hay un número infinito de puntos de intersección de estas dos gráficas. Luego determine las primeras dos soluciones positivas de $x + \tan x = 0$ redondeadas a dos decimales.

72. *Transporte de una escalera al doblar una esquina.* Una escalera de longitud L es transportada horizontalmente doblando una esquina desde un pasillo de 3 pies de ancho a uno de 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración.



(a) Exprese L como función de θ.

(b) En cálculo, se le pedirá encontrar la escalera de longitud máxima que pueda dar vuelta por la esquina resolviendo la ecuación

$$3 \sec\theta \tan\theta - 4 \csc\theta \cot\theta = 0,\ 0° < \theta < 90°$$

Resuelva esta ecuación para θ.

(c) ¿Cuál es la escalera de mayor longitud que puede ser transportada por dicha esquina?

El estudio siguiente de la ***ley de refracción de Snell*** *(Llamada así en honor de Willebrod Snell, 1591-1626.) es necesario para poder resolver los problemas del 73 al 79: la luz, el sonido y otras ondas viajan a velocidades diferentes, dependiendo de los medios (aire, agua, madera, etc.) a través de los cuales se desplazan. Suponga que la luz viaja desde un punto A en un medio, donde su velocidad es v_1, a un punto B en otro medio, donde su velocidad es v_2. Véase la figura, donde el ángulo θ_1 es llamado* ***ángulo de incidencia*** *y el ángulo θ_2 es el* ***ángulo de refracción.*** *La ley de Snell,* que puede ser probada utilizando cálculo, establece que*

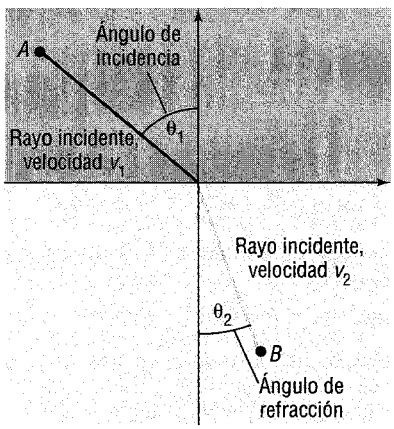
$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

La razón v_1/v_2 es llamada ***índice de refracción.*** *En la tabla siguiente se dan algunos valores.*

ALGUNOS INDICES DE REFRACCIÓN

MEDIO	INDICE DE REFRACCIÓN
Agua	1.33
Alcohol etílico	1.36
Bisulfuro de carbono	1.63
Aire (1 atm y 20°C)	1.0003
Yoduro de metileno	1.74
Quarzo fundido	1.46
Vidrio corona	1.52
Vidrio de roca	1.66
Cloruro de sodio	1.53

Para luz de longitud de onda de 589 nanómetros medida con respecto al vacío. En la mayoría de los casos el índice con respecto al aire difiere de una manera insignificante.



θ_1	θ_2
10°	7°45′
20°	15°30′
30°	22°30′
40°	29°0′
50°	35°0′
60°	40°30′
70°	45°30′
80°	50°0′

73. El índice de refracción de la luz que pasa del vacío al agua es de 1.33. Si el ángulo de incidencia mide 40°, determine el ángulo de refracción.

74. El índice de refracción de la luz que pasa del vacío a un vidrio opaco es de 1.66. Si el ángulo de incidencia mide 50°, determine el ángulo de refracción.

75. Ptolomeo, quien vivió en la ciudad de Alejandría en Egipto durante el segundo siglo d. de C., estableció los valores de la tabla que aparece al margen para el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2 de un rayo de luz que pasa del aire al agua. ¿Coinciden estos valores con la ley de Snell? Si es así, ¿cuál es el índice de refracción? (Estos datos son interesantes como las medidas físicas más antiguas registradas.)†

*Ya que esta ley también fue deducida por René Descartes, en Francia es conocida como la ley de Descartes.

†Adaptado de Halliday y Resnick, *Physics*, Partes 1 y 2, tercera edición, Nueva York: Wiley, 1978, p. 953.

76. La velocidad de la luz amarilla de sodio (longitud de onda de 589 nanómetros) en cierto líquido se mide y resulta ser de 1.92 (108 metros por segundo. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido, con respecto al aire, para la luz del sodio?*

77. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros viajando en el aire forma un ángulo de incidencia de 40° con una lámina de material transparente y el rayo refractado, forma un ángulo de refracción de 26°. Encuentre el índice de refracción del material.†

78. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros (producido por una lámpara de sodio) viaja a través del aire y forma un ángulo de incidencia de 30° con una lámina delgada de vidrio corona. Determine el ángulo de refracción.‡

79. Un rayo de luz pasa de un medio a otro a través de una lámina gruesa de material cuyo índice de refracción es n_2. Demuestre que el rayo que sale es paralelo al rayo incidente.‡

80. Explique con sus propias palabras cómo usaría su calculadora para resolver la ecuación sen $x = 0.3$, $0 \le x < 2\pi$. ¿Cómo modificaría su enfoque para resolver la ecuación cot $x = 5$, $0 < x < 2\pi$?

Repaso del capítulo

Conceptos fundamentales

Fórmulas

Fórmulas de suma y diferencia

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmulas para ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Fórmulas para medio ángulo

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}
\end{aligned}\right\} \text{donde los signos + o − se determinan por el cuadrante del ángulo } \alpha/2$$

$$= \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

*Adaptado de Serway, *Physics,* tercera edición, Filadelfia: W. B. Saunders, p. 805.
†Adaptado de Serway, *Physics,* tercera edición, Filadelfia: W. B. Saunders, p. 805.
‡ *Ibíd.*

Fórmulas de producto a suma

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

Fórmulas de suma a producto

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Cómo hacer para

Demostrar identidades
Resolver una ecuación trigonométrica

Complete en los espacios

1. Suponga que f y g son dos funciones con el mismo dominio. Si $f(x) = g(x)$ para toda x en el dominio, la ecuación es llamada _____. En caso contrario, es llamada ecuación _____.
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$ _____ $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
3. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ _____ $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.
4. $\cos 2\theta = \cos^2\theta -$ _____ = _____ $- 1 = 1 -$ _____.
5. $\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} =$ _____.

Cierto o falso

C F **1.** $\operatorname{sen}(-\theta) + \operatorname{sen}\theta = 0$ para toda θ.

C F **2.** $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

C F **3.** $\cos 2\theta$ tiene tres formas equivalentes: $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$, y $2\cos^2\theta - 1$.

C F **4.** $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2}$, donde los + o − depende del ángulo $\alpha/2$.

C F **5.** La mayoría de las ecuaciones trigonométricas tienen solución única.

C F **6.** La ecuación $\tan\theta = \pi/2$ no tiene solución.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 32 demuestre cada identidad.

1. $\tan\theta\cot\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

2. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

3. $\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) = 1$

4. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1$

5. $4\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

6. $4\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta = 4 - 2\cos^2\theta$

7. $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = 2\csc\theta$

8. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta$

9. $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{1-\tan\theta}$

10. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta$

11. $\dfrac{\csc\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

12. $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos\theta}$

13. $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cos\theta\cot\theta$

14. $\dfrac{\csc\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}$

15. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\cos^3\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

16. $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

17. $\dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

18. $\dfrac{(2\operatorname{sen}^2\theta - 1)^2}{\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

19. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

20. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = 1 - \cot\alpha\tan\beta$

21. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$

22. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = \cot\alpha - \tan\beta$

23. $(1+\cos\theta)\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta$

24. $\operatorname{sen}\theta\tan\dfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

25. $2\cot\theta\cot 2\theta = \cot^2\theta - 1$

26. $2\operatorname{sen} 2\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen} 4\theta$

27. $1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \cos 4\theta$

28. $\dfrac{\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos 3\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = 1$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} = \tan 3\theta$

30. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta}{\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} 4\theta} + \dfrac{\tan 3\theta}{\tan\theta} = 0$

31. $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} - \tan\theta\tan 3\theta = 0$

32. $\cos 2\theta - \cos 10\theta = (\tan 4\theta)(\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 10\theta)$

En los problemas del 33 al 40 encuentre el valor exacto de cada expresión.

33. $\operatorname{sen} 165°$

34. $\tan 105°$

35. $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

36. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

37. $\cos 80°\cos 20° + \operatorname{sen} 80°\operatorname{sen} 20°$

38. $\operatorname{sen} 70°\cos 40° - \cos 70°\operatorname{sen} 40°$

39. $\tan\dfrac{\pi}{8}$

40. $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{8}$

En los problemas del 41 al 50 utilice la información proporcionada acerca de los ángulos a y b para encontrar el valor exacto de:

(*a*) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ (*b*) $\cos(\alpha+\beta)$ (*c*) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ (*d*) $\tan(\alpha+\beta)$

(*e*) $\operatorname{sen} 2\alpha$ (*f*) $\cos 2\beta$ (*g*) $\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}$ (*h*) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

41. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, $\pi/2 < \beta < \pi$

42. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $-\pi/2 < \beta < 0$

43. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$

44. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$, $-\pi/2 < \alpha < 0$; $\cos\beta = -\frac{5}{13}$, $\pi/2 < \beta < \pi$

45. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\tan\beta = \frac{12}{5}$, $0 < \beta < \pi/2$

46. $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cot \beta = \frac{12}{5}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

47. $\sec \alpha = 2$, $-\pi/2 < \alpha < 0$; $\sec \beta = 3$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$

48. $\csc \alpha = 2$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\sec \beta = -3$, $\pi/2 < \beta < \pi$

49. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

50. $\tan \alpha = -2$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cot \beta = -2$, $\pi/2 < \beta < \pi$

En los problemas del 51 al 70 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

51. $\cos \theta = \frac{1}{2}$

52. $\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{3}/2$

53. $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$

54. $\tan \theta = -\sqrt{3}$

55. $\operatorname{sen} 2\theta = -1$

56. $\cos 2\theta = 0$

57. $\tan 2\theta = 0$

58. $\operatorname{sen} 3\theta = 1$

59. $\operatorname{sen} \theta = 0.9$

60. $\tan \theta = 25$

61. $\operatorname{sen} \theta = \tan \theta$

62. $\cos \theta = \sec \theta$

63. $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta = 0$

64. $\cos 2\theta = \operatorname{sen} \theta$

65. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$

66. $\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta + 1 = 0$

67. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$

68. $2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

69. $\operatorname{sen} \theta - \cos \theta = 1$

70. $\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta = 1$

TEMA 4

Aplicaciones adicionales de la trigonometría

CAPÍTULO 8

8.1 Ley de los senos

8.2 Ley de los cosenos

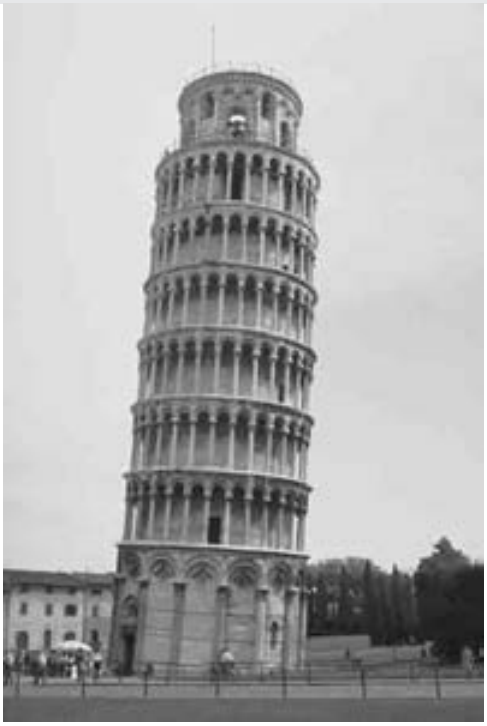
8.3 Área de un triángulo

8.4 Coordenadas polares

8.5 Ecuaciones y gráficas polares

8.6 El plano complejo; teorema de Moivre

Repaso del capítulo



Panorama **Corrección de un error de navegación**

Un bote de motor sale de Naples, Florida, hacia Key West, a 150 millas de distancia. Aunque lleva una velocidad constante de 15 millas por hora, navega entre fuertes corrientes y vientos cruzados; la tripulación descubre, después de 4 horas, que el bote está fuera de curso por 20°.

(a) ¿A qué distancia de Key West está el bote en ese momento?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar para corregir su curso?

(c) ¿Cuánto tiempo de más duró el viaje debido a la desviación del curso?

(Suponga que la velocidad permanece en 15 millas por hora.)

[ejemplo 3 de la sección 8.2.]

En el capítulo 5 utilizamos las funciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos, es decir, triángulos con un ángulo de 90°. En este capítulo utilizaremos las funciones trigonométricas para resolver triángulos oblicuos, es decir, triángulos que no tienen un ángulo de 90°. Para ello desarrollaremos la ley de los senos (sección 8.1) y la ley de los cosenos (sección 8.2). Además de calcular los lados y ángulos de tales triángulos, deduciremos fórmulas para determinar su área (sección 8.3).

Las secciones finales del capítulo tratan acerca de las coordenadas polares (una alternativa a las coordenadas rectangulares para localizar puntos en el plano), la graficación en coordenadas polares y la determinación de raíces de números complejos (teorema de De Moivre).

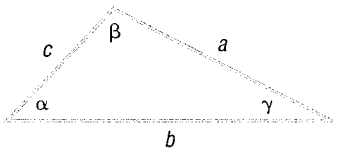
Ley de los senos

Si ninguno de los ángulos de un triángulo es recto, el triángulo es **oblicuo**. Así, un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos, o bien dos ángulos agudos y un ángulo obtuso (un ángulo entre 90° y 180°). *Véase* la figura 1.

FIGURA 1
Triángulos oblicuos

(a) Todos los ángulos son agudos **(b)** Dos ángulos agudos y uno obtuso

FIGURA 2



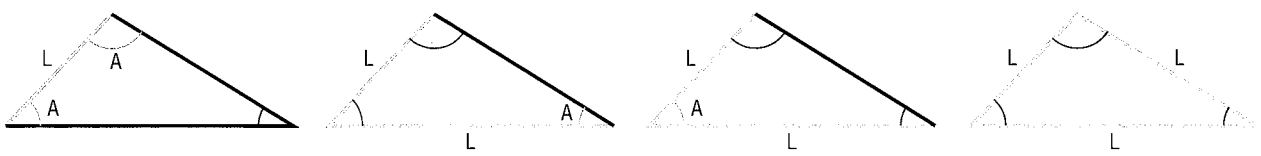
En el análisis siguiente, siempre señalaremos un triángulo oblicuo de modo que el lado a sea opuesto al ángulo α, el lado b opuesto al ángulo β y el lado c opuesto al ángulo γ, como se muestra en la figura 2.

Resolver un triángulo oblicuo significa determinar las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos. Para hacer esto, necesitamos conocer la longitud de un lado junto con otros dos datos: dos ángulos, o los otros dos lados, o un ángulo y el otro lado.* De ese modo, existen cuatro posibilidades:

CASO 1: Se conocen un lado y dos ángulos (LAA o ALA).
CASO 2: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).
CASO 3: Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (LAL).
CASO 4: Se conocen tres lados (LLL).

La figura 3 ilustra los cuatro casos.

FIGURA 3



Caso 1: LAA o ALA | Caso 2: LLA | Caso 3: LAL | Caso 4: LLL

La **ley de los senos** se utiliza para resolver triángulos de los casos 1 y 2.

*Recuerde de la geometría plana que si se conocen los tres ángulos de un triángulo eso determina una familia de *triángulos semejantes*, es decir, triángulos de la misma forma pero con diferentes tamaños.

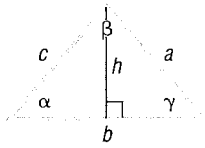
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{1}$$

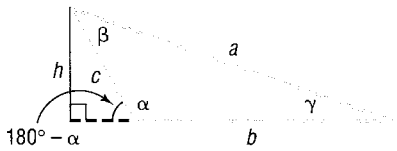
Para demostrar la ley de los senos trazamos una altura de longitud h desde uno de los vértices del triángulo en cuestión. La figura 4(a) muestra h para un triángulo con tres ángulos agudos y la figura 4(b) muestra h para un triángulo con un ángulo obtuso. En cada caso, trazamos la altura desde el vértice β. Con cualquiera de las figuras, tenemos

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{a}$$

FIGURA 4



(a)



(b)

de donde

$$h = a \operatorname{sen}\gamma \tag{2}$$

De la figura 4(a), también tenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{c}$$

de donde

$$h = c \operatorname{sen}\alpha \tag{3}$$

La figura 4(b) implica que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha) = \frac{h}{c}$$

y de nuevo

$$h = c \operatorname{sen}\alpha$$

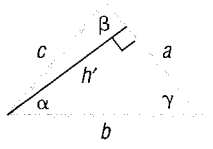
Así, ya sea que el triángulo tenga tres ángulos agudos o dos ángulos agudos y uno obtuso, las ecuaciones (2) y (3) son válidas. Como resultado, podemos igualar las expresiones para h en las ecuaciones (2) y (3) y obtener

$$a \operatorname{sen}\gamma = c \operatorname{sen}\alpha$$

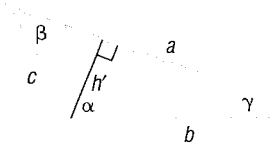
FIGURA 5

de donde

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{4}$$



(a)



(b)

De manera análoga, al trazar la altura h' desde el vértice del ángulo β como en la figura 5, podemos mostrar que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h'}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{h'}{b}$$

Así,

$$h' = c \operatorname{sen}\beta = b \operatorname{sen}\gamma$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{5}$$

Al combinar las ecuaciones (4) y (5) obtenemos la ecuación (1), la ley de los senos.

Al aplicar la ley de los senos para resolver triángulos utilizamos el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°; es decir,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{6}$$

Nuestros dos primeros ejemplos muestran la forma de resolver un triángulo cuando se conocen un lado y dos ángulos (Caso 1: LAA o ALA).

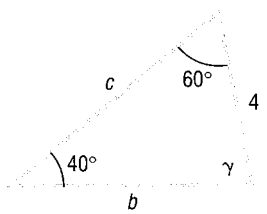
EJEMPLO 1 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LAA*

Resuelva el triángulo: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $a = 4$

Solución La figura 6 muestra el triángulo por resolver. El tercer ángulo γ es fácil de encontrar con la ecuación (6):

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ 40° + 60° + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 80° \end{aligned}$$

FIGURA 6



Ahora utilizamos la ley de los senos (dos veces) para determinar los lados b y c:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Como $a = 4$, $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, y $\gamma = 80°$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}40°}{4} = \frac{\operatorname{sen}60°}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}40°}{4} = \frac{\operatorname{sen}80°}{c}$$

De ese modo,

$$b = \frac{4\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}40°} \approx 5.39 \qquad c = \frac{4\operatorname{sen}80°}{\operatorname{sen}40°} \approx 6.13$$

Observe que en el ejemplo 1 determinamos b y c utilizando el lado conocido a. Esto es mejor que determinar primero b y trabajar luego con un valor redondeado de b para calcular c.

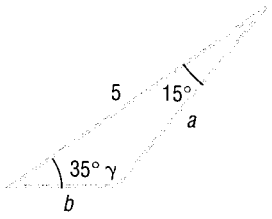
EJEMPLO 2 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo ALA*

Resuelva el triángulo: $\alpha = 35°$, $\beta = 15°$, $c = 5$

Solución La figura 7 ilustra el triángulo por resolver. Como conocemos dos ángulos ($\alpha = 35°$ y $\beta = 15°$), es fácil determinar el tercer ángulo mediante la ecuación (6):

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ 35° + 15° + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 130° \end{aligned}$$

FIGURA 7



Ahora conocemos los tres ángulos y un lado ($c = 5$) del triángulo. Para determinar los otros dos lados, a y b, utilizamos dos veces la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\frac{\operatorname{sen}35°}{a} = \frac{\operatorname{sen}130°}{5} \qquad \frac{\operatorname{sen}15°}{b} = \frac{\operatorname{sen}130°}{5}$$

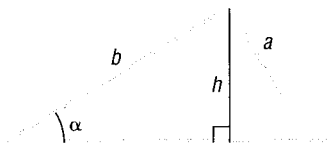
$$a = \frac{5\operatorname{sen}35}{\operatorname{sen}130} \approx 3.74 \qquad b = \frac{5\operatorname{sen}15°}{\operatorname{sen}130°} \approx 1.69$$

Nota: En los siguientes ejemplos y ejercicios, a menos que se indique lo contrario, mediremos los ángulos en grados y los redondearemos hasta una cifra decimal; y redondearemos todos los lados hasta dos cifras decimales. Para evitar errores de redondeo al utilizar una calculadora, guardaremos los valores no redondeados en la memoria para utilizarlos en cálculos posteriores.

Ahora resuelva el problema 1.

El caso ambiguo

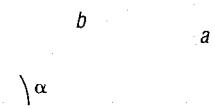
FIGURA 8



El caso 2 (LLA), que se aplica a triángulos donde se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se conoce como **el caso ambiguo** pues la información resultante puede producir un triángulo, dos triángulos o ninguno. Supongamos que conocemos los lados a y b y el ángulo α, como nos muestra la figura 8. La clave para determinar los triángulos posibles (si existen) que pueden formarse a partir de la información dada, recae principalmente en la altura h y el hecho de que $h = b \operatorname{sen}\alpha$.

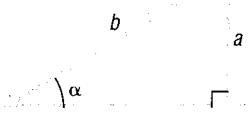
Ningún triángulo: Si $a < b \operatorname{sen}\alpha = h$, está claro que el lado a no es lo bastante grande para formar un triángulo. *Véase* la figura 9.

FIGURA 9
$a < b \operatorname{sen}\alpha$



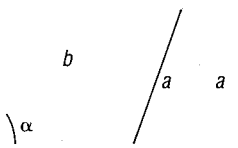
Un triángulo rectángulo: Si $a = b \operatorname{sen}\alpha = h$, entonces el lado a tiene la medida justa para formar un triángulo rectángulo. *Véase* la figura10.

FIGURA 10
$a = b \operatorname{sen}\alpha$



Dos triángulos: Si $a < b$ y $h = b \operatorname{sen}\alpha < a$, entonces podemos formar dos triángulos distintos a partir de la información dada. *Véase* la figura 11.

FIGURA 11
$b \operatorname{sen}\alpha < a$ y $a < b$



Un triángulo: Si $a \geq b$, entonces sólo se puede formar un trángulo. *Véase* la figura 12.

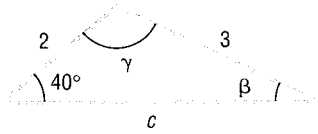
FIGURA 12
$a \geq b$

Por fortuna, no tenemos que confiar en una figura para obtener la conclusión correcta en el caso ambiguo. La ley de los senos nos conduce a la determinación correcta. Veamos cómo.

Resolver el triángulo: $a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 40°$

Véase la figura 13(a). Como conocemos $a = 3$, $b = 2$, y $\alpha = 40°$, utilizamos la ley de los senos para determinar β:

FIGURA 13(a)



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}40°}{3} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{2\operatorname{sen}40°}{3} \approx 0.43$$

Existen dos ángulos β, $0° < \beta < 180°$, para los que $\operatorname{sen}\beta \approx 0.43$:

$$\beta \approx 25.4° \quad \text{y} \quad \beta \approx 154.6°$$

[**Nota:** aquí hemos calculado β mediante el valor de sen β guardado en la memoria. Si utiliza el valor redondeado, sen $\beta \approx 0.43$, obtendrá resultados un poco distintos.]

Descartamos la segunda posibilidad, pues $\alpha = 40°$, lo que hace que $\alpha + \beta \approx 194.6° > 180°$. Ahora, con $\beta \approx 25.4°$, tenemos

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 40° - 25.4° = 114.6°$$

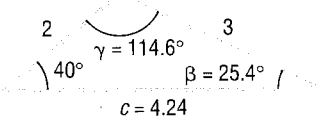
Ahora podemos determinar el lado c mediante la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

$$\frac{\operatorname{sen}114.6°}{c} = \frac{\operatorname{sen}40°}{3}$$

$$c = \frac{3\operatorname{sen}114.6°}{\operatorname{sen}40°} \approx 4.24$$

FIGURA 13(b)



La figura 13(b) muestra el triángulo resuelto.

Resolver el triángulo: $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 35°$

Como conocemos $a = 6$, $b = 8$, y $\alpha = 35°$, utilizamos la ley de los senos para determinar el ángulo β:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} 35°}{6} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{8}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{8 \operatorname{sen} 35°}{6} \approx 0.76$$

$$\beta_1 \approx 49.9° \quad \text{o} \quad \beta_2 \approx 130.1°$$

Para ambas posibilidades tenemos que $\alpha + \beta < 180°$. Por lo tanto, hay dos triángulos, uno con el ángulo $\beta = \beta_1 \approx 49.9°$ y el otro con el ángulo $\beta = \beta_2 \approx 130.1°$. El tercer ángulo γ es

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 95.1° \quad \text{o} \quad \gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 14.9°$$

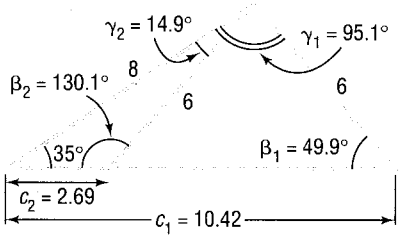
El tercer lado c satisface la ley de los senos, de modo que

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 95.1°}{c_1} = \frac{\operatorname{sen} 35°}{6} \qquad \text{o} \qquad \frac{\operatorname{sen} 14.9°}{c_2} = \frac{\operatorname{sen} 35°}{6}$$

$$c_1 = \frac{6 \operatorname{sen} 95.1°}{\operatorname{sen} 35°} \approx 10.42 \qquad c_2 = \frac{6 \operatorname{sen} 14.9°}{\operatorname{sen} 35°} \approx 2.69$$

FIGURA 14



La figura 14 muestra los dos triángulos obtenidos.

EJEMPLO 16 Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (Un solución)

Resolver el triángulo: $a = 2$, $c = 1$, $\gamma = 50°$

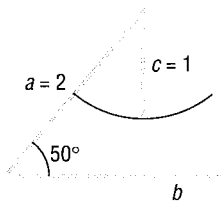
Solución Como conocemos $a = 2$, $c = 1$, y $\gamma = 50°$, utilizamos la ley de los senos para determinar el ángulo α:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{1}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} 50° \approx 1.53$$

FIGURA 15



No existe un ángulo α para el cual $\operatorname{sen} \alpha > 1$. Por lo tanto, no existe un triángulo con las medidas dadas. La figura 15 muestra los datos proporcionados. Observe que no importa la posición en que pretendamos colocar el lado c, éste nunca cortará al lado b para formar un triángulo.

Ahora resuelva el problema 17.

Problemas de aplicación

La ley de los senos sirve de manera especial para resolver ciertos problemas de aplicación.

EJEMPLO 6 *Rescate en el mar*

La estación Zulú de los guardacostas se encuentra a 120 millas al oeste de la estación Rayos X. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación Zulú indica que la posición del barco es 40° al este del norte; la llamada a la estación Rayos X indica que la posición del barco es 30° al oeste del norte.

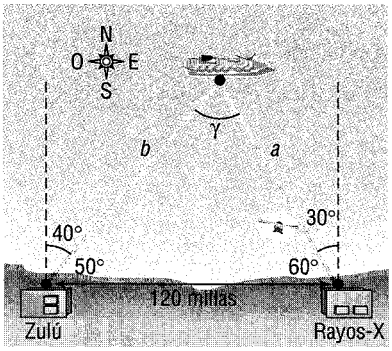
(a) ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?

(b) Si un helicóptero que puede volar a 200 millas por hora sale desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a éste?

Solución (a) La figura 16 muestra la situación. Vemos que el ángulo γ es

$$\gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$$

FIGURA 16



Ahora podemos utilizar la ley de los senos para determinar las dos distancias a y b:

$$\frac{\operatorname{sen} 50°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{120}$$

$$a = \frac{120 \operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 97.82 \text{ millas}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{120}$$

$$b = \frac{120 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 110.59 \text{ millas}$$

Así, la estación Zulú está a casi 111 millas del barco mientras que la Rayos X está a casi 98 millas.

(b) Calculamos el tiempo t necesario para llegar al barco desde la estación Rayos X mediante la fórmula

$$(\text{Velocidad, } v)(\text{Tiempo, } t) = \text{Distancia, } a$$

Entonces

$$t = \frac{a}{v} = \frac{97.82}{200} \approx 0.49 \text{ horas} \approx 29 \text{ minutos}$$

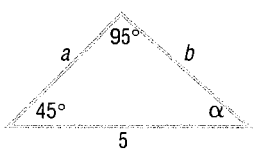
El helicóptero tardará casi 29 minutos en llegar hasta el barco. ■

■ Ahora resuelva el problema 29.

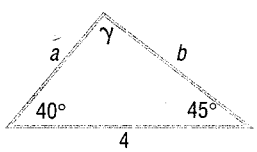
Ejercicio 8.1

En los problemas del 1 al 8 resuelva cada triángulo.

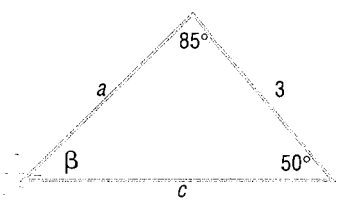
1.



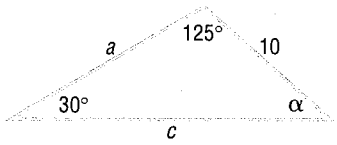
2.



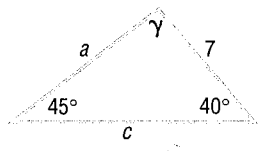
3.



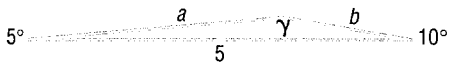
4.



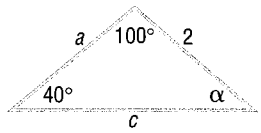
5.



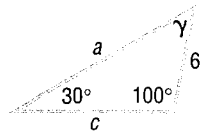
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 16 resuelva cada triángulo.

9. $\alpha = 40°, \beta = 20°, a = 2$

10. $\alpha = 50°, \gamma = 20°, a = 3$

11. $\beta = 70°, \gamma = 10°, b = 5$

12. $\alpha = 70°, \beta = 60°, c = 4$

13. $\alpha = 110°, \gamma = 30°, c = 3$

14. $\beta = 10°, \gamma = 100°, b = 2$

15. $\alpha = 40°, \beta = 40°, c = 2$

16. $\beta = 20°, \gamma = 70°, a = 1$

En los problemas del 17 al 28 se proporcionan dos lados y un ángulo. Determine si esta información produce un triángulo, dos triángulos o ninguno. Resuelva los triángulos obtenidos.

17. $a = 3, b = 2, \alpha = 50°$

18. $b = 4, c = 3, \beta = 40°$

19. $b = 5, c = 3, \beta = 100°$

20. $a = 2, c = 1, \alpha = 120°$

21. $a = 4, b = 5, \alpha = 60°$

22. $b = 2, c = 3, \beta = 40°$

23. $b = 4, c = 6, \beta = 20°$

24. $a = 3, b = 7, \alpha = 70°$

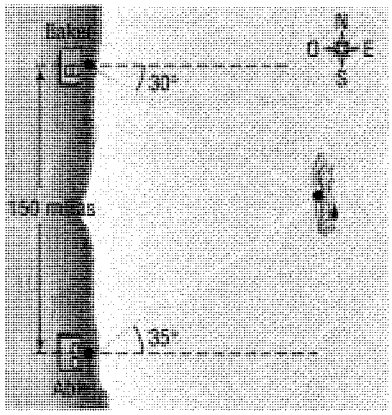
25. $a = 2, c = 1, \gamma = 100°$

26. $b = 4, c = 5, \beta = 95°$

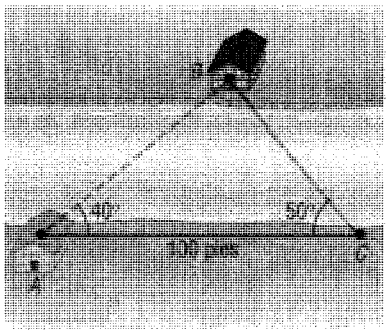
27. $a = 2, c = 1, \gamma = 25°$

28. $b = 4, c = 5, \beta = 40°$

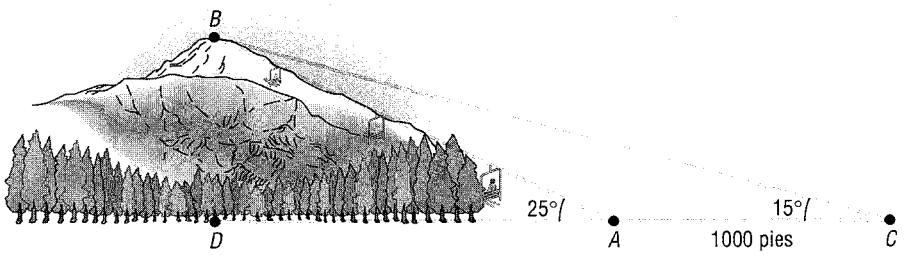
29. *Rescate en el mar.* La estación Able de los guardacostas se encuentra a 150 millas al sur de la estación Baker. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación Able indica que la posición del barco es 35° al norte del este; la llamada a la estación Baker indica que la posición del barco es 30° al sur del este.
(a) ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?
(b) Si un helicóptero que puede volar a 200 millas por hora sale desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a éste?



30. *Topografía. Véase* la figura. Para determinar la distancia de la casa en el punto A a la casa en B, un topógrafo mide un ángulo BAC de 40°, después camina 100 pies hasta C y mide el ángulo ACB, que es de 50°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

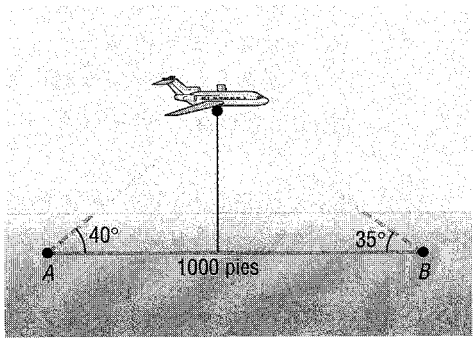


31. *Determinación de la longitud de un ascensor para una pista de esquí.* *Véase* la figura. Para determinar la longitud de un ascensor propuesto para una pista de esquí desde A hasta B, un topógrafo mide el ángulo DAB, que es de 25°, luego camina 1000 pies hasta C y mide el ángulo ACB, que es de 15°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

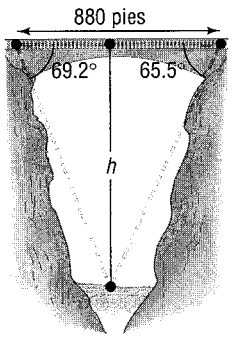


32. *Determinación de la altura de una montaña.* Utilice la ilustración del problema 31 para determinar la altura BD de la montaña en el punto B.

33. *Determinación de la altitud de un avión.* Un avión es observado por dos personas que se encuentran a 1000 pies de distancia una de otra. Cuando el avión pasa por la recta que los une, cada observador mide el ángulo de elevación al avión, como indica la figura. ¿A qué altura se encuentra el avión?



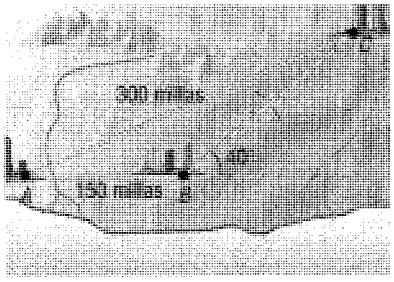
34. *Determinación de la altura del puente sobre Royal Gorge.* El puente más alto del mundo es el tendido sobre Royal Gorge, del río Arkansas en Colorado, Estados Unidos.* Se realizan mediciones hacia el mismo punto al nivel del agua, directamente bajo el puente, desde cada lado del puente con 880 pies de longitud, como muestra la figura. ¿Qué altura tiene el puente?



35. *Navegación.* Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, una distancia de 150 millas, y después gira 40° para dirigirse a la ciudad C, como muestra la figura.

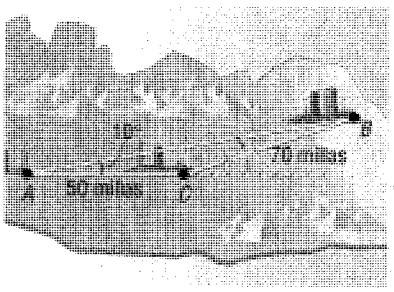
(a) Si entre las ciudades A y C hay 300 millas, ¿a qué distancia se encuentra la ciudad B de la ciudad C?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar el piloto en la ciudad C para regresar a la ciudad A?

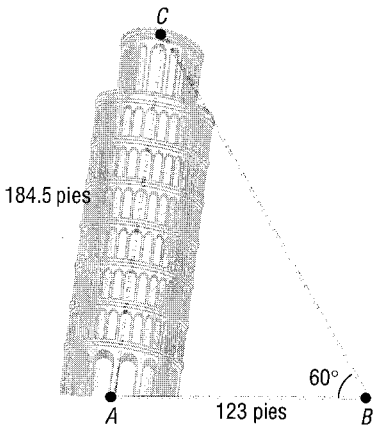


**Fuente:* Libro Guiness de récords mundiales.

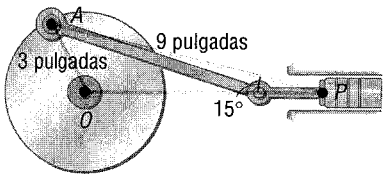
36. *Tiempo perdido debido a un error de navegación.* En un intento por ir de la ciudad A a la ciudad B un avión siguió un curso con 10° de error, como muestra la figura. Después de volar 50 millas el piloto corrigió el curso girando en el punto C y volando otras 70 millas. Si la velocidad constante del avión era de 250 millas por hora, ¿cuánto tiempo se perdió debido al error?



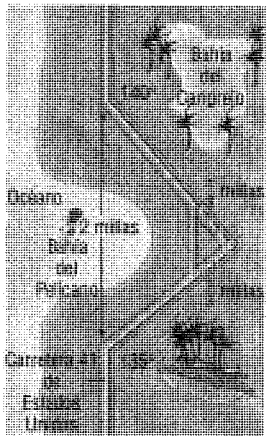
37. *Cálculo de la inclinación de la torre inclinada de Pisa.* La famosa torre inclinada de Pisa tenía originalmente una altura de 184.5 pies.* Después de caminar 123 pies desde la base de la torre, el ángulo de elevación hasta la cima resulta ser de 60°. Determine el ángulo CAB indicado en la figura. Determine además la distancia perpendicular de C a AB.



38. *Ejes de bielas en automóviles.* En cierto automóvil el eje de las bielas mide 3 pulgadas y la varilla de unión 9 pulgadas (*véase* la figura). Cuando el ángulo OPA mide 15°, ¿a qué distancia se encuentra el pistón (P) del centro (O) del eje de la biela?



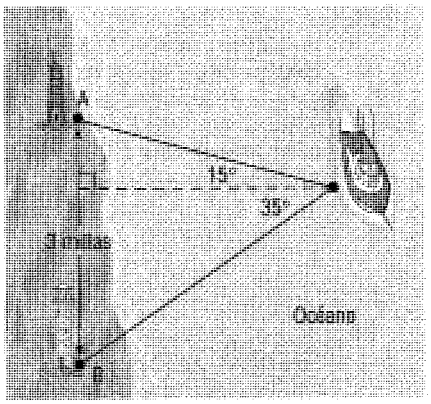
39. *Construcción de una carretera.* La carretera 41 de Estados Unidos, cuyas direcciones principales son norte-sur, está en construcción a lo largo de la costa de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye el trazo recto de la carretera. Como el costo de un puente es demasiado alto, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra la trayectoria decidida y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para rodear la bahía?



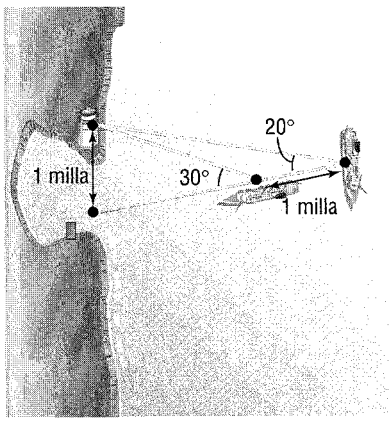
*En su informe de 1986 acerca del frágil campanario de 7 siglos de antigüedad, los científicos afirmaron en Pisa, Italia, que la torre inclinada de Pisa había incrementado su famosa inclinación en 1 milímetro, o 0.04 pulgadas (casi el promedio anual), aunque en los dos años anteriores la inclinación se había reducido a casi la mitad de esa cantidad.

Últimas noticias, Pisa, Italia, septiembre de 1995. La torre inclinada de Pisa se ha desplazado súbitamente, a pesar de los esfuerzos por estabilizarla, afirmaron los periódicos italianos el domingo. La torre, construida sobre un subsuelo inestable entre 1174 y 1350 como campanario para la catedral cercana, se movió recientemente 0.07 pulgadas en una noche. La torre quedó cerrada al turismo desde 1990, pero se espera abrirla parcialmente el próximo año.

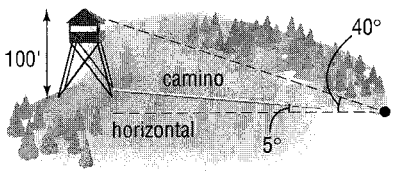
40. *Determinación de distancias en el mar.* El timonel de un barco en el mar avista dos faros que sabe están separados por una distancia de 3 millas a lo largo de una costa recta. Él determina que los ángulos formados entre las dos líneas de visión de los faros y la recta que va directamente del barco a la orilla miden 15° y 35°. *Véase* la ilustración.
(a) ¿A qué distancia del faro A se encuentra el barco?
(b) ¿A qué distancia del faro B se encuentra el barco?
(c) ¿A qué distancia de la orilla se encuentra el barco?



41. *Determinación de distancias en el mar.* El timonel de un barco en el mar tiene a la vista el puerto donde debe atracar. Él avista un faro que sabe se encuentra a una milla de la entrada de la bahía, y mide el ángulo entre las líneas de visión del puerto y del faro, siendo dicho ángulo de 20°. Dirigiéndose hacia el puerto, el timonel repite la medición después de 5 minutos de viajar a 12 millas por hora. Si el nuevo ángulo es de 30°, ¿a qué distancia se encuentra el barco de la bahía?



42. *Determinación de distancias.* Un guardia forestal va por un camino inclinado 5° respecto a la horizontal, directamente hacia una torre de observación de 100 pies de altura. Cuando el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 40° ¿a qué distancia de la torre se encuentra el guardia?



43. *Fórmula de Mollweide.* Para cualquier triángulo, la **fórmula de Mollweide** (en honor de Karl Mollweide, 1774-1825) establece que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}$$

Deduzca esta fórmula. [*Sugerencia:* utilice la ley de los senos y luego una fórmula suma-producto.] Observe que la fórmula de Mollweide relaciona los seis datos de un triángulo. Debido a ello en ocasiones se le utiliza para verificar la solución de un triángulo.

44. *Fórmula de Mollweide.* Otra presentación de la fórmula de Mollweide es

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Dedúzcala.

45. Para cualquier triángulo, deduzca la fórmula

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

[*Sugerencia:* utilice el hecho de que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \beta - \gamma)$.]

46. Para cualquier triángulo, deduzca la **ley de las tangentes:**

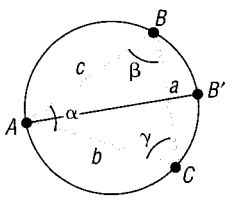
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

[*Sugerencia:* utilice la fórmula de Mollweide.]

47. Muestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$

donde r es el radio del círculo que circunscribe al triángulo ABC cuyos lados son a, b, c, como muestra la figura anexa. [*Sugerencia:* trace el diámetro AB'. Entonces β = ángulo ABC = ángulo $AB'C$ y ángulo $ACB' = 90°$.]



48. Plantee tres problemas con triángulos oblicuos. Uno debe tener como respuesta un triángulo, el segundo dos triángulos y el tercero ninguno.

Ley de los cosenos

En la sección 8.1 utilizamos la ley de los senos para resolver el caso 1 (LAA o ALA) y el caso 2 (LLA) de un triángulo oblicuo. En esta sección deduciremos la ley de los cosenos y la utilizaremos para resolver los otros casos, 3 y 4.

Caso 3 Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (LAL).
Caso 4 Se conocen tres lados (LLL).

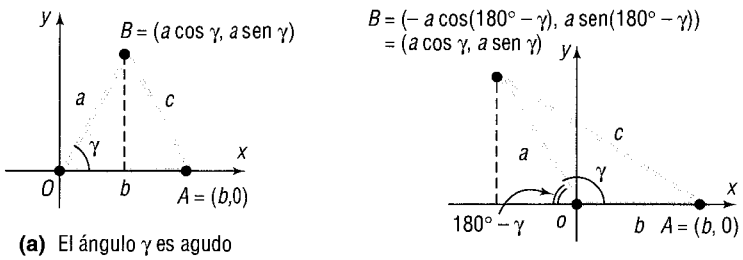
Teorema **Ley de los cosenos** Para un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{3}$$

Demostración Sólo demostraremos la fórmula (1). Las fórmulas (2) y (3) se pueden demostrar con el mismo argumento.

Primero colocaremos un triángulo en un sistema de coordenadas rectangulares, de manera estratégica, de modo que el vértice del ángulo γ quede en el origen y el lado b esté a lo largo del eje x positivo. Ya sea que γ sea agudo, como en la figura 17(a), o bien obtuso, como en la figura 17(b), el vértice B tiene coordenadas ($a\cos\gamma$, $a\operatorname{sen}\gamma$). El vértice A tiene coordenadas (b,0).

FIGURA 17



(a) El ángulo γ es agudo

(b) El ángulo γ es obtuso

Ahora podemos utilizar la fórmula de la distancia para calcular c^2:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos\gamma)^2 + (0 - a\operatorname{sen}\gamma)^2 \\ &= b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\operatorname{sen}^2\gamma \\ &= a^2(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Podemos enunciar cada una de las fórmulas (1), (2) y (3) de la manera siguiente:

Teorema **ley de los cosenos**

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo entre esos lados.

Observe que si el triángulo es rectángulo (por ejemplo, si $\gamma = 90°$), entonces la fórmula (1) se convierte en el familiar teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$. Así, el teorema de Pitágoras es un caso particular de la ley de los cosenos.

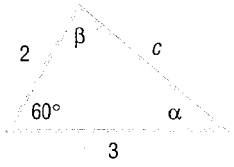
Ahora veremos cómo utilizar la ley de los cosenos para resolver el caso 3 (LAL), el cual se aplica a los triángulos en que conocemos dos lados y el ángulo entre ellos.

EJEMPLO 1 *Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LAL*

Resolver el triángulo: $a = 2,\ b = 3,\ \gamma = 60°$

Solución *Véase* la figura 18. La ley de los cosenos permite determinar con facilidad el tercer lado, c:

FIGURA 18



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 60° \\ &= 13 - (12\cdot\tfrac{1}{2}) = 7 \\ c &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

El lado c tiene como longitud $\sqrt{7}$. Para determinar los ángulos α y β podemos utilizar la ley de los senos o la de los cosenos. Es mejor utilizar la ley de los cosenos puesto que con ella obtenemos una ecuación con una solución. El uso de la ley de los senos conduce a una ecuación con dos soluciones, y tendríamos que verificar cuál de ellas se ajusta a los datos proporcionados. Así, optamos por utilizar las fórmulas (2) y (3) de la ley de los cosenos.

Para α:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 7 - 4}{2\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{12}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \alpha &\approx 40.9° \end{aligned}$$

Para β:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \\ \beta &\approx 79.1° \end{aligned}$$

Observe que $\alpha + \beta + \gamma = 40.9° + 79.1° + 60° = 180°$, como se requiere.

Ahora resuelva el problema 1.

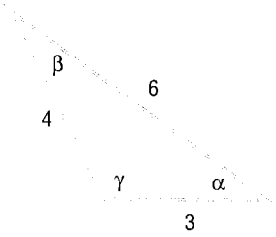
El siguiente ejemplo muestra la forma de utilizar la ley de los cosenos cuando se conocen los tres lados de un triángulo, el caso 4 (LLL).

EJEMPLO 5 Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LLL

Resolver el triángulo: $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$

Solución *Véase* la figura 19. Para determinar los ángulos α, β, y γ procedemos como en la última parte de la solución del ejemplo 1.

FIGURA 19



Para α:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{29}{36}$$

$$\alpha \approx 36.3°$$

Para β:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{43}{48}$$

$$\beta \approx 26.4°$$

como conocemos α y β,

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 36.3° - 26.4° = 117.3°$$

Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 6 Corrección de un error de navegación

Un bote de motor sale de Naples, Florida, hacia Key West, a 150 millas de distancia. Lleva una velocidad constante de 15 millas por hora pero navega con fuertes corrientes y vientos cruzados, la tripulación descubre, después de 4 horas, que el bote está fuera de curso por 20°.

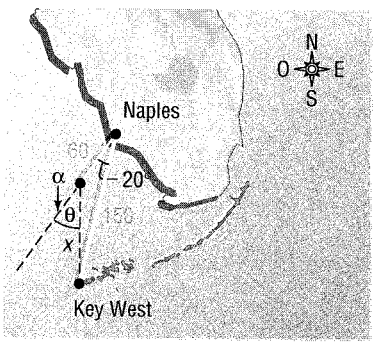
(a) ¿A qué distancia de Key West está el bote en ese momento?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar para corregir su curso?

(c) ¿Cuánto tiempo se agregó al viaje debido a la desviación del curso? (Suponga que la velocidad se mantiene en 15 millas por hora.)

Solución *Véase* la figura 20. Con una velocidad de 15 millas por hora, el bote ha recorrido 60 millas después de 4 horas. Buscamos la distancia x del bote a Key West y el ángulo θ con el cual debe girar para corregir su curso.

FIGURA 20



(a) Para determinar x utilizamos la ley de los cosenos, puesto que conocemos dos lados y el ángulo entre ellos.

$$x^2 = 150^2 + 60^2 - 2(150)(60) \cos 20° = 9186$$

$$x = 95.8$$

El bote está a casi 96 millas de Key West.

(b) Ahora conocemos los tres lados de un triángulo, de modo que podemos utilizar la ley de los cosenos de nuevo para determinar el ángulo α opuesto al lado que mide 150 millas.

$$150^2 = 96^2 + 60^2 - 2(96)(60) \cos \alpha$$

$$9684 = -11{,}520 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \approx -0.8406$$

$$\alpha \approx 147.2°$$

El bote debe virar con un ángulo de

$$\theta = 180° - \alpha \approx 180° - 147.2° = 32.8°$$

El bote debe virar con un ángulo aproximado de 33° para corregir su curso.

(c) La longitud total del viaje es entonces de 60 + 96 = 156 millas. Las 6 millas adicionales sólo requieren de unas 0.4 horas, o 24 minutos más, si se mantiene la velocidad de 15 millas por hora.

Ahora resuelva el problema 25.

DATO HISTÓRICO

■ La ley de los senos era conocida vagamente mucho antes de ser enunciada en forma explícita por Nasîr ed-dîn (cerca de 1250 d. C.). Ptolomeo (cerca de 150 d. C.) tenía conocimiento de ella en una forma que utiliza una función de la cuerda de una circunferencia en vez de la función seno. Pero fue enunciada por vez primera con claridad en Europa por Regiomontano, en 1464.

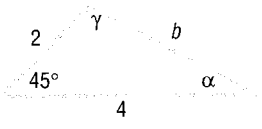
La ley de los cosenos aparece por primera vez en los *Elementos* de Euclides (Libro II), pero en forma disfrazada, donde los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos se suman y luego se resta un rectángulo que representa el coseno. Era conocida de esta forma por todos los matemáticos debido a su familiaridad con el trabajo de Euclides. Una de las presentaciones modernas de la ley de los cosenos (determinar el ángulo cuando se conocen los lados) fue enunciada por François Viète (en 1593).

La ley de las tangentes (remítase al problema 46 del ejercicio 8.1) ya es obsoleta. Fue utilizada en vez de la ley de los cosenos debido a que esta última era inconveniente para el cálculo con tablas de logaritmos o reglas de cálculo. Sin embargo, la combinación de sumas y multiplicaciones se ha simplificado mucho en la actualidad con el uso de las calculadoras; de modo que la ley de las tangentes ha sido guardada en el armario junto con la regla de cálculo. ■

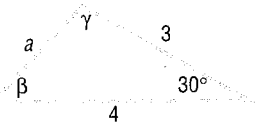
Ejercicio 8.2

En los problemas del 1 al 8 resuelva cada triángulo.

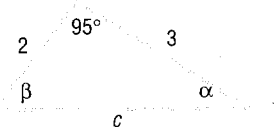
1.



2.

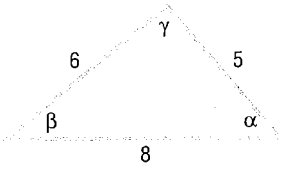


3.

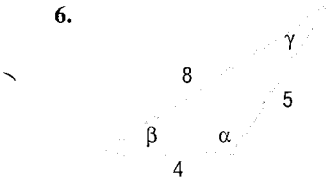


4.

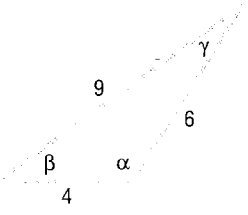
5.



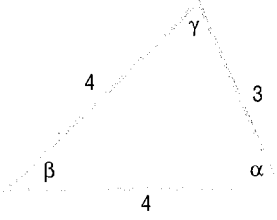
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 24 resuelva cada triángulo.

9. $a = 3, b = 4, \gamma = 40°$ **10.** $a = 2, c = 1, \beta = 10°$ **11.** $b = 1, c = 3, \alpha = 80°$

12. $a = 6, b = 4, \gamma = 60°$ **13.** $a = 3, c = 2, \beta = 110°$ **14.** $b = 4, c = 1, \alpha = 120°$

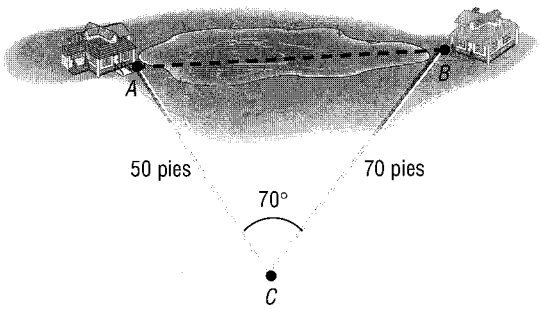
15. $a = 2, b = 2, \gamma = 50°$ **16.** $a = 3, c = 2, \beta = 90°$ **17.** $a = 12, b = 13, c = 5$

18. $a = 4, b = 5, c = 3$ **19.** $a = 2, b = 2, c = 2$ **20.** $a = 3, b = 3, c = 2$

21. $a = 5, b = 8, c = 9$ **22.** $a = 4, b = 3, c = 6$ **23.** $a = 10, b = 8, c = 5$

24. $a = 9, b = 7, c = 10$

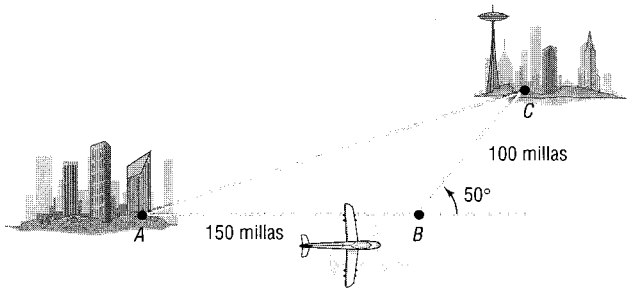
25. *Topografía.* Consulte la figura. Para determinar la distancia entre las casas A y B, un topógrafo mide el ángulo ACB y determina que mide 70°; después camina las distancias hacia cada casa, 50 y 70 pies, respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran las casas entre sí?



26. *Navegación.* Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 150 millas, y después vira con un ángulo de 50° y se dirige hacia la ciudad C, a una distancia de 100 millas (*véase* la figura).

(a) ¿A qué distancia se encuentra la ciudad A de la ciudad C?

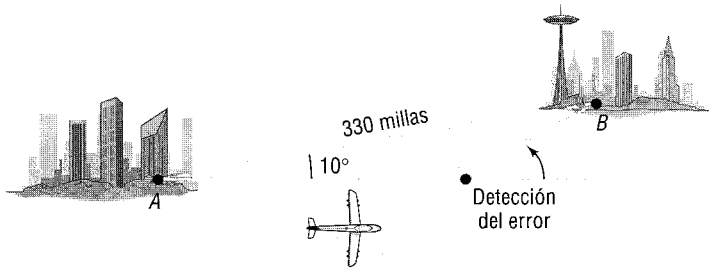
(b) ¿Con qué ángulo debe virar el piloto en la ciudad C para regresar a la ciudad A?



27. *Detección de un error de vuelo.* Al intentar volar de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 330 millas, un piloto elige un rumbo con 10° de error, como indica la figura.

(a) Si el avión mantiene una velocidad promedio de 220 millas por hora y el error en la dirección se descubre después de 15 minutos, ¿con qué ángulo se debe girar la nave para dirigirse hacia la ciudad B?

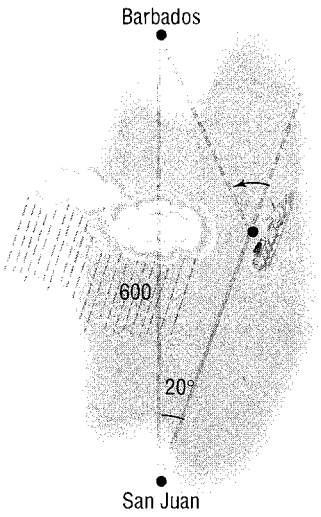
(b) ¿Qué nueva velocidad promedio debe mantener el piloto de modo que el tiempo total de vuelo sea de 90 minutos?



28. Un crucero mantiene una velocidad promedio de 15 nudos al ir de San Juan, Puerto Rico, a Barbados, en las Antillas, a una distancia de 600 millas náuticas. Para evitar una tormenta tropical, el capitán sale de San Juan en una dirección de 20° respecto a la línea recta hacia Barbados. El capitán mantiene la velocidad de 15 nudos durante 10 horas, después de lo cual la ruta hacia Barbados está libre de tormentas.

(a) ¿Con qué ángulo debe girar entonces para dirigirse directamente a Barbados?

(b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Barbados, si mantiene la velocidad de 15 nudos?



29. Un "diamante" de beisbol de las Grandes Ligas es en realidad un cuadrado de 90 pies por lado. El montículo de lanzamiento queda a 60.5 pies de la placa de *home*, sobre la recta que une *home* con la segunda base.

(a) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la primera base?

(b) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la segunda base?

(c) Si un lanzador está mirando hacia *home*, ¿con qué ángulo debe girar para ver hacia la primera base?

30. De acuerdo con el reglamento oficial del beisbol de Ligas Pequeñas, un diamante es un cuadrado con 60 pies por lado. El montículo de lanzamiento queda a 46 pies de la placa de *home*, sobre la recta que une *home* con la segunda base.

(a) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la primera base?

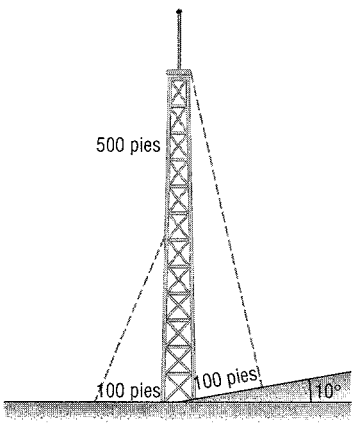
(b) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la segunda base?

(c) Si un lanzador ve hacia *home*, ¿con qué ángulo debe girar para voltear hacia la primera base?

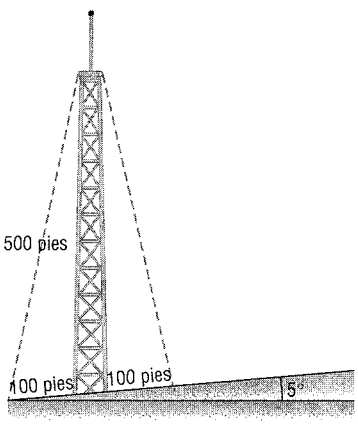
31. La altura de una torre de radio es de 500 pies y el piso a uno de sus lados tiene una pendiente hacia arriba, con ángulo de 10° (*véase* la figura).

(a) ¿Cuál debe ser la longitud de un cable de soporte si ha de unirse a la parte superior de la torre y asegurarse en un punto sobre la pendiente a 100 pies de la base de la torre?

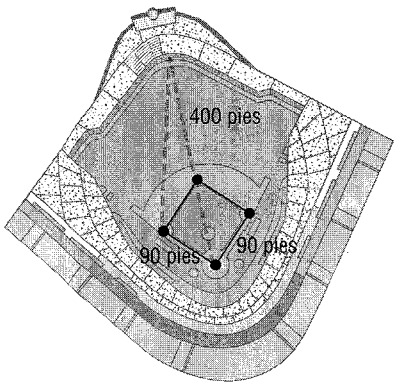
(b) ¿Cuál debe ser la longitud de otro cable de soporte si éste ha de conectarse a la mitad de la torre y asegurarse en un punto a 100 pies de la base?



32. Una torre de radio de 500 pies de altura está localizada en un lado de una colina que tiene una inclinación de 5° respecto a la horizontal (*véase* la figura). ¿Qué longitud deben tener dos cables de soporte si, conectados a la parte superior de la torre, deben asegurarse en dos puntos a 100 pies hacia arriba y hacia abajo de la base?



33. **Wrigley Field, casa de los Cachorros de Chicago** La distancia de la placa de *home* a la parte más alejada del jardín central en el Wrigley Field es de 400 pies (*véase* la figura). ¿A qué distancia se encuentra dicha parte del jardín central de la tercera base?

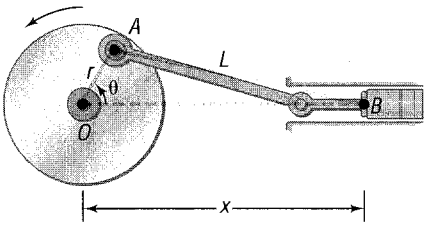


34. **Ligas pequeñas** La distancia de la placa de *home* a la parte más alejada del jardín central en el campo de liga pequeña de Oak Lawn es de 280 pies. ¿A qué distancia se encuentra esa parte del jardín central de la tercera base? [*Nota:* La distancia entre las bases en las Ligas Pequeñas es de 60 pies.]

35. **Varillas y pistones** La varilla OA (*véase* la figura) gira en torno a un punto fijo O, de modo que A recorre un círculo de radio r. El punto A tiene unida otra varilla AB de longitud $L > r$ y el punto B queda unido a un pistón. Muestre que la distancia x entre el punto O y el punto B está dada por

$$x = r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + L^2 - r^2}$$

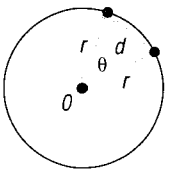
donde θ es el ángulo de rotación de la varilla OA.



36. **Cuerdas** Muestre que la longitud d de una cuerda en un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$d = 2r\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

donde θ es el ángulo central formado por los radios a los extremos de la cuerda (*véase* la figura). Utilice este resultado para deducir el hecho de que $\text{sen}\,\theta < \theta$, donde $\theta > 0$ se mide en radianes.



37. Para cualquier triángulo, muestre que

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. [*Sugerencia:* Utilice una fórmula para la mitad de un ángulo y la ley de los cosenos.]

38. Para cualquier triángulo, muestre que

$$\text{sen}\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

39. Utilice la ley de los cosenos para demostrar la identidad

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

40. Escriba su estrategia para resolver un triángulo oblicuo.

Área de un triángulo

En esta sección deduciremos varias fórmulas para calcular el área A de un triángulo. La más familiar de ellas es la siguiente:

Teorema El área A de un triángulo es

$$A = \tfrac{1}{2}bh \tag{1}$$

donde b es la base y h la altura trazada a esa base.

Demostración La deducción de esta fórmula resulta sencilla una vez que construimos un rectángulo de base b y altura h en torno del triángulo. *Véanse* las figuras 21 y 22.

Los triángulos 1 y 2 de la figura 22 tienen la misma área, al igual que los triángulos 3 y 4. Por lo tanto, el área de un triángulo con base b y altura h es precisamente la mitad del área del rectángulo, que es bh.

FIGURA 21
$A = \frac{1}{2}bh$

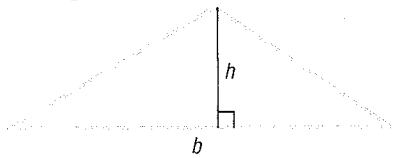
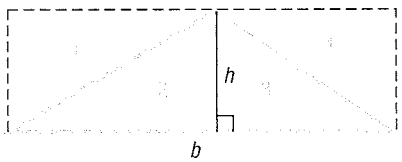


FIGURA 22



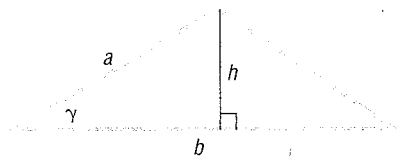
Si conocemos la base b y la altura h a esa base, entonces podemos determinar con facilidad el área de un triángulo mediante la fórmula (1). Sin embargo, lo usual es que no se disponga de la información necesaria para poderla utilizar. Por ejemplo, supongamos que conocemos dos lados a y b y el ángulo entre ellos γ (*véase* la figura 23). Entonces, podemos determinar la altura h observando que

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\gamma$$

de modo que

$$h = a \operatorname{sen}\gamma$$

FIGURA 23
$h = a \operatorname{sen}\gamma$



Utilizamos este hecho en la fórmula (1) para obtener

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}b(a \operatorname{sen}\gamma) = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma$$

Así, tenemos la fórmula

$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma \tag{2}$$

Al trazar las alturas desde los otros dos vértices del triángulo obtenemos las fórmulas correspondientes:

$$A = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha \tag{3}$$
$$A = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen}\beta \tag{4}$$

Es más fácil recordar estas fórmulas mediante la siguiente expresión:

Teorema El área A de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo entre ellos.

Determinar el área A de un triángulo tal que $a = 8$, $b = 6$, y $\gamma = 30°$.

Solución Utilizamos la fórmula (2) para obtener

$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \operatorname{sen} 30° = 12$$

Ahora resuelva el problema 1.

Si conocemos los tres lados de un triángulo podemos utilizar la llamada **fórmula de Herón** (en honor de Herón de Alejandría), para determinar su área.

Teorema Fórmula de Herón

El área A de un triángulo con lados a, b y c es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{5}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Demostración La demostración que daremos utiliza la ley de los cosenos y es un poco distinta de la establecida por Herón.

Por la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

y las dos fórmulas para la mitad de un ángulo,

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{2}$$

implican que

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2} &= \frac{1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{2} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} \\ &= \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{4ab} = \frac{2(s-c) \cdot 2s}{4ab} = \frac{s(s-c)}{ab} \end{aligned} \tag{6}$$

De manera análoga,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \tag{7}$$

Ahora utilicemos la fórmula (2) para el área:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma \\ &= \frac{1}{2}ab \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\ &= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Determinación del área de un triángulo

Determinar el área de un triángulo con lados 4, 5 y 7.

Solución Sean $a = 4$, $b = 5$, y $c = 7$. Entonces

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = \tfrac{1}{2}(4 + 5 + 7) = 8$$

La fórmula de Herón implica entonces que el área A es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

Ahora resuelva el problema 17.

DATO HISTÓRICO

■ La fórmula de Herón (también conocida como *fórmula de Hero*) es debida a Herón de Alejandría (cerca de 75 d. C.), quien, además de sus talentos matemáticos, tenía mucha habilidad para la ingeniería. En varios templos, sus dispositivos mecánicos producían efectos que parecían sobrenaturales y, supuestamente, los visitantes eran influidos hacia la generosidad. El libro *Métrica*, de Herón, acerca de la construcción de tales dispositivos, ha sobrevivido y fue descubierto en 1896 en la ciudad de Constantinopla.

La fórmula de Herón para el área de un triángulo causó cierto malestar en los matemáticos griegos, pues un producto con dos factores era un área y con tres factores era un volumen, pero el uso de cuatro factores parecía contradictorio en la época de Herón.

Karl Mollweide (1774-1875), matemático y astrónomo, descubrió las fórmulas que llevan su nombre (*véanse* los problemas 43 y 44 del ejercicio 8.1). Estas fórmulas no son importantes por sí mismas, sino que con frecuencia *simplifican* la deducción de otras fórmulas, como lo demuestran los problemas históricos 1 y 2 siguientes. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. Esta deducción de la fórmula de Herón utiliza la fórmula de Mollweide.

(a) Muestre que

$$\frac{s}{c} = \frac{\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)}{\operatorname{sen}(\gamma/2)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. *Sugerencia:* Utilice la fórmula de Mollweide (*véase* el problema 43 en el ejercicio 8.1) y sume 1 a ambos lados. Después aplique el hecho de que

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{sen}\frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

(b) De manera análoga, muestre que

$$\frac{s}{a} = \frac{\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2)} \quad \text{y} \quad \frac{s}{b} = \frac{\cos(\alpha/2)\cos(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\beta/2)}$$

(c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar lo siguiente:

$$\frac{s-a}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(o/2)} \qquad \frac{s-b}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\beta/2)}$$

$$\frac{s-c}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\operatorname{sen}(\beta/2)}{\operatorname{sen}(\gamma/2)}$$

(d) Ahora, forme el producto

$$\frac{s}{c}\cdot\frac{s-a}{a}\cdot\frac{s-b}{b}\cdot\frac{s-c}{c}$$

Después de cancelar, multiplique cada lado por abc, utilice las fórmulas para el doble de un ángulo y use el hecho de que $A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen}\beta$. Obtendrá entonces la fórmula de Herón.

2. Utilizaremos de nuevo la fórmula de Mollweide para deducir otras fórmulas interesantes. (Ya las hemos obtenido de otra forma en los problemas 37 y 38 del ejercicio 8.2.)

(a) Sume 1 a ambos lados de la segunda forma de la fórmula de Mollweide (*véase* el problema 44 del ejercicio 8.1) y simplifique para obtener

$$\frac{s-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\beta/2)}{\cos(\gamma/2)}$$

(b) De manera análoga, muestre que

$$\frac{s-c}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\gamma/2)}{\cos(\beta/2)}$$

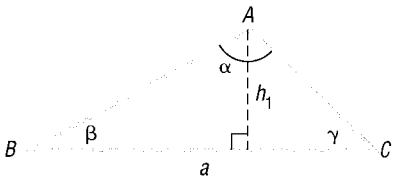
(c) Utilice los resultados de la parte (b) y del problema 1(b) y (c) para probar si

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{s(s-c)}{ab} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$$

(d) Muestre que

$$\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

3. (a) Si h_1, h_2, y h_3 son las alturas de un triángulo trazadas desde A, B, y C, respectivamente (*véase* la figura), pruebe si



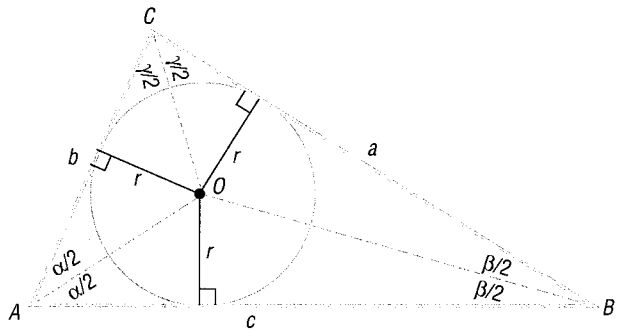
$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{s}{K}$$

donde K es el área del triángulo y $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. [*Sugerencia:* $h_1 = 2K/a$.]

(b) Muestre que una fórmula para la altura h desde un vértice hasta el lado opuesto a de un triángulo es

$$h = \frac{a \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

4. *Círculo inscrito.* Las rectas que bisectan cada ángulo de un triángulo se cortan en un único punto O, y la distancia perpendicular r desde O a cada lado del triángulo es la misma. El círculo con centro en O y radio r es el *círculo inscrito* del triángulo (*véase* la figura).



(a) Aplique el problema 3(b) al triángulo OAB para mostrar que

$$r = \frac{c \operatorname{sen}(\alpha/2)\operatorname{sen}(\beta/2)}{\cos(\gamma/2)}$$

(b) Utilice los resultados de la parte (a) y el problema 1(c) para probar si

$$r = (s - c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

(c) Muestre que

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

(d) Verifique si el área K de un triángulo ABC es $K = rs$. Muestre entonces que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

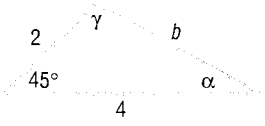
donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

5. Determine las coordenadas del centro O del círculo inscrito en términos de a, b, c, α, β, y γ. Después, escriba la ecuación general del círculo inscrito. [*Sugerencia:* Utilice un sistema de coordenadas rectangulares, donde el vértice A está en el origen y el lado c a lo largo del eje x positivo.] ■

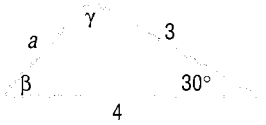
Ejercicio 8.3

En los problemas del 1 al 8 determine el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

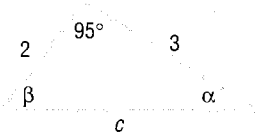
1.



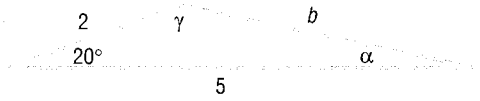
2.



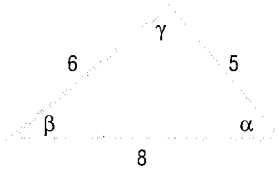
3.



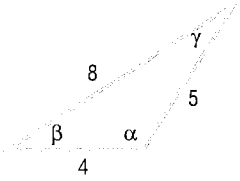
4.



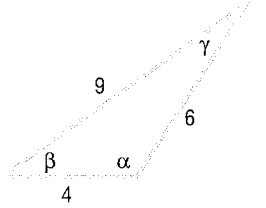
5.



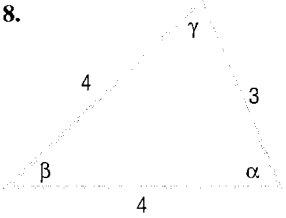
6.



7.



8.

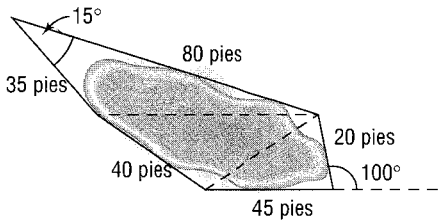


En los problemas del 9 al 24 determine el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

9. $a = 3, b = 4, \gamma = 40°$
10. $a = 2, c = 1, \beta = 10°$
11. $b = 1, c = 3, \alpha = 80°$
12. $a = 6, b = 4, \gamma = 60°$
13. $a = 3, c = 2, \beta = 110°$
14. $b = 4, c = 1, \alpha = 120°$
15. $a = 2, b = 2, \gamma = 50°$
16. $a = 3, c = 2, \beta = 90°$
17. $a = 12, b = 13, c = 5$
18. $a = 4, b = 5, c = 3$
19. $a = 2, b = 2, c = 2$
20. $a = 3, b = 3, c = 2$
21. $a = 5, b = 8, c = 9$
22. $a = 4, b = 3, c = 6$
23. $a = 10, b = 8, c = 5$
24. $a = 9, b = 7, c = 10$

25. *Costo de un lote triangular.* Las dimensiones de un lote triangular son 100 por 50 por 75 pies. Si el precio del terreno es de $3.00 por pie cuadrado, ¿cuánto cuesta el lote?

26. *Aproximación del área de un lago.* Para calcular aproximadamente el área de un lago, un topógrafo camina por todo el perímetro del lago y toma las medidas que aparecen en la ilustración anexa. Con esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago? [*Sugerencia:* utilice la ley de los cosenos en los tres triángulos mostrados y después determine la suma de sus áreas.]



27. *Área de un triángulo.* Demuestre que el área A de un triángulo está dada por la fórmula

$$A = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

28. *Área de un triángulo.* Demuestre las otras dos formas de la fórmula dada en el problema 27,

$$A = \frac{b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \beta} \quad \text{y} \quad A = \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{2 \operatorname{sen} \gamma}$$

En los problemas del 29 al 36 utilice los resultados del problema 27 o 28 para determinar el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

29. $\alpha = 40°, \beta = 20°, a = 2$

30. $\alpha = 50°, \gamma = 20°, a = 3$

31. $\beta = 70°, \gamma = 10°, b = 5$

32. $\alpha = 70°, \beta = 60°, c = 4$

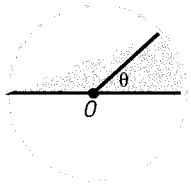
33. $\alpha = 110°, \gamma = 30°, c = 3$

34. $\beta = 10°, \gamma = 100°, b = 2$

35. $\alpha = 40°, \beta = 40°, c = 2$

36. $\beta = 20°, \gamma = 70°, a = 1$

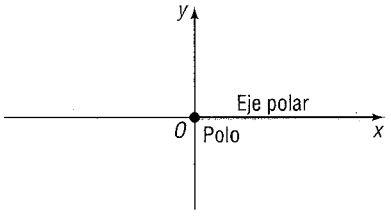
37. *Geometría.* Consulte la figura anexa, la cual muestra un círculo de radio r con centro en O. Determine el área A de la región sombreada en función del ángulo central θ.



Coordenadas polares

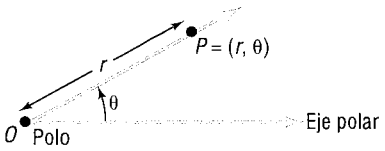
Hasta ahora, siempre hemos utilizado un sistema de coordenadas rectangulares para localizar los puntos del plano. Pero ya estamos listos para desarrollar otro sistema, las *coordenadas polares*. Como veremos en breve, en muchos casos, las coordenadas polares ofrecen ciertas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

FIGURA 24



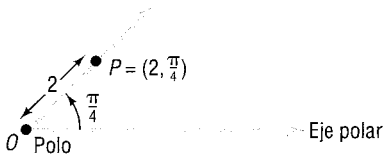
En un sistema de coordenadas rectangulares, como recordará, un punto del plano se representa mediante un par ordenado de números (x,y), donde x y y indican las distancias con signo desde el eje y y el eje x, respectivamente. En un sistema de coordenadas polares elegimos un punto, el **polo,** y después un rayo con vértice en el polo, llamado **eje polar.** Al comparar los sistemas de coordenadas rectangulares y polares, vemos (figura 24) que el origen de las coordenadas rectangulares coincide con el polo de las coordenadas polares, y el eje x positivo de las coordenadas rectangulares coincide con el eje polar de las coordenadas polares.

FIGURA 25



Un punto P en un sistema de coordenadas polares se representa mediante un par ordenado de números (r, θ). El número r es la distancia del punto al polo, y θ es el ángulo (en grados o radianes) formado por el eje polar y un rayo que sale del polo y pasa por el punto. Llamamos al par ordenado (r, θ) las **coordenadas polares** del punto. *Véase* la figura 25.

FIGURA 26



Por ejemplo, supongamos que las coordenadas polares de un punto P son $(2, \pi/4)$. Localizamos P trazando primero un ángulo de $\pi/4$ radianes, colocamos su vértice en el polo y su lado inicial a lo largo del eje polar. Después recorremos una distancia de 2 unidades a lo largo del lado final del ángulo para llegar al punto P. *Véase* la figura 26.

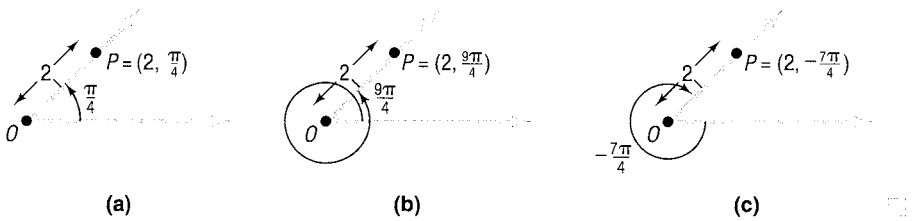
Ahora resuelva el problema 1.

Recuerde que un ángulo medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj es positivo, mientras que uno medido en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Esta convención tiene algunas consecuencias interesantes respecto a las coordenadas polares. Veamos cuáles son esas consecuencias.

EJEMPLO 1 Determinación de varias coordenadas polares de un único punto

Consideremos de nuevo un punto P con coordenadas polares $(2, \pi/4)$, como nos muestra la figura 27(a). Dado que $\pi/4$, $9\pi/4$, y $-7\pi/4$ tienen todos el mismo lado final, también habríamos podido localizar este punto P utilizando las coordenadas polares $(2, 9\pi/4)$ o $(2, -7\pi/4)$, como se ve en las figuras 27(b) y (c).

FIGURA 27



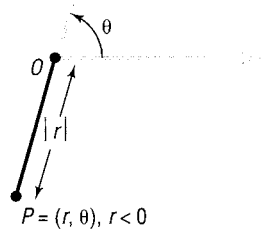


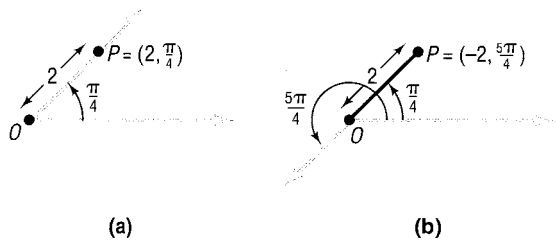
FIGURA 28

Al utilizar las coordenadas polares (r, θ) es posible que la primera entrada r sea negativa. Cuando esto ocurre convenimos en que la posición del punto, en vez de estar sobre el lado final de θ, esté sobre el rayo del polo que se extiende en la dirección opuesta al lado final de θ, a una distancia $|r|$ del polo. *Véase* la figura 28.

EJEMPLO 2 Coordenadas polares (r, θ), $r < 0$

Consideremos de nuevo el punto P con coordenadas polares $(2, \pi/4)$, según muestra la figura 29(a). Este mismo punto P puede tener las coordenadas polares $(-2, 5\pi/4)$, como indica la figura 29(b). Para localizar el punto $(-2, 5\pi/4)$, utilizamos el rayo en la dirección opuesta de $5\pi/4$ y recorremos dos unidades sobre ese rayo hasta encontrar el punto P.

FIGURA 29



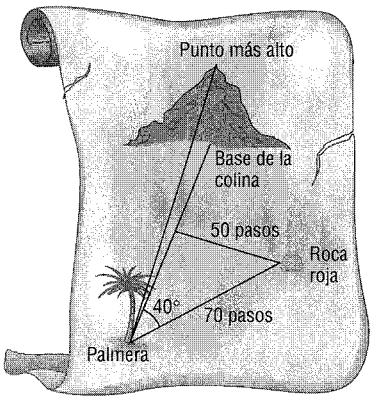
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 8

Al bucear cerca de Wreck Hill en las Bermudas, un grupo de 5 jóvenes descubrieron el mapa de un tesoro en el casco de un barco pirata hundido en 1747. El mapa los guió hasta un área de las Bermudas ahora conocida como Flatts, pero cuando llegaron ahí se dieron cuenta de que el objeto más importante del mapa había desaparecido. Llamaron al equipo de Misión Posible para que los ayudara a reconstruir el mapa, prometiendo como pago el 25% del tesoro que se encontrara.

Las instrucciones del mapa son las siguientes:

1. Desde la palmera más alta, observa la colina más alta. Baja la vista verticalmente, hasta ver la base de la colina.
2. Gira 40° en el sentido de las manecillas del reloj a partir de esa línea, y camina 70 pasos hasta la gran roca roja.
3. Desde la roca roja, camina 50 pasos de regreso hasta la línea de visión entre la palmera y la colina. Cava ahí.



Los 5 jóvenes piensan que han encontrado la roca roja y la colina más alta cerca de ahí, pero la "palmera más alta" ha desaparecido. Se les ha ocurrido que el tesoro debe estar enterrado en un punto de un círculo con radio de 50 "pasos" y centro en la roca roja, pero no van a cavar un agujero de 470 pies de circunferencia, en particular porque no tienen la certeza de que el tesoro siga ahí. (Han establecido que un "paso" es casi una yarda.)

1. Determine un plan para localizar la posición de la palmera perdida y escriba una explicación de su procedimiento dirigida a los jóvenes.
2. Por desgracia, los jóvenes tenían más en común con los piratas del siglo XVIII de lo que pensaban. Una vez que supieron la posición de la palmera perdida, ataron al equipo de Misión Posible a la roca roja, diciendo que ellos se harían cargo del resto del trabajo. A partir de la posición de la palmera, se orientaron a 40° en dirección contraria a las manecillas del reloj desde la roca hasta la colina, luego corrieron como 30 yardas hasta el círculo que habían trazado en torno de la roca y comenzaron a cavar de manera frenética. Pero nada. Después de una hora se fueron gritando: "¡25% de nada es nada!"
3. Por fortuna dejaron sus palas. Después de desatarse por sí mismos, ustedes fueron al lugar correcto y encontraron el tesoro. ¿Dónde estaba? ¿A qué distancia se encontraba del punto en que ustedes ubicaron la palmera? Explique su respuesta.
4. Las personas que bucean en busca de tesoros tienen ciertas obligaciones legales. ¿Cuáles son éstas? ¿Debe usted compartir el tesoro con un abogado sólo para que pueda quedarse con el resto?

Estos ejemplos muestran una diferencia fundamental entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares. En las primeras, cada punto tiene exactamente un par de coordenadas rectangulares; en las segundas, un punto puede tener una infinidad de pares de coordenadas polares.

Resumen Un punto con coordenadas polares (r, θ) también se puede representar con cualquiera de las siguientes formas:

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{o} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi), \qquad k \text{ es un entero arbitrario}$$

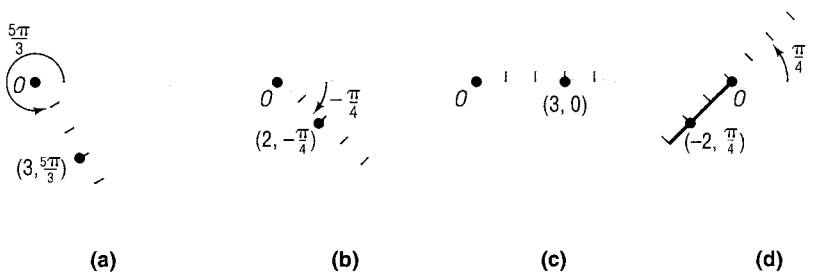
Las coordenadas polares del polo son $(0, \theta)$, donde θ puede ser cualquier ángulo.

Localice los puntos con las siguientes coordenadas polares:

(a) $(3, 5\pi/3)$ (b) $(2, -\pi/4)$ (c) $(3, 0)$ (d) $(-2, \pi/4)$

La figura 30 muestra los puntos.

FIGURA 30



Ahora resuelva el problema 9.

Localice el punto P con coordenadas polares $(3, \pi/6)$ y determine otras coordenadas polares (r, θ) de este mismo punto, para las cuales:

(a) $r > 0, \quad 2\pi \leq \theta \leq 4\pi$ (b) $r < 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

(c) $r > 0, \quad -2\pi \leq \theta \leq 0$

La figura 31 muestra el punto $(3, \pi/6)$.

(a) Sumamos una vuelta (2π radianes) al ángulo $\pi/6$ para obtener $P = (3, \pi/6 + 2\pi) = (3, 13\pi/6)$. *Véase* la figura 32.

FIGURA 31

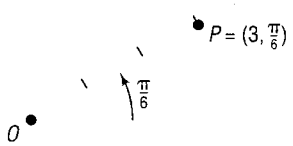
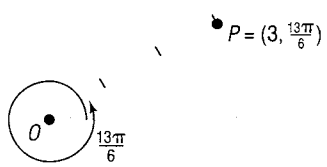
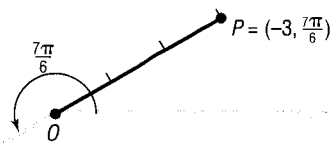


FIGURA 32



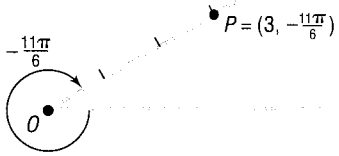
(b) Sumamos media vuelta (π radianes) al ángulo y reemplazamos r por $-r$ para obtener $P = (-3, \pi/6 + \pi) = (-3, 7\pi/6)$. *Véase* la figura 33.

FIGURA 33



(c) Restamos 2π del ángulo $\pi/6$ para obtener $P = (3, \pi/6 - 2\pi) = (3, -11\pi/6)$. *Véase* la figura 34.

FIGURA 34



Ahora resuelva el problema 13.

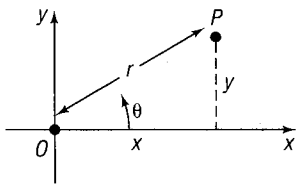
Conversión entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares

A veces es conveniente, e incluso necesario, poder convertir las coordenadas o ecuaciones de la forma rectangular a la forma polar, y viceversa. Para esto, recordemos que el origen de las coordenadas rectangulares es el polo de las coordenadas polares, y que el eje x positivo de las coordenadas rectangulares es el eje polar de las coordenadas polares.

Si P es un punto con coordenadas polares (r, θ), las coordenadas rectangulares (x,y) de P están dadas por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

FIGURA 35



Suponga que P tiene coordenadas polares (r, θ). Buscamos las coordenadas rectangulares (x,y) de P. Consulte la figura 35.

Si $r = 0$, entonces, independientemente de θ, el punto P es el polo para el cual las coordenadas rectangulares son (0,0). Así, la fórmula (1) es válida para $r = 0$.

Si $r > 0$, el punto P está en el lado final de θ y $r = d(O, P)$.

Así,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

y

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Si $r < 0$, entonces el punto $P = (r, \theta)$ se puede representar como $(-r, \pi + \theta)$, donde $-r > 0$. Así,

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta = \frac{x}{-r} \qquad \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{-r}$$

de modo que

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Determinar las coordenadas rectangulares de los puntos con las siguientes coordenadas polares:

(a) $(6, \pi/6)$ (b) $(-2, 5\pi/4)$ (c) $(-4, -\pi/4)$

Utilizamos la fórmula (1): $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.

(a) *Véase* la figura 36(a).

$$x = r\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 6\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Las coordenadas rectangulares del punto $(6, \pi/6)$ son $(3\sqrt{3}, 3)$.

(b) *Véase* la figura 36(b).

$$x = r\cos\theta = -2\cos\frac{5\pi}{4} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto $(-2, 5\pi/4)$ son $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

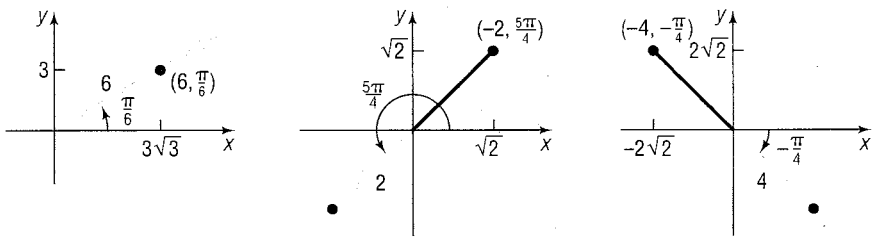
(c) *Véase* la figura 36(c).

$$x = r\cos\theta = -4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -4\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto dado $(-4, -\pi/4)$ son $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

FIGURA 36



(a) (b) (c)

Nota: La mayor parte de las calculadoras pueden convertir de coordenadas polares a rectangulares. Consulte en el manual del usuario cómo hacerlo. Como el procedimiento es tedioso en muchos casos, verá que es más sencillo utilizar la fórmula (1).

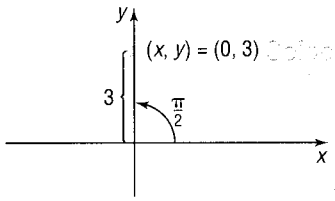
Ahora resuelva los problemas 21 y 33.

Convertir de coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, θ) es un poco más complicado. *Veamos* algunos ejemplos.

EJEMPLO 6 *Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares*

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son (0,3).

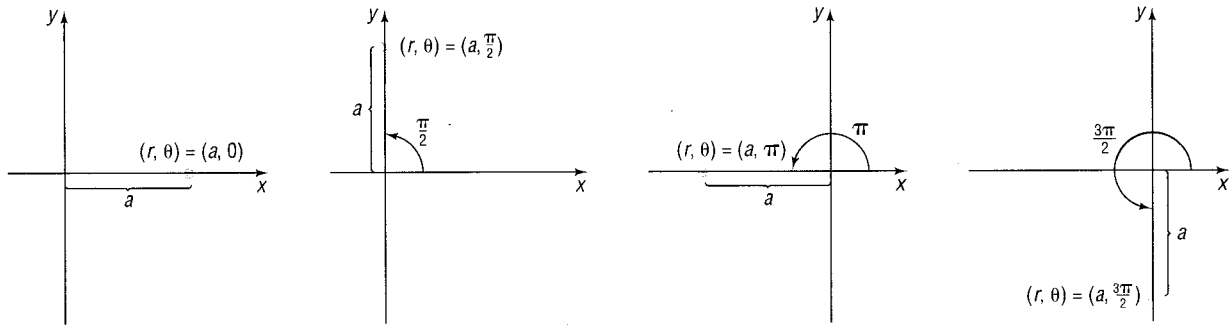
FIGURA 37



Solución *Véase* la figura 37. El punto (0,3) está sobre el eje y, a una distancia de 3 unidades del origen (polo). Las coordenadas polares de este punto pueden ser $(3, \pi/2)$.

La figura 38 muestra las coordenadas polares de puntos que están sobre el eje x o sobre el eje y.

FIGURA 38



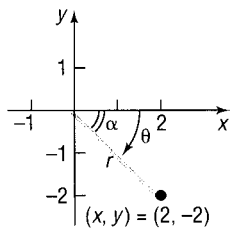
(a) $(x, y) = (a, 0), a > 0$ **(b)** $(x, y) = (0, a), a > 0$ **(c)** $(x, y) = (-a, 0), a > 0$ **(d)** $(x, y) = (0, -a), a > 0$

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 7 *Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares*

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(2, -2)$.

FIGURA 39



Solución *Véase* la figura 39. La distancia r del origen al punto $(2, -2)$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para determinar θ, utilizamos el ángulo de referencia α. Entonces,

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right| = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Así, $\theta = -\pi/4$, y un conjunto de coordenadas polares para este punto es $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$. Otras posibles representaciones son $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ y $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

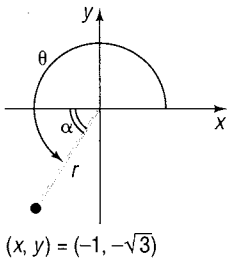
EJEMPLO 8 *Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares*

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(-1, -\sqrt{3})$.

Solución *Véase* la figura 40. La distancia r del origen al punto $(-1, -\sqrt{3})$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

FIGURA 40



Para determinar θ, utilizamos el ángulo de referencia α. Entonces,

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

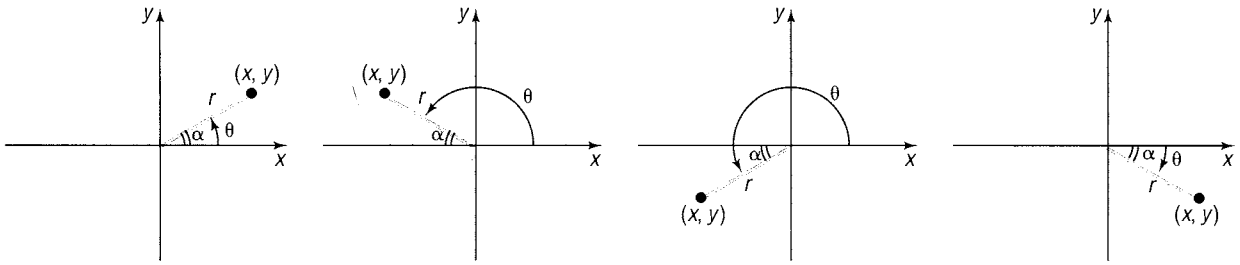
Así,

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

y un conjunto de coordenadas polares es $(2, 4\pi/3)$. Otras posibles representaciones son $(-2, \pi/3)$ y $(2, -2\pi/3)$. ■

La figura 41 muestra la forma de determinar las coordenadas polares de un punto que se encuentra en un cuadrante dado cuando se proporcionan sus coordenadas rectangulares.

FIGURA 41



■ Ahora resuelva el problema 41.

Con base en el análisis anterior, tenemos las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \tag{2}$$

Advertencia: Tenga cuidado al utilizar la fórmula (2). Siempre trace primero el punto (x,y), como lo hicimos en los ejemplos 7 y 8, para elegir r y θ de modo que reflejen el cuadrante correcto. Revise de nuevo la figura 41.

Nota: La mayor parte de las calculadoras pueden convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Consulte el manual del usuario para aprender la secuencia de teclas adecuada. Como en muchos casos, el procedimiento es tedioso, verá que es más rápido utilizar la fórmula (2).

Las fórmulas (1) y (2) sirven también para transformar ecuaciones.

EJEMPLO 9 *Transformación de ecuaciones de forma polar a forma rectangular*

Transformar la ecuación $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares, e identificar la gráfica.

Solución Si multiplicamos cada lado por r, será más fácil utilizar las fórmulas (1) y (2):

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$
$$r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta \quad \text{Multiplicamos cada lado por } r.$$
$$x^2 + y^2 = 4y \quad \text{Aplicamos las fórmulas (1) y (2).}$$

Esta es la ecuación de un círculo:

$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0$$
$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Su centro está en (0,2) y su radio es 2. □

■ Ahora resuelva el problema 57.

EJEMPLO 10 *Transformación de una ecuación de forma rectangular a forma polar*

Transformar la ecuación $4xy = 9$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Solución Utilizamos la fórmula (1):

$$4xy = 9$$
$$4(r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta) = 9 \quad \text{Fórmula (1).}$$
$$4r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 9$$
$$2r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 9 \quad \text{Fórmula para el doble de un ángulo.}$$ □

Ejercicio 8.4

En los problemas del 1 al 12 trace cada punto dado en coordenadas polares.

1. $(3, 90°)$	**2.** $(4, 270°)$	**3.** $(-2, 0)$	**4.** $(-3, \pi)$
5. $(6, \pi/6)$	**6.** $(5, 5\pi/3)$	**7.** $(-2, 135°)$	**8.** $(-3, 120°)$
9. $(-1, -\pi/3)$	**10.** $(-3, -3\pi/4)$	**11.** $(-2, -\pi)$	**12.** $(-3, -\pi/2)$

En los problemas del 13 al 20, trace cada punto dado en coordenadas polares y determine otras coordenadas polares (r, θ) del punto, para las cuales:

(a) $r > 0, \quad -2\pi \leq \theta < 0$ *(b)* $r < 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$ *(c)* $r > 0, \quad 2\pi \leq \theta < 4\pi$

13. $(5, 2\pi/3)$	**14.** $(4, 3\pi/4)$	**15.** $(-2, 3\pi)$	**16.** $(-3, 4\pi)$
17. $(1, \pi/2)$	**18.** $(2, \pi)$	**19.** $(-3, -\pi/4)$	**20.** $(-2, -2\pi/3)$

En los problemas del 21 al 36 se proporcionan las coordenadas polares de un punto. Determine las coordenadas rectangulares de cada punto.

21. $(3, \pi/2)$	**22.** $(4, 3\pi/2)$	**23.** $(-2, 0)$	**24.** $(-3, \pi)$
25. $(6, 150°)$	**26.** $(5, 300°)$	**27.** $(-2, 3\pi/4)$	**28.** $(-3, 2\pi/3)$
29. $(-1, -\pi/3)$	**30.** $(-3, -3\pi/4)$	**31.** $(-2, -180°)$	**32.** $(-3, -90°)$
33. $(7.5, 110°)$	**34.** $(-3.1, 182°)$	**35.** $(6.3, 3.8)$	**36.** $(8.1, 5.2)$

En los problemas del 37 al 48 se proporcionan las coordenadas rectangulares de un punto. Determine las coordenadas polares de cada punto.

37. $(3, 0)$ **38.** $(0, 2)$ **39.** $(-1, 0)$ **40.** $(0, -2)$

41. $(1, -1)$ **42.** $(-3, 3)$ **43.** $(\sqrt{3}, 1)$ **44.** $(-2, -2\sqrt{3})$

45. $(1.3, -2.1)$ **46.** $(-0.8, -2.1)$ **47.** $(8.3, 4.2)$ **48.** $(-2.3, 0.2)$

En los problemas del 49 al 56 las letras x y y representan coordenadas rectangulares. Escriba cada ecuación con coordenadas polares (r, θ).

49. $2x^2 + 2y^2 = 3$ **50.** $x^2 + y^2 = x$ **51.** $x^2 = 4y$ **52.** $y^2 = 2x$

53. $2xy = 1$ **54.** $4x^2y = 1$ **55.** $x = 4$ **56.** $y = -3$

En los problemas del 57 al 64, las letras r y θ representan coordenadas polares. Escriba cada ecuación con coordenadas rectangulares (x, y).

57. $r = \cos\theta$ **58.** $r = \operatorname{sen}\theta + 1$ **59.** $r^2 = \cos\theta$ **60.** $r = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

61. $r = 2$ **62.** $r = 4$ **63.** $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ **64.** $r = \dfrac{3}{3 - \cos\theta}$

65. Muestre que la fórmula para la distancia d entre dos puntos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ y $P_2 = (r_2, \theta_2)$ es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

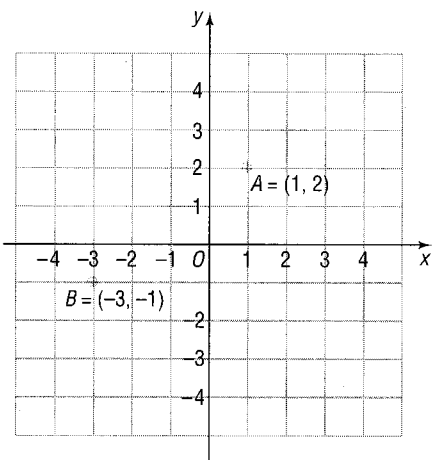
Ecuaciones y gráficas polares

Ecuación polar

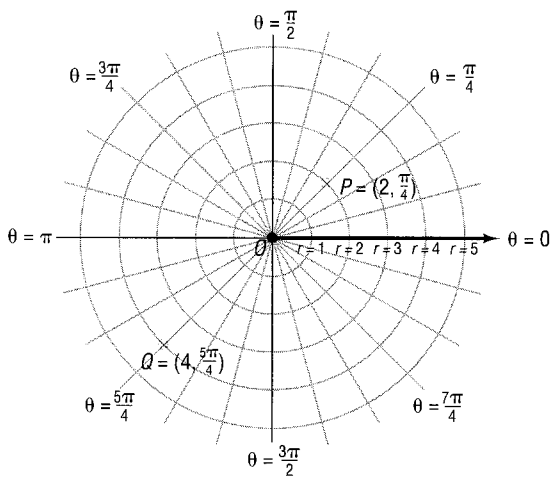
Una ecuación cuyas variables son coordenadas polares es una **ecuación polar.** La **gráfica de una ecuación polar** es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación.

FIGURA 42

De la misma forma en que podemos utilizar una retícula rectangular para trazar puntos dados por coordenadas rectangulares, como en la figura 42(a), podemos



(a) Retícula rectangular



(b) Retícula polar

utilizar una retícula formada por círculos concéntricos (con centro en el polo) y rayos (con vértice en el polo) para localizar puntos dados por coordenadas polares, como en la figura 42(b). Utilizaremos estas **retículas polares** para hacer las gráficas de ecuaciones polares.

Un método para hacer la gráfica de una ecuación polar es convertirla a coordenadas rectangulares. En el análisis siguiente, (x, y) representan las coordenadas rectangulares de un punto P y (r, θ) son las coordenadas polares del punto P.

EJEMPLO 2 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Parte I)*

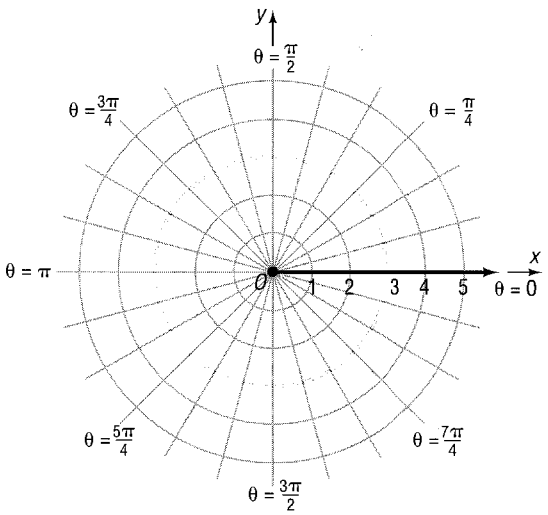
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = 3$

Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$r = 3$$
$$r^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Así, la gráfica de $r = 3$ es un círculo, con centro en el polo y radio 3. *Véase* la figura 43.

FIGURA 43
$r = 3$ o $x^2 + y^2 = 9$



Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Parte II)*

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $\theta = \pi/4$

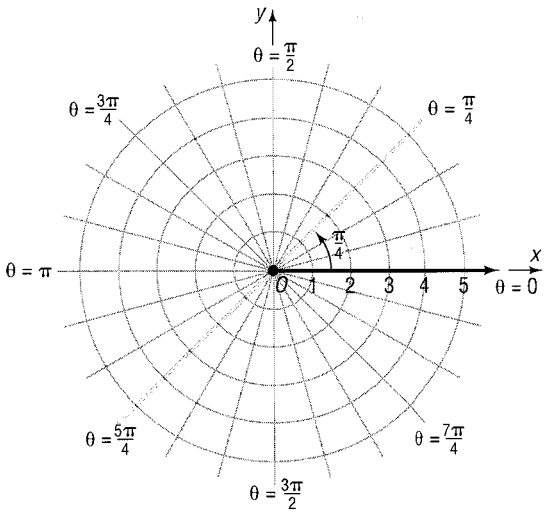
Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$
$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\frac{y}{x} = 1$$
$$y = x$$

La gráfica de $\theta = \pi/4$ es una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje polar. *Véase* la figura 44.

FIGURA 44

$\theta = \frac{\pi}{4}$ o $y = x$



EJEMPLO 3 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta)*

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $\theta = -\pi/6$.

Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

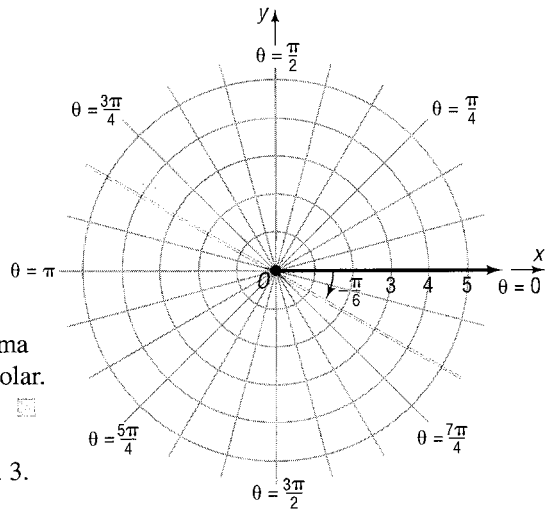
$$\frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

La gráfica de $\theta = -\pi/6$ es una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $-\pi/6$ con el eje polar. *Véase* la figura 45. ■

FIGURA 45

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ o $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$



■ Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 4 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta horizontal)*

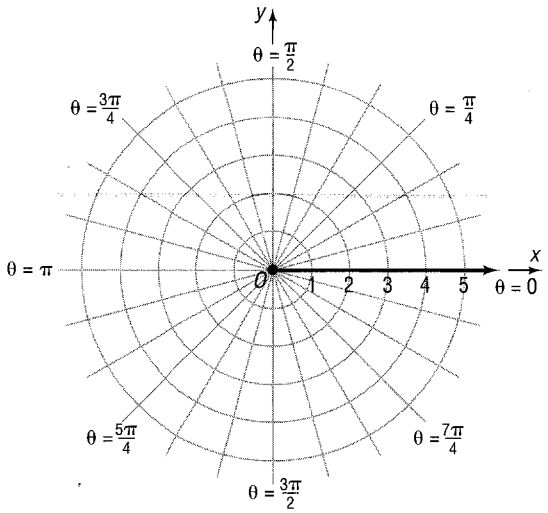
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r \operatorname{sen}\theta = 2$

Solución Como $y = r \operatorname{sen}\theta$, podemos escribir la ecuación como

$$y = 2$$

Concluimos que la gráfica de $r \operatorname{sen} \theta = 2$ es una recta horizontal a 2 unidades sobre el polo. *Véase* la figura 46.

FIGURA 46
$r \operatorname{sen} \theta = 2$ o $y = 2$



Comentario: Para hacer la gráfica de una ecuación en coordenadas polares hay que utilizar el esquema $r = f(\theta)$. Además, hay que establecer los valores del *rango*. Es mejor utilizar una pantalla cuadrada y medir en radianes.

Verificación: Verificar la gráfica de $r \operatorname{sen} \theta = 2$ haciendo la gráfica de $r = 2/(\operatorname{sen} \theta)$.

EJEMPLO 5 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta vertical)*

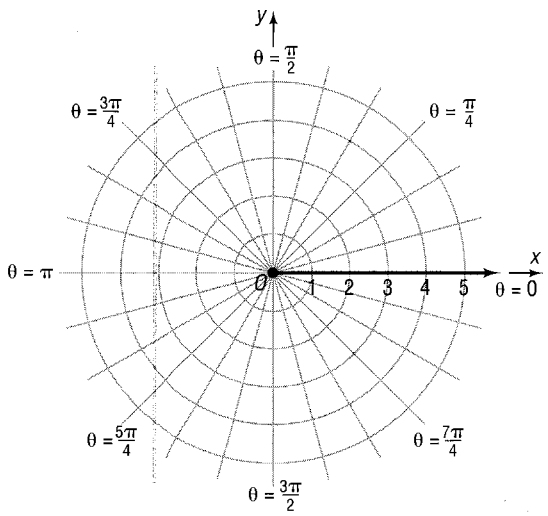
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r \cos \theta = -3$

Solución Como $x = r \cos \theta$, podemos escribir la ecuación como

$$x = -3$$

Concluimos que la gráfica de $r \cos \theta = -3$ es una recta vertical a 3 unidades a la izquierda del polo. *Véase* la figura 47.

FIGURA 47
$r \cos \theta = -3$ o $x = -3$



Con base en los ejemplos 4 y 5, tenemos los siguientes enunciados. (Las demostraciones quedan como ejercicio.)

Si a es un número real distinto de cero:

La gráfica de la ecuación

$$r \operatorname{sen} \theta = a$$

es una recta horizontal que está a unidades arriba del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades bajo el polo, si $a < 0$.

La gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = a$$

es una recta vertical que está a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo, si $a < 0$.

Ahora resuelva el problema 7.

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

Para transformar la ecuación a coordenadas rectangulares multiplicamos cada lado por r:

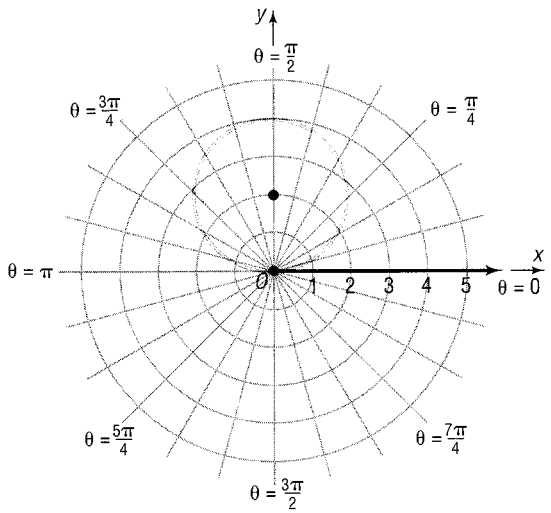
$$r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$$

Ahora utilizamos los hechos de que $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$. Entonces

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro (0,2) en coordenadas rectangulares y radio 2. *Véase* la figura 48.

FIGURA 48
$r = 4 \operatorname{sen} \theta$ o $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



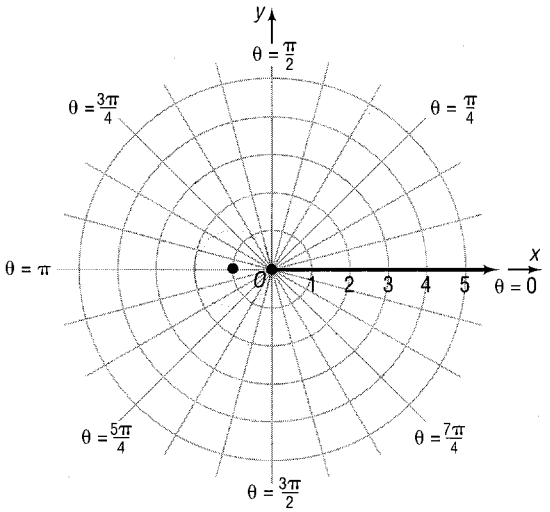
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = -2\cos\theta$

Procedemos como en el ejemplo 6:

$$r^2 = -2r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = -2x$$
$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro $(-1, 0)$ en coordenadas rectangulares y radio 1. *Véase* la figura 49.

FIGURA 49
$r = -2\cos\theta$ o $(x+1)^2 + y^2 = 1$



Haga la gráfica de $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ y compare el resultado con la figura 48. Limpie la pantalla y haga lo mismo para $r = -2\cos\theta$ y compare con la figura 49.

Exploración: Haga la gráfica de $r = \text{sen}\,\theta$, $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, y $r = 3\,\text{sen}\,\theta$. ¿Puede ver el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = -\text{sen}\,\theta$, $r = -2\,\text{sen}\,\theta$, y $r = -3\,\text{sen}\,\theta$. ¿Advierte el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = \cos\theta$, $r = 2\cos\theta$, y $r = 3\cos\theta$. ¿Puede ver el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = -\cos\theta$, $r = -2\cos\theta$, y $r = -3\cos\theta$. ¿Puede ver el patrón?

Con base en los ejemplos 6 y 7, tenemos los siguientes enunciados. (Las demostraciones quedan como ejercicio.)

Sea a un número real positivo. Entonces:

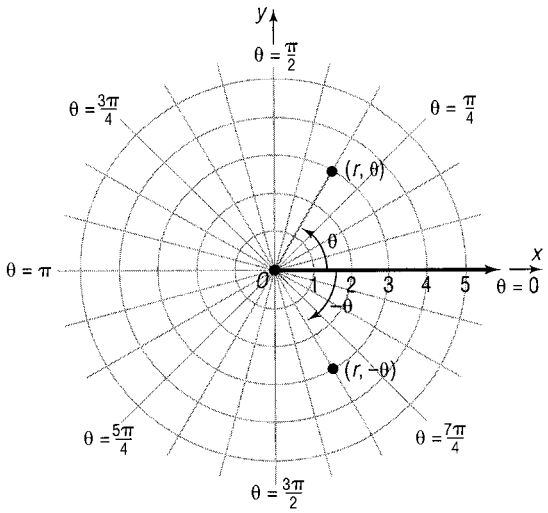
	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(a)	$r = 2a\,\text{sen}\,\theta$	Círculo: radio a; centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares
(b)	$r = -2a\,\text{sen}\,\theta$	Círculo: radio a; centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares
(c)	$r = 2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares
(d)	$r = -2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares

El método de conversión de una ecuación polar a una ecuación rectangular identificable para poder hacer su gráfica no siempre es muy útil, tampoco necesario. Por lo general, construimos una tabla con varios puntos de la gráfica. Al verificar la simetría podríamos reducir el número de puntos necesarios para trazar la gráfica.

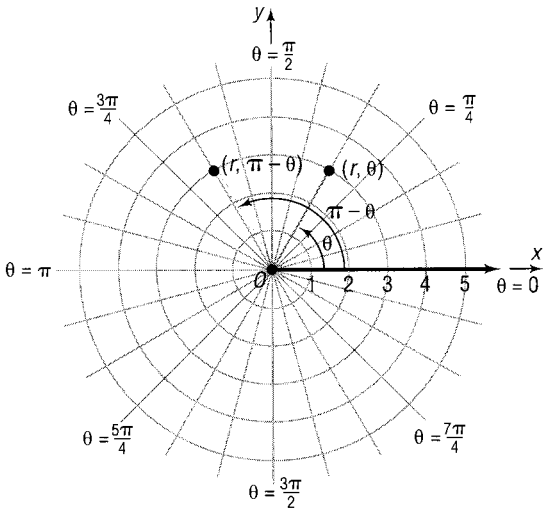
Simetría

En coordenadas polares, los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje polar (y respecto al eje x). *Véase* la figura 50(a). Los puntos (r, θ) y $(r, \pi - \theta)$ son simétricos respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y). *Véase* la figura 50(b). Los puntos (r, θ) y $(-r, \theta)$ son simétricos respecto al polo (origen). *Véase* la figura 50(c).

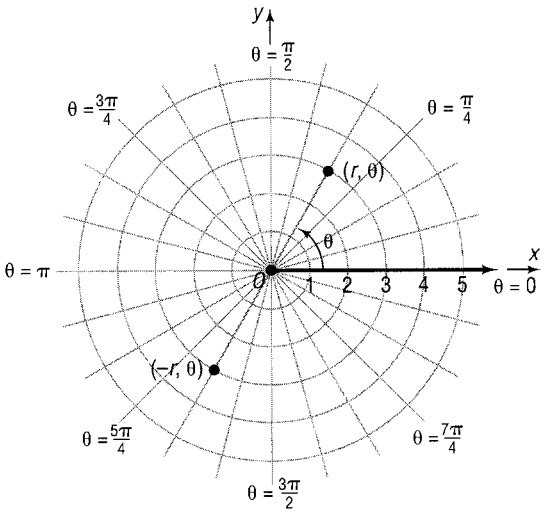
FIGURA 50



(a) Puntos simétricos respecto al eje polar



(b) Puntos simétricos respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$



(c) Puntos simétricos respecto al polo

Los siguientes criterios son consecuencia de estas observaciones.

Simetría respecto al eje polar (eje x)
En una ecuación polar reemplace θ por $-\theta$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

Simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y)
En una ecuación polar reemplace θ por $\pi - \theta$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

Simetría respecto al polo (origen)
En una ecuación polar reemplace r por $-r$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto al polo.

Estos tres criterios son condiciones suficientes para la simetría, pero no son condiciones *necesarias*. Es decir, una ecuación puede no cumplir estos criterios y aún así ser simétrica respecto al eje polar, a la recta $\theta = \pi/2$ o al polo. Por ejemplo, la gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ es simétrica respecto al eje polar, a la recta $\theta = \pi/2$ y al polo, pero los tres criterios mencionados aquí fallan.

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 1 - \operatorname{sen}(-\theta) = 1 + \operatorname{sen}\theta$$

El criterio falla, así que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$\begin{aligned} r = 1 - \operatorname{sen}(\pi - \theta) &= 1 - (\operatorname{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\operatorname{sen}\theta) \\ &= 1 - [0 \cdot \cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta] = 1 - \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Así, la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. Entonces el resultado es $-r = 1 - \operatorname{sen}\theta$, de modo que $r = -1 + \operatorname{sen}\theta$. El criterio falla, de esta manera la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

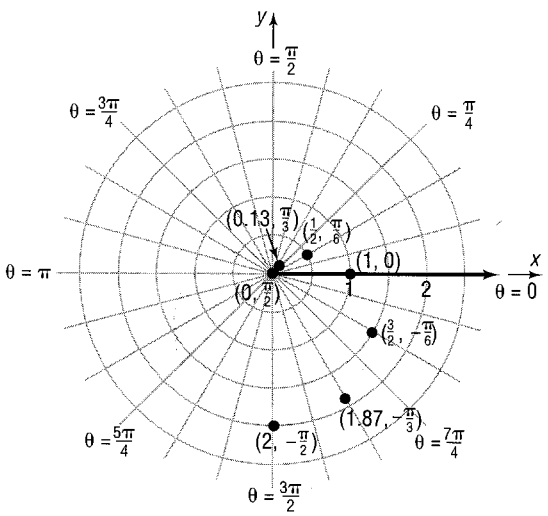
A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica asignando valores al ángulo θ calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$, sólo hay que asignar valores a θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$, como en la tabla 1.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 1 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto $(2, -\pi/2)$ y terminando en $(0, \pi/2)$. Después, reflejamos esta parte de la gráfica respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 51.

TABLA 1

θ	$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
$-\pi/2$	$1 + 1 = 2$
$-\pi/3$	$1 + \sqrt{3}/2 \approx 1.87$
$-\pi/6$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
0	1
$\pi/6$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\pi/3$	$1 - \sqrt{3}/2 \approx 0.13$
$\pi/2$	0

FIGURA 51
$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$



Haga la gráfica de $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ y compare el resultado con la figura 51.

Exploración: Haga la gráfica de $r = 1 + \text{sen } \theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 - \cos \theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 + \cos \theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 51 es un ejemplo de una cardioide (en forma de corazón).

Cardioides

Las **cardioides** se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r = a(1 + \cos \theta) \qquad r = a(1 + \text{sen } \theta)$$
$$r = a(1 - \cos \theta) \qquad r = a(1 - \text{sen } \theta)$$

donde $a > 0$. La gráfica de una cardioide contiene al polo.

Ahora resuelva el problema.

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 3 + 2 \cos \theta$

Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 3 + 2\cos(-\theta) = 3 + 2 \cos \theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$r = 3 + 2\cos(\pi - \theta) = 3 + 2(\cos \pi \cos \theta + \text{sen } \pi \text{ sen } \theta)$$
$$= 3 - 2 \cos \theta$$

El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

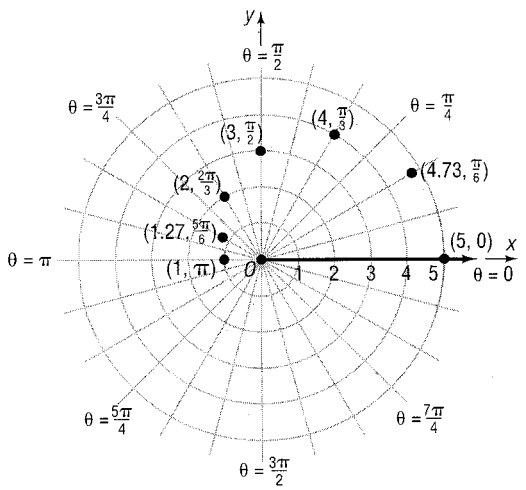
A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica asignando valores al ángulo θ y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto al eje polar, sólo hay que asignar valores a θ de 0 a θ, como en la tabla 2.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 2 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto (5,0) y terminando en $(\pi, 1)$. Después, reflejamos esta parte de la gráfica respecto al eje polar (eje x) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 52.

TABLA 2

θ	$r = 3 + 2 \cos \theta$
0	5
$\pi/6$	$3 + \sqrt{3} \approx 4.73$
$\pi/3$	4
$\pi/2$	3
$2\pi/3$	2
$5\pi/6$	$3 - \sqrt{3} \approx 1.27$
π	1

FIGURA 52
$r = 3 + 2 \cos \theta$



Verificación: Haga la gráfica de $r = 3 + 2\cos\theta$ y compare el resultado con la figura 52.

Exploración: Haga la gráfica de $r = 3 - 2\cos\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 3 - 2\operatorname{sen}\theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 52 es un ejemplo de un caracol *sin lazo interior.*

Caracol sin lazo interior

Los caracoles sin lazo interior se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\operatorname{sen}\theta$$

donde $a > 0$, $b > 0$, y $a > b$. La gráfica de un caracol *sin lazo interior* no contiene al polo.

Ahora resuelva el problema 31.

EJEMPLO 10 *Graficación de una ecuación polar (Caracol con lazo interior)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 1 + 2\cos\theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 1 + 2\cos(-\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$\begin{aligned} r &= 1 + 2\cos(\pi - \theta) = 1 + 2(\cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta) \\ &= 1 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

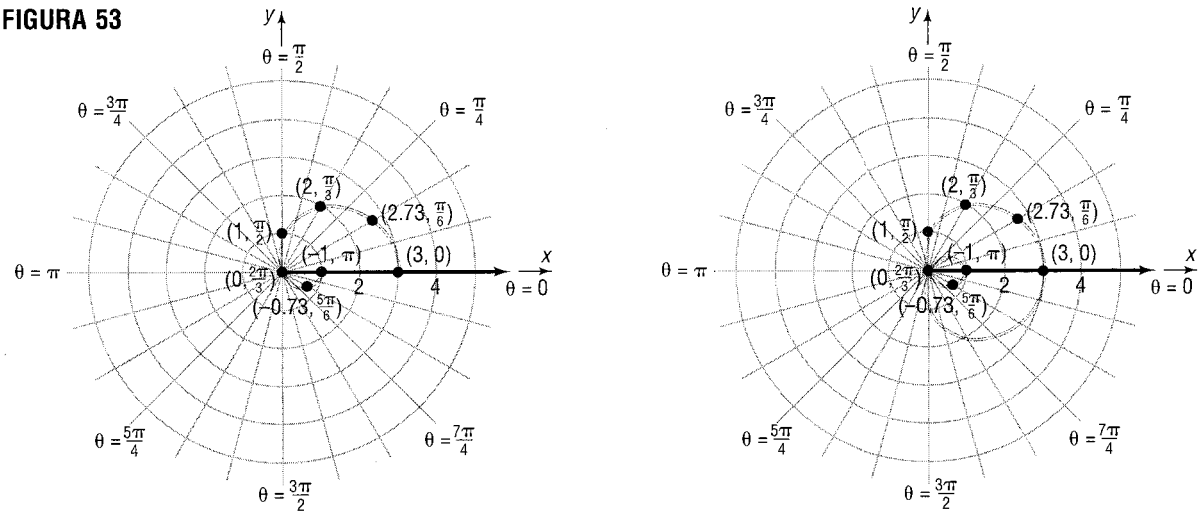
TABLA 3

θ	$r = 1 + 2\cos\theta$
0	3
$\pi/6$	$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
$\pi/3$	2
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	0
$5\pi/6$	$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$
π	-1

A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$, asignando valores al ángulo θ y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto al eje polar, sólo hay que asignar valores a θ de 0 a π, como en la tabla 3.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 3 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto $(3, 0)$ y terminando en $(-1, \pi)$. *Véase* la figura 53(a). Por último, reflejamos esta parte de la gráfica respecto al eje polar (eje x) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 53(b).

FIGURA 53



(a) (b) $r = 1 + 2\cos\theta$

Verificación: Haga la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ y compare el resultado con la figura 53(b). □

Exploración: Haga la gráfica de $r = 1 - 2\cos\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 53(b) es un ejemplo de un caracol con lazo interior.

Caracol de ciclo interior

Los caracoles con lazo interior se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\operatorname{sen}\theta$$

donde $a > 0$, $b > 0$, y $a < b$. La gráfica de un caracol con lazo interior pasa por el polo dos veces.

□ Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 11 *Graficación de una ecuación polar (Rosa)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 2\cos 2\theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Si reemplazamos θ por $-\theta$, el resultado es

$$r = 2\cos 2(-\theta) = 2\cos 2\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Si reemplazamos θ por $\pi - \theta$, obtenemos

$$r = 2\cos 2(\pi - \theta) = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Como la gráfica es simétrica respecto al eje polar y a la recta $\theta = \pi/2$, también debe serlo respecto al polo.

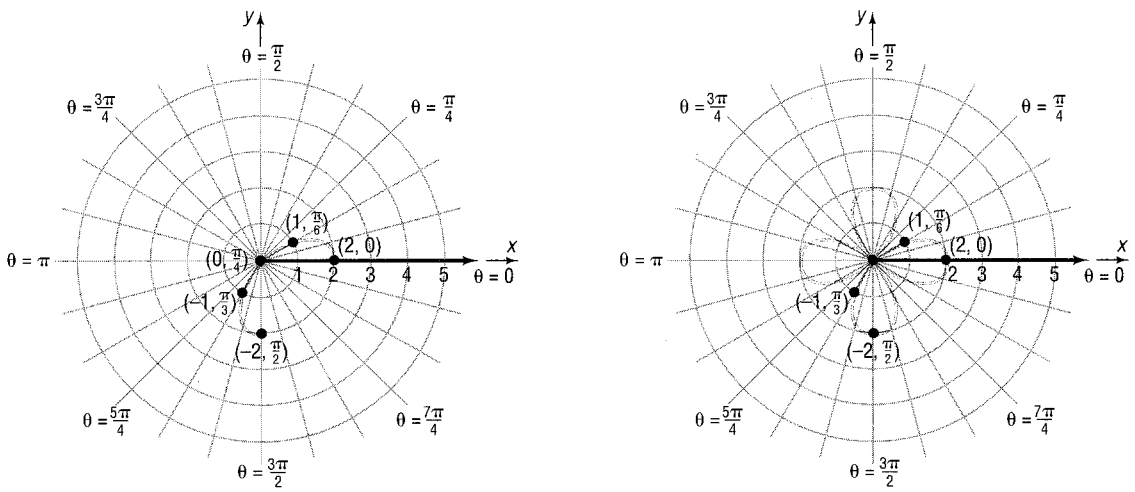
TABLA 4

θ	$r = 2\cos 2\theta$
0	2
$\pi/6$	1
$\pi/4$	0
$\pi/3$	-1
$\pi/2$	-2

A continuación, construimos la tabla 4. Debido a la simetría respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ y el polo, sólo hay que considerar valores de θ de 0 a $\pi/2$.

Trazamos y unimos estos puntos en la figura 54(a). Por último, debido a la simetría, reflejamos esta parte de la gráfica, primero respecto al eje polar (eje x) y luego respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 54(b).

FIGURA 54



(a) (b) $r = 2\cos 2\theta$

Verificación: Haga la gráfica de $r = 2\cos 2\theta$ y compare los resultados con la figura 54(b). Observe que la gráfica comienza de la misma forma que la figura 54(a). ■

La curva de la figura 54(b) es una rosa de cuatro pétalos.

Rosa

Las curvas con forma de **rosa** se caracterizan por tener ecuaciones como

$$r = a\cos n\theta \qquad r = a\,\text{sen}\, n\theta, \qquad a > 0$$

y sus gráficas presentan forma de rosa. Si n es par, la rosa tendrá $2n$ pétalos; si n es impar, la rosa tendrá n pétalos.

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 12 *Graficación de una ecuación polar (Lemniscata)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r^2 = 4\,\text{sen}\, 2\theta$

TABLA 5

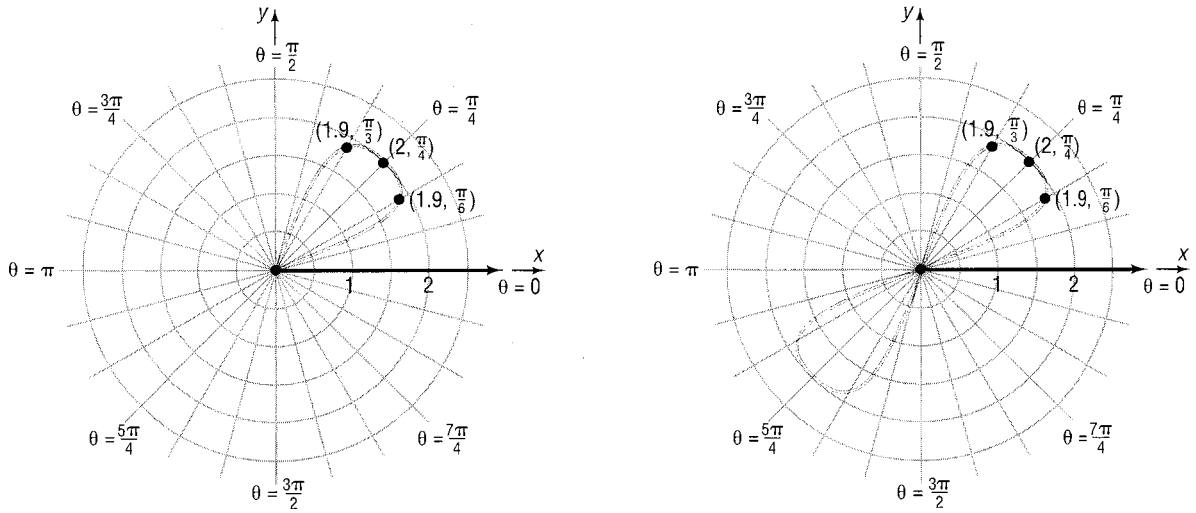
θ	$r^2 = 4\,\text{sen}\, 2\theta$	r
0	0	0
$\pi/6$	$2\sqrt{3}$	± 1.9
$\pi/4$	4	± 2
$\pi/3$	$2\sqrt{3}$	± 1.9
$\pi/2$	0	0

Solución

Dejamos que usted verifique la simetría de la gráfica respecto al polo.

La tabla 5 enumera algunos puntos sobre la gráfica para valores de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$. Observe que no existen puntos sobre la gráfica para $\pi/2 < \theta < \pi$ (segundo cuadrante), pues $\text{sen}\, 2\theta < 0$ para tales valores. Trazamos los puntos de la tabla 5 $r \geq 0$ en la figura 55(a) y obtenemos los demás por simetría. La figura 55(b) muestra la gráfica final

FIGURA 55



(a) (b) $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

Verificación: Haga la gráfica de $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ introduciendo $r = 2\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$. Compare el resultado con la figura 55(b).

La figura 55(b) es un ejemplo de una curva *lemniscata.*

Lemniscata

Las curvas **lemniscatas** se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \qquad r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

donde $a \neq 0$, y presentan gráficas con forma de hélice.

Ahora resuelva el problema 41.

EJEMPLO 13 *Graficación de una ecuación polar (Espiral)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = e^{\theta/5}$

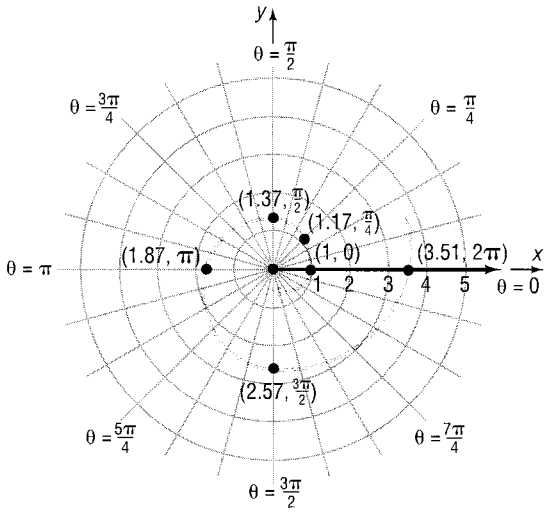
Solución Los criterios de simetría respecto al polo, al eje polar y a la recta $\theta = \pi/2$ fallan. Por otro lado, no existe un número θ tal que $r = 0$. Por lo tanto, la gráfica no pasa por el origen. Observemos que r es positivo para toda θ, que r crece cuando θ crece $r \to 0$ cuando $\theta \to -\infty$, y $r \to \infty$ cuando $\theta \to \infty$. Con ayuda de una calculadora obtenemos los valores de la tabla 6. *Véase* la gráfica en la figura 56.

La curva de la figura 56 es una **espiral logarítmica** pues podemos escribir su ecuación como $\theta = 5 \ln r$; la gráfica gira infinidad de veces en torno al polo pero alejándose de él.

TABLA 6

θ	$r = e^{\theta/5}$
$-3\pi/2$	0.39
$-\pi$	0.53
$-\pi/2$	0.73
$-\pi/4$	0.85
0	1
$\pi/4$	1.17
$\pi/2$	1.37
π	1.87
$3\pi/2$	2.57
2π	3.51

FIGURA 56
$r = e^{\theta/5}$



Clasificación de ecuaciones polares

La tabla 7 muestra las ecuaciones de algunas rectas y círculos en coordenadas polares y sus ecuaciones correspondientes en coordenadas rectangulares. También incluye los nombres y gráficas de algunas de las ecuaciones polares que se encuentran con mayor frecuencia.

Comentario acerca del cálculo

Para los lectores que estén pensando en cursar cálculo, es conveniente hacer un comentario acerca del importante papel de las ecuaciones polares.

En las coordenadas rectangulares, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, cuya gráfica es el círculo unitario, no define una función. De hecho, en el intervalo $[-1, 1]$, define dos funciones,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{Semicírculo superior} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{Semicírculo inferior}$$

En coordenadas polares, la ecuación $r = 1$, cuya gráfica también es el círculo unitario, sí define una función. Es decir, para cada elección de θ, sólo existe un valor correspondiente de r, a saber, $r = 1$. Como en muchas aplicaciones del cálculo hay que utilizar funciones, la posibilidad de expresar ecuaciones que no son funciones en coordenadas rectangulares como funciones en coordenadas polares es muy útil.

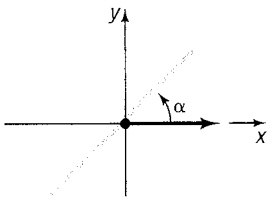
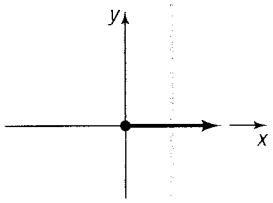
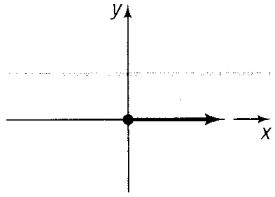
Observe también que el criterio de la recta vertical para funciones sólo es válido para ecuaciones especificadas en coordenadas rectangulares.

DATO HISTÓRICO

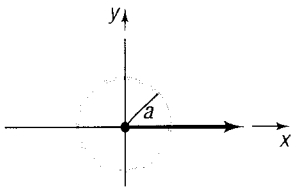
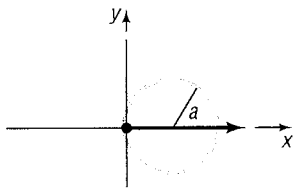
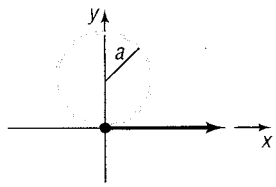
■ Al parecer las coordenadas polares fueron inventadas por Jacob Bernoulli (1654-1705) cerca de 1691, aunque, como en la mayor parte de ideas similares a estas, existen indicios anteriores de este concepto. Los primeros usuarios del cálculo permanecieron fieles a las coordenadas rectangulares, y las coordenadas polares se popularizaron sólo hasta principios del siglo XIX. Incluso entonces, eran utilizadas principalmente por los geómetras para describir ciertas curvas especiales. Por último, hacia la mitad del siglo XIX, los matemáticos aplicados observaron la tremenda simplificación en la descripción de objetos con simetría circular o cilíndrica, hecha posible por las coordenadas polares. A partir de entonces su uso ha sido más amplio. ■

TABLA 7

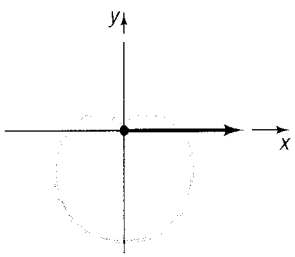
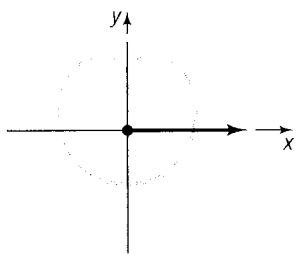
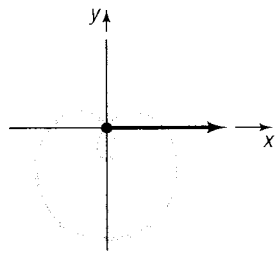
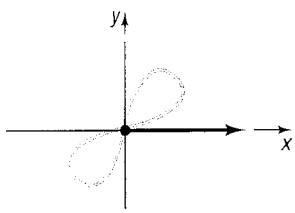
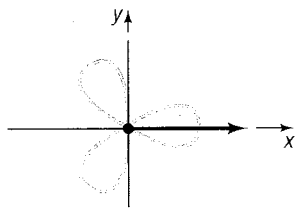
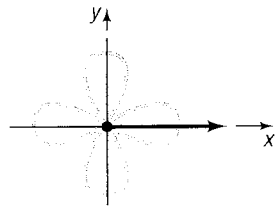
RECTAS

Descripción	Recta que pasa por el polo formando un ángulo α con el eje polar	Recta vertical	Recta horizontal
Ecuación rectangular	$y = (\tan \alpha)x$	$x = a$	$y = b$
Ecuación polar	$\theta = \alpha$	$r \cos \theta = a$	$r \operatorname{sen} \theta = b$
Gráfica típica			

CÍRCULOS

Descripción	Centro en el polo, radio a	Pasa por el polo, tangente a la recta $\theta = \pi/2$, centro en el eje polar, radio a	Pasa por el polo, tangente al eje polar, centro en la recta $\theta = \pi/2$, radio a
Ecuación rectangular	$x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ax,\ a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ay,\ a > 0$
Ecuación polar	$r = a,\ a > 0$	$r = \pm 2a \cos \theta,\ a > 0$	$r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta,\ a > 0$
Gráfica típica			

OTRAS ECUACIONES

Nombre	Cardioide	Caracol sin lazo interior	Caracol con lazo interior
Ecuaciones polares	$r = a \pm a \cos \theta,\ a > 0$ $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta,\ a > 0$	$r = a \pm b \cos \theta,\ 0 < b < a$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta,\ 0 < b < a$	$r = a \pm b \cos \theta,\ 0 < a < b$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta,\ 0 < a < b$
Gráfica típica			
Nombre	Lemniscata	Rosa con tres pétalos	Rosa con cuatro pétalos
Ecuaciones polares	$r^2 = a^2 \cos 2\theta,\ a > 0$ $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta,\ a > 0$	$r = a \operatorname{sen} 3\theta,\ a > 0$ $r = a \cos 3\theta,\ a > 0$	$r = a \operatorname{sen} 2\theta,\ a > 0$ $r = a \cos 2\theta,\ a > 0$
Gráfica típica			

Ejercicio 8.5

En los problemas del 1 al 16 identifique y haga la gráfica de cada ecuación polar.

1. $r = 4$ **2.** $r = 2$ **3.** $\theta = \pi/3$ **4.** $\theta = -\pi/4$

5. $r \operatorname{sen} \theta = 4$ **6.** $r \cos \theta = 4$ **7.** $r \cos \theta = -2$ **8.** $r \operatorname{sen} \theta = -2$

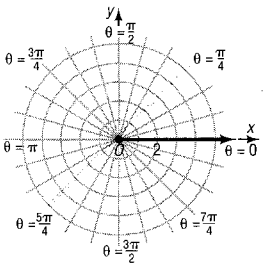
9. $r = 2 \cos \theta$ **10.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **11.** $r = -4 \operatorname{sen} \theta$ **12.** $r = -4 \cos \theta$

13. $r \sec \theta = 4$ **14.** $r \csc \theta = 8$ **15.** $r \csc \theta = -2$ **16.** $r \sec \theta = -4$

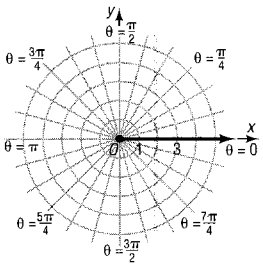
En los problemas del 17 al 24, relacione cada una de las gráficas de la (A) a la (H) con una de las siguientes ecuaciones polares:

17. $r = 2$ **18.** $\theta = \pi/4$ **19.** $r = 2 \cos \theta$ **20.** $r \cos \theta = 2$

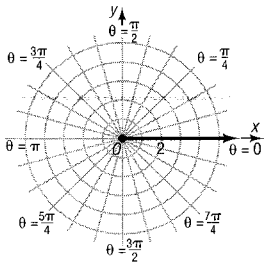
21. $r = 1 + \cos \theta$ **22.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **23.** $\theta = 3\pi/4$ **24.** $r \operatorname{sen} \theta = 2$



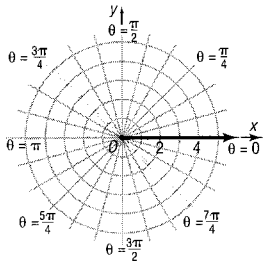
(A)



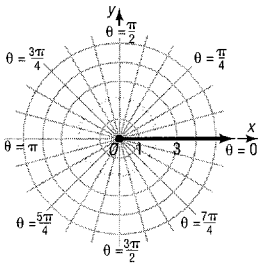
(B)



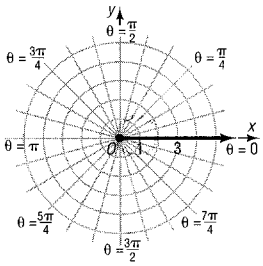
(C)



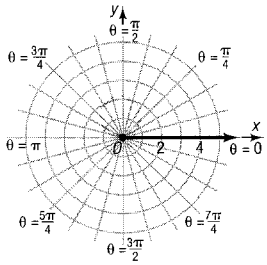
(D)



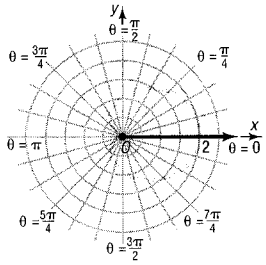
(E)



(F)



(G)



(H)

En los problemas del 25 al 48 identifique y haga la gráfica de cada ecuación polar. Verifique la simetría.

25. $r = 2 + 2 \cos \theta$ **26.** $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ **27.** $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$ **28.** $r = 2 - 2 \cos \theta$

29. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ **30.** $r = 2 - \cos \theta$ **31.** $r = 4 - 2 \cos \theta$ **32.** $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ **34.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ **35.** $r = 2 - 3 \cos \theta$ **36.** $r = 2 + 4 \cos \theta$

37. $r = 3 \cos 2\theta$ **38.** $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ **39.** $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ **40.** $r = 3 \cos 4\theta$

41. $r^2 = 9 \cos 2\theta$ **42.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ **43.** $r = 2^\theta$ **44.** $r = 3^\theta$

45. $r = 1 - \cos \theta$ **46.** $r = 3 + \cos \theta$ **47.** $r = 1 - 3 \cos \theta$ **48.** $r = 4 \cos 3\theta$

En los problemas del 49 al 58 haga la gráfica de cada ecuación polar.

49. $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$ (parábola) **50.** $r = \dfrac{2}{1 - 2 \cos \theta}$ (hipérbola)

51. $r = \dfrac{1}{3 - 2 \cos \theta}$ (elipse) **52.** $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$ (parábola)

53. $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral de Arquímides)

54. $r = \dfrac{3}{\theta}$ (espiral recíproca)

55. $r = \csc \theta - 2, \quad 0 < \theta < \pi$ (concoide)

56. $r = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (cisoide)

57. $r = \tan \theta$ (curva kappa)

58. $r = \cos \dfrac{\theta}{2}$

59. Muestre que la gráfica de la ecuación $r \operatorname{sen} \theta = a$ es una recta horizontal, de a unidades sobre el polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades bajo el polo cuando $a < 0$.

60. Muestre que la gráfica de la ecuación $r \cos \theta = a$ es una recta vertical, que está a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo cuando $a < 0$.

61. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares.

62. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares.

63. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a \cos \theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

64. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a \cos \theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

65. Explique por qué el siguiente criterio de simetría es válido: reemplace r por $-r$ y θ con $-\theta$ en una ecuación polar. Si obtiene una ecuación equivalente, la gráfica será simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y).
(a) Muestre que el criterio de la página 520 falla para $r^2 = \cos \theta$, pero que este nuevo criterio funciona.
(b) Muestre que el criterio de la página 520 funciona para $r^2 = \operatorname{sen} \theta$, pero que este nuevo criterio falla.

66. Desarrolle un nuevo criterio de simetría respecto al polo.
(a) Determine una ecuación polar para la cual falle este nuevo criterio, pero de modo que el de la página 520 funcione.
(b) Determine una ecuación polar para la cual falle el criterio de la página 520, pero de modo que el nuevo criterio funcione.

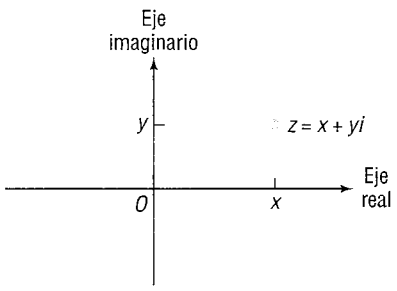
67. Desarrolle dos criterios distintos para verificar la simetría respecto al eje polar. Determine ejemplos en los que uno de los criterios funcione y el otro falle. ¿Cuál criterio prefiere utilizar? Justifique su posición.

El plano complejo; teorema De Moivre

Cuando presentamos los números complejos no estábamos preparados para analizar su interpretación geométrica. Ahora ya estamos listos y aunque podríamos dar varias interpretaciones, la que estudiaremos a continuación es la más fácil de comprender.

Podemos interpretar geométricamente un número complejo $z = x + yi$ como el punto (x, y) del plano xy. Así, a cada punto del plano le corresponde un número complejo y, recíprocamente, a cada número complejo le corresponde un punto en el plano. Para referirnos a la colección de tales puntos hablamos del **plano complejo.** El eje x se conoce como eje real pues cualquier punto sobre él tiene la forma $z = x + 0i = x$, un número real. El eje y es el **eje imaginario** pues cualquier punto sobre él tiene la forma $z = 0 + yi = yi$, un número imaginario puro. *Véase* la figura 57.

FIGURA 57
Plano complejo

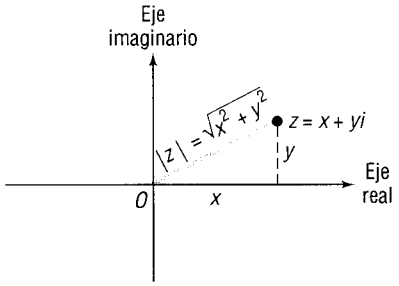


Magnitud

Sea $z = x + yi$ un número complejo. La **magnitud** o **módulo** de z, que se denota $|z|$, se define como la distancia del origen al punto (x, y). Así,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

FIGURA 58



Véase la ilustración en la figura 58.

Esta definición de $|z|$ es consistente con la de valor absoluto de un número real: Si $z = x + yi$ es real, entonces $z = x + 0i$ y

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Recuerde (sección 1.5) que si $z = x + yi$, entonces su **conjugado**, que se denota , z, es $\bar{z} = x - yi$. Como $z\bar{z} = x^2 + y^2$, la ecuación (1) implica que podemos escribir la magnitud de z como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \tag{2}$$

Forma polar de un número complejo

Al escribir un número complejo como $z = x + yi$, decimos que está en **forma rectangular,** o **cartesiana,** pues (x, y) son las coordenadas rectangulares del punto correspondiente en el plano complejo. Supongamos que (r, θ) son las coordenadas polares de este punto. Entonces

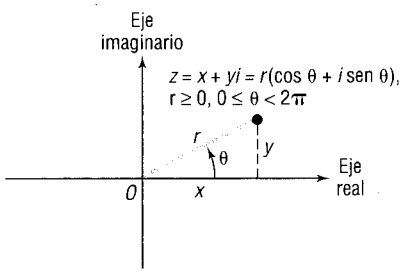
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

Si $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, el número complejo $z = x + yi$ se puede escribir en **forma polar** como

Forma polar de z

$$z = x + yi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \tag{4}$$

FIGURA 59



Véase figura 59.

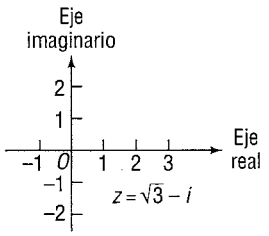
Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es la forma polar de un número complejo, el ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, es el **argumento de z.** Además, como $r \geq 0$, la ecuación (3) implica que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Así, la ecuación (1) implica a su vez que la magnitud de $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es

$$|z| = r$$

Trazar el punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ en el plano complejo, y escribir una expresión para z en forma polar.

Solución El punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ tiene las coordenadas rectangulares $(\sqrt{3}, -1)$. El punto, localizado en el cuarto cuadrante, aparece en la figura 60. Como $x = \sqrt{3}$ y $y = -1$, esto implica que

FIGURA 60



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

Así, $\theta = 11\pi/6$ y $r = 2$, de modo que la forma polar de $z = \sqrt{3} - i$ es

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

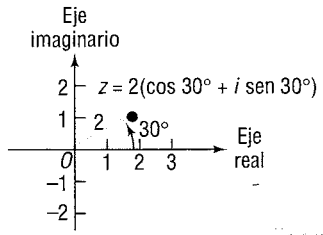
Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Localización de un punto en el plano complejo y conversión de forma polar a forma rectangular*

Localizar el punto correspondiente a $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ en el plano complejo, y escribir una expresión para z en forma rectangular.

Solución Para localizar el número complejo $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, trazamos el punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta) = (2, 30°)$, como nos muestra la figura 61. En forma rectangular,

FIGURA 61



$$z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

Ahora resuelva el problema 13.

La forma polar de un número complejo proporciona una alternativa para determinar productos y cocientes de números complejos.

Teorema Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ dos números complejos. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{5}$$

Si $z_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \tag{6}$$

Demostración Demostraremos la fórmula (5). La demostración de la fórmula (6) se deja como ejercicio *(véase* el problema 56).

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Como la magnitud de un número complejo z es r y su argumento es θ, cuando $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, podemos enunciar el teorema como sigue:

Teorema La magnitud del producto (cociente) de dos números complejos es igual al producto (cociente) de sus magnitudes; el argumento del producto (cociente) de dos números complejos es igual a la suma (resta) de sus argumentos.

Veamos un ejemplo del uso de este teorema.

EJEMPLO 5 Determinación de productos y cocientes de números complejos en forma polar

Si $z = 3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $w = 5(\cos 100° + \operatorname{sen} 100°)$, determinar lo siguiente (dejar las respuestas en forma polar):

(a) zw (b) z/w

Solución (a)
$$\begin{aligned} zw &= [3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)][5(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)] \\ &= (3 \cdot 5)[\cos(20° + 100°) + i \operatorname{sen}(20° + 100°)] \\ &= 15(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)}{5(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)} \\ &= \tfrac{3}{5}[\cos(20° - 100°) + i \operatorname{sen}(20° - 100°)] \\ &= \tfrac{3}{5}[\cos(-80°) + i \operatorname{sen}(-80°)] \\ &= \tfrac{3}{5}(\cos 280° + i \operatorname{sen} 280°) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 23.

Teorema de De Moivre

El teorema de De Moivre, enunciado por Abraham De Moivre (1667-1754) en 1730, aunque ya era conocido por muchas personas hacia 1710, es importante por la siguiente razón: Los procesos fundamentales del álgebra son las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división, junto con las potencias y la extracción de raíces. El teorema de De Moivre permite aplicar estas dos últimas operaciones a los números complejos.

En su forma básica, el teorema es una fórmula para elevar un número complejo z a la potencia n, donde $n \geq 1$ es un entero positivo. Veamos si podemos intuir la forma del resultado.

Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un número complejo. Entonces, con base en la ecuación (5), tenemos

$$\begin{aligned} n = 2: \quad z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \\ n = 3: \quad z^3 &= z^2 \cdot z \\ &= [r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \\ n = 4: \quad z^4 &= z^3 \cdot z \\ &= [r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta) \end{aligned}$$

Ahora queda claro el patrón.

Teorema de De Moivre

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{7}$$

donde $n \geq 1$ es un entero positivo.

No demostraremos el teorema de De Moivre pues requiere inducción matemática (la que analizaremos hasta la sección 11.4).

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4 *Uso del teorema de De Moivre*

$$\begin{aligned}[2(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)]^3 &= 2^3[\cos(3 \cdot 20^\circ) + i \operatorname{sen}(3 \cdot 20^\circ)] \\ &= 8(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \\ &= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 31.

EJEMPLO 5 *Uso del teorema de De Moivre*

Escribir $(1 + i)^5$ en forma canónica $a + bi$.

Solución Para aplicar el teorema de De Moivre, primero debemos escribir el número complejo en forma polar. Así, como la magnitud de $1 + i$ es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, escribimos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 \\ &= (\sqrt{2})^5\left[\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right] = -4 - 4i\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 *Uso de una calculadora con el teorema de De Moivre*

Escribir $(3 + 4i)^3$ en forma canónica $a + bi$.

Solución De nuevo, primero escribimos $3 + 4i$ en forma polar. Esta vez utilizaremos grados para el argumento. La magnitud de $3 + 4i$ es $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, de modo que escribimos

$$3 + 4i = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) \approx 5(\cos 53.1^\circ + i \operatorname{sen} 53.1^\circ)$$

Aunque hemos escrito el ángulo redondeado a una cifra decimal (53.1°), conservamos el valor real del ángulo en la memoria de la calculadora. Ahora,

$$\begin{aligned}(3 + 4i)^3 &\approx [5(\cos 53.1° + i \operatorname{sen} 53.1°)]^3 \\ &= 5^3[\cos(3 \cdot 53.1°) + i \operatorname{sen}(3 \cdot 53.1°)] \\ &= 125(\cos 159.3° + i \operatorname{sen} 159.3°) \\ &\approx 125[-0.935 + i(0.353)] = -117 + 44i\end{aligned}$$

En este cálculo utilizamos los valores reales guardados en la memoria, no los valores redondeados que mostramos. La respuesta final, $-117 + 44i$, es exacta, como usted podrá verificar al elevar al cubo $3 + 4i$. □

Raíces complejas

Sean w un número complejo dado y $n \geq 2$ un entero positivo. Cualquier número complejo z que satisfaga la ecuación

$$z^n = w$$

será **una raíz enésima compleja** de w. De acuerdo con nuestro uso anterior, si $n = 2$, las soluciones de la ecuación $z^2 = w$ son las **raíces cuadradas complejas** de w, y si $n = 3$, las soluciones de la ecuación $z^3 = w$ son las **raíces cúbicas complejas** de w.

Teorema determinación de raíces complejas

Sea $w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ un número complejo. Si $w \neq 0$, existen n raíces enésimas complejas distintas de w dadas por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \tag{8}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Demostración (bosquejo)

No demostraremos el resultado en su totalidad. Sólo veremos que cada z_k de la ecuación (8) cumple la ecuación $z_k^n = w$ y, por lo tanto, cada z_k es una raíz enésima compleja de w.

$$\begin{aligned}z_k^n &= \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\}^n \\ &= (\sqrt[n]{r})^n\left[\cos n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{Teorema de De Moivre.} \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) \\ &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = w\end{aligned}$$

Así, cada z_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, es una raíz enésima compleja de w. Para terminar, habría que mostrar que cada z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, es, de hecho, distinta de las demás, y que no existen raíces enésimas complejas de w distintas de las dadas por la ecuación (8). □

EJEMPLO 7 *Determinación de raíces cúbicas complejas*

Determinar las raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}\, i$. Deje las respuestas en forma polar, con θ en grados.

Solución Primero expresamos $-1 + \sqrt{3}\,i$ en forma polar con grados:

$$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$$

Las tres raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ son

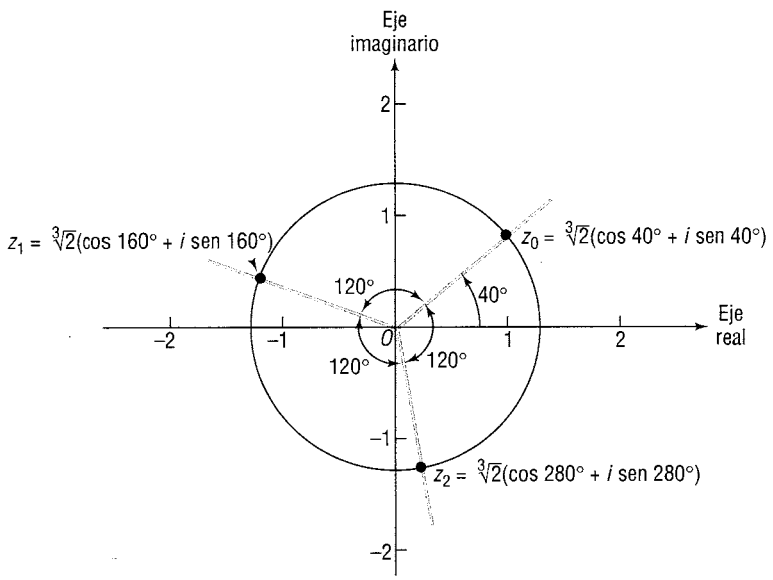
$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2$$

Así,

$$z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$$
$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 280° + i \operatorname{sen} 280°)$$

Observe que cada una de las tres raíces cúbicas complejas de $1 + \sqrt{3}\,i$ tiene la misma magnitud que las demás, $\sqrt[3]{2}$. Esto significa que los puntos correspondientes a cada raíz cúbica están a la misma distancia del origen; por lo tanto, los tres puntos están en un círculo con centro en el origen y radio $\sqrt[3]{2}$. Además, los argumentos de estas raíces cúbicas son 40°, 160° y 280°, de modo que la diferencia entre las parejas consecutivas es 120°. Esto significa que los tres puntos son equidistantes sobre el círculo, como nos muestra la figura 62. Estos resultados no son una coincidencia. De hecho, en los problemas 53, 54 y 55 se le pedirá demostrar que estos resultados son válidos para las raíces enésimas complejas.

FIGURA 62



Ahora resuelva el problema 43.

Dato histórico ■ Babilonios, griegos y árabes consideraron a las raíces cuadradas de cantidades negativas como imposibles y a las ecuaciones con soluciones complejas como irresolubles. El primer indicio de que existía alguna conexión entre las soluciones reales de las ecuaciones y los números complejos, surgió cuando Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557) determinaron raíces reales de ecuaciones cúbicas considerando raíces cúbicas de cantidades complejas. A partir de entonces y durante varios siglos, los matemáticos trabajaron con números complejos sin confiar mucho en su existencia real. Al parecer fue John Wallis el primero en sugerir (en 1673) la representación

gráfica de los números complejos, una idea realmente significativa que no fue aprovechada sino hasta 1800. Varias personas, entre ellas Karl Friedrich Gauss (1777-1855), redescubrieron la idea y así la representación gráfica ayudó a establecer los números complejos como miembros legítimos de la familia de los números. En las aplicaciones prácticas, los números complejos encontraron uso amplio en el área de la corriente eléctrica alterna, donde son una herramienta de uso común, y la física subatómica. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. En el problema 83, ejercicio 3.5, vimos que $x = 2$ era una solución de la ecuación cúbica $x^3 - 6x + 4 = 0$. Recuerde que no podíamos aplicar el método de Cardano y Tartaglia pues nos conducía a la raíz cúbica de un número complejo. Utilice el teorema de De Moivre para determinar la raíz cúbica y concluir el problema.

2. La fórmula cuadrática funciona perfectamente si los coeficientes son números complejos. Resuelva lo siguiente, con ayuda del teorema de De Moivre en caso necesario. [*Nota:* Las respuestas son "simples."]
(a) $z^2 - (2 + 5i)z - 3 + 5i = 0$ (b) $z^2 - (1 + i)z - 2 - i = 0$ ■

Ejercicio 8.6

En los problemas del 1 al 12, haga la gráfica de cada número complejo en el plano complejo y escríbalo en forma polar. Exprese el argumento en grados.

1. $1 + i$ **2.** $-1 + i$ **3.** $\sqrt{3} - i$ **4.** $1 - \sqrt{3}\,i$
5. $-3i$ **6.** -2 **7.** $4 - 4i$ **8.** $9\sqrt{3} + 9i$
9. $3 - 4i$ **10.** $2 + \sqrt{3}\,i$ **11.** $-2 + 3i$ **12.** $\sqrt{5} - i$

En los problemas del 13 al 22 escriba cada número complejo en forma rectangular.

13. $2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ **14.** $3(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ **15.** $4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

16. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$ **17.** $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$ **18.** $4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

19. $0.2(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$ **20.** $0.4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$ **21.** $2\left(\cos \frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{18}\right)$

22. $3\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)$

En los problemas del 23 al 30 determine zw y z/w. Deje la respuesta en forma polar

23. $z = 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$
$w = 4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

24. $z = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$
$w = \cos 100° + i \operatorname{sen} 100°$

25. $z = 3(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)$
$w = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

26. $z = 2(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$
$w = 6(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$

27. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}\right)$
$w = 2\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)$

28. $z = 4\left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}\right)$
$w = 2\left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{16}\right)$

29. $z = 2 + 2i$
$w = \sqrt{3} - i$

30. $z = 1 - i$
$w = 1 - \sqrt{3}\,i$

En los problemas del 31 al 42 escriba cada expresión en la forma canónica a + bi.

31. $[4(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)]^3$ **32.** $[3(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]^3$ **33.** $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)\right]^5$

34. $\left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{16}\right)\right]^4$ **35.** $[\sqrt{3}(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)]^6$ **36.** $[\frac{1}{2}(\cos 72° + i \operatorname{sen} 72°)]^5$

37. $\left[\sqrt{5}\left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{16}\right)\right]^4$ **38.** $\left[\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{18}\right)\right]^6$ **39.** $(1 - i)^5$

40. $(\sqrt{3} - i)^6$ **41.** $(\sqrt{2} - i)^6$ **42.** $(1 - \sqrt{5}\,i)^8$

En los problemas del 43 al 50 determine todas las raíces complejas. Deje su respuesta en forma polar, con θ en grados.

43. Las raíces cúbicas complejas de $1 + i$

44. Las raíces cuartas complejas de $\sqrt{3} - i$.

45. Las raíces cuartas complejas de $4 - 4\sqrt{3}\,i$

46. Las raíces cúbicas complejas de $-8 - 8i$.

47. Las raíces cuartas complejas de $-16i$

48. Las raíces cúbicas complejas de -8.

49. Las raíces quintas complejas de i

50. Las raíces quintas complejas de $-i$.

51. Determine las cuatro raíces complejas de la unidad (del número 1). Haga la gráfica de cada una.

52. Determine las seis raíces complejas de la unidad (del número 1). Haga la gráfica de cada una.

53. Muestre que cada raíz enésima compleja de un número complejo w distinto de cero tiene la misma magnitud que las demás.

54. Utilice el resultado del problema 53 para concluir que cada raíz enésima compleja está en un círculo con centro en el origen. ¿Cuál es el radio de ese círculo?

55. Consulte el problema 54. Muestre que las raíces enésimas complejas de un número complejo w distinto de cero son equidistantes en el círculo mencionado.

56. Demuestre la fórmula (6).

Repaso del capítulo

Conceptos fundamentales

Fórmulas

Ley de los senos
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Ley de los cosenos
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Área de un triángulo
$$A = \tfrac{1}{2}bh$$
$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$$
$$A = \tfrac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha$$
$$A = \tfrac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$$
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ donde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

Relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las coordenadas rectangulares (x, y)
$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2,\ \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

Forma polar de un número complejo
Si $z = x + iy$, entonces $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$,
donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $0 \leq \theta < 2\pi$

Teorema De Moivre
Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$, donde $n \geq 1$ es un entero positivo

Raíz enésima de un número
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, \ldots, n-1$$

Cómo hacer para

Utilizar la ley de los senos al resolver un triángulo LAA, ALA, o LLL.

Determinar el área de un triángulo.

Hacer gráficas de coordenadas polares.

Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Hacer gráficas de ecuaciones polares (*véase* la tabla 7).

Escribir un número complejo en forma polar, $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $0° \leq \theta < 360°$

Utilizar el teorema de De Moivre para determinar potencias de números complejos.

Utilizar el teorema de las raíces complejas para encontrar raíces complejas

Complete en los espacios

1. Si se conocen los dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se utiliza la ley de los _____ para determinar si la información dada no produce triángulo alguno, un triángulo o dos triángulos.
2. Si se proporcionan los tres lados de un triángulo, se utiliza la ley de los _____ para resolverlo.
3. Si se proporcionan los tres lados de un triángulo, se utiliza la fórmula de, _____ para determinar su área.
4. En coordenadas polares, el origen se llama _____, y el eje x positivo se conoce como _____ _____.
5. Otra representación en coordenadas polares para el punto $(2, \pi/3)$ es (_____, $4\pi/3$).
6. Al utilizar coordenadas polares (r, θ), el círculo $x^2 + y^2 = 2x$ adquiere la forma _____.
7. En una ecuación polar se reemplaza θ con $-\theta$. Si se obtiene una ecuación equivalente, se dice que la gráfica es simétrica respecto al _____ _____.
8. Al escribir un número complejo z en la forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, el número no negativo r es el _____ o _____ de z, y el ángulo θ, $0 \le \theta < 2\pi$, is es el _____ de z.

Cierto o falso

C F **1.** Un triángulo oblicuo donde se conocen dos lados y un ángulo siempre produce al menos un triángulo.

C F **2.** Dados tres lados de un triángulo, existe una fórmula para determinar su área.

C F **3.** Las coordenadas polares de un punto son únicas.

C F **4.** Las coordenadas rectangulares de un punto son únicas.

C F **5.** Los criterios de simetría en coordenadas polares son concluyentes.

C F **6.** El teorema de De Moivre es útil para elevar un número complejo a una potencia entera positiva.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 20 determine los demás ángulos y lados de cada triángulo, si éste existe. Si no existe triángulo, indíquelo.

1. $\alpha = 50°$, $\beta = 30°$, $a = 1$
2. $\alpha = 10°$, $\gamma = 40°$, $c = 2$
3. $\alpha = 100°$, $a = 5$, $c = 2$
4. $a = 2$, $c = 5$, $\alpha = 60°$
5. $a = 3$, $c = 1$, $\gamma = 110°$
6. $a = 3$, $c = 1$, $\gamma = 20°$
7. $a = 3$, $c = 1$, $\beta = 100°$
8. $a = 3$, $b = 5$, $\beta = 80°$
9. $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$
10. $a = 10$, $b = 7$, $c = 8$
11. $a = 1$, $b = 3$, $\gamma = 40°$
12. $a = 4$, $b = 1$, $\gamma = 100°$
13. $a = 5$, $b = 3$, $\alpha = 80°$
14. $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 20°$
15. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{4}{3}$
16. $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$
17. $a = 3$, $\alpha = 10°$, $b = 4$
18. $a = 4$, $\alpha = 20°$, $\beta = 100°$
19. $c = 5$, $b = 4$, $\alpha = 70°$
20. $a = 1$, $b = 2$, $\gamma = 60°$

En los problemas del 21 al 30 determine el área de cada triángulo.

21. $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 40°$
22. $b = 5$, $c = 4$, $\alpha = 20°$
23. $b = 4$, $c = 10$, $\alpha = 70°$
24. $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 100°$
25. $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$
26. $a = 10$, $b = 7$, $c = 8$
27. $a = 4$, $b = 2$, $c = 5$
28. $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$
29. $\alpha = 50°$, $\beta = 30°$, $a = 1$
30. $\alpha = 10°$, $\gamma = 40°$, $c = 3$

En los problemas del 31 al 36, trace los puntos dados en coordenadas polares y determine sus coordenadas rectangulares.

31. $(3, \pi/6)$
32. $(4, 2\pi/3)$
33. $(-2, 4\pi/3)$
34. $(-1, 5\pi/4)$
35. $(-3, -\pi/2)$
36. $(-4, -\pi/4)$

En los problemas del 37 al 42 se proporcionan las coordenadas rectangulares de un punto. Determine dos pares de coordenadas polares (r, θ) para cada punto, una con $r > 0$ y la otra con $r < 0$. Exprese θ en radianes.

37. $(-3, 3)$ **38.** $(1, -1)$ **39.** $(0, -2)$

40. $(2, 0)$ **41.** $(3, 4)$ **42.** $(-5, 12)$

En los problemas del 43 al 48 las letras x y y representan coordenadas rectangulares. Escriba cada ecuación con coordenadas polares (r, θ).

43. $3x^2 + 3y^2 = 6y$ **44.** $2x^2 - 2y^2 = 5y$ **45.** $2x^2 - y^2 = \dfrac{y}{x}$

46. $x^2 + 2y^2 = \dfrac{y}{x}$ **47.** $x(x^2 + y^2) = 4$ **48.** $y(x^2 - y^2) = 3$

En los problemas del 49 al 54 escriba cada ecuación polar como una ecuación en coordenadas rectangulares (x, y).

49. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **50.** $3r = \operatorname{sen} \theta$ **51.** $r = 5$

52. $\theta = \pi/4$ **53.** $r \cos \theta + 3r \operatorname{sen} \theta = 6$ **54.** $r^2 \tan \theta = 1$

En los problemas del 55 al 60 haga la gráfica de cada ecuación. Asegúrese de verificar la simetría.

55. $r = 4 \cos \theta$ **56.** $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ **57.** $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$

58. $r = 2 + \cos \theta$ **59.** $r = 4 - \cos \theta$ **60.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

En los problemas del 61 al 64 escriba cada número complejo en forma polar. Exprese cada argumento en grados.

61. $-1 - i$ **62.** $-\sqrt{3} + i$ **63.** $4 - 3i$ **64.** $3 - 2i$

En los problemas del 65 al 70 escriba cada número complejo en la forma $a + bi$.

65. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ **66.** $3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ **67.** $3\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$

68. $4\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **69.** $0.1(\cos 350° + i \operatorname{sen} 350°)$ **70.** $0.5(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$

En los problemas del 71 al 76 determine zw y z/w. Deje sus respuestas en forma polar.

71. $z = \cos 80° + i \operatorname{sen} 80°$
$w = \cos 50° + i \operatorname{sen} 50°$

72. $z = \cos 205° + i \operatorname{sen} 205°$
$w = \cos 85° + i \operatorname{sen} 85°$

73. $z = 3\left(\cos \dfrac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{5}\right)$
$w = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}\right)$

74. $z = 2\left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}\right)$
$w = \cos 340° + i \operatorname{sen} 340°$

75. $z = 5(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$
$w = 3\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)$

76. $z = 4(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$
$w = \cos 355° + i \operatorname{sen} 355°$

En los problemas del 77 al 84 escriba cada expresión en la forma canónica $a + bi$.

77. $[3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$ **78.** $[2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)]^3$ **79.** $\left[\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{8}\right)\right]^4$

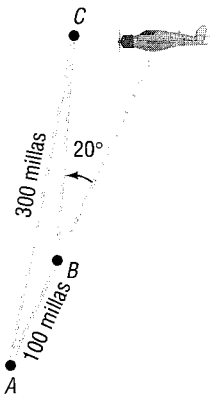
80. $\left[2\left(\cos \dfrac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{16}\right)\right]^4$ **81.** $(1 - \sqrt{3}\, i)^6$ **82.** $(2 - 2i)^8$

83. $(3 + 4i)^4$ **84.** $(1 - 2i)^4$

85. Determine todas las raíces cúbicas complejas de 27.

86. Determine todas las raíces cuartas complejas de -16.

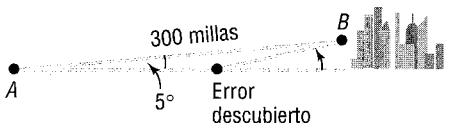
87. *Navegación aérea.* Mientras un avión viaja de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 100 millas, gira en ángulo de 20° y se dirige hacia la ciudad C, como indica la figura. Si la distancia de A a C es de 300 millas, ¿a qué distancia está la ciudad B de la ciudad C?



88. *Corrección de un error de navegación.* Dos ciudades, A y B, se encuentran a 300 millas de distancia entre sí. Al volar de la ciudad A a la ciudad B, un piloto lleva un curso con 5° de error.

(a) Si el error se descubre después de volar 10 minutos a una velocidad constante de 420 millas por hora, ¿con qué ángulo debe girar el piloto para corregir el curso? (Consulte la figura.)

(b) ¿Qué nueva velocidad constante debe mantenerse de modo que no se pierda tiempo por el error? (Suponga que la velocidad hubiera sido constante e igual a 420 millas por hora de no haber equivocado el curso.)

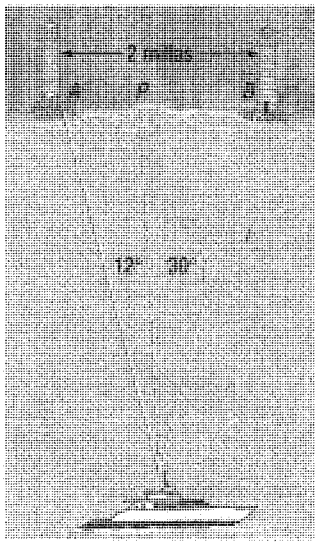


89. *Determinación de distancias en el mar.* El timonel de un barco en el mar observa dos faros que sabe están separados por una distancia de 2 millas a lo largo de una costa recta. Él determina que los ángulos formados entre dos líneas de visión desde los faros y la línea del barco que va directamente hacia la costa son 12° y 30°. *Véase* la ilustración.

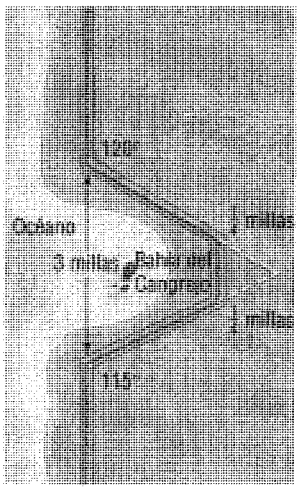
(a) ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro A?

(b) ¿A qué distancia del faro B?

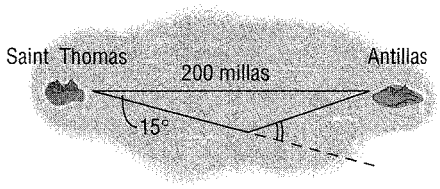
(c) ¿A qué distancia de la costa?



90. *Construcción de una carretera.* Se construye una carretera cuyas direcciones principales son norte-sur a lo largo de la costa de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye el trayecto recto de la carretera. Como el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra el trayecto decidido y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de carretera necesaria para rodear la bahía?



91. Un yate sale de Saint Thomas hacia una isla de las Antillas, a 200 millas de distancia. Con velocidad constante de 18 millas por hora, navega entre fuertes corrientes y vientos cruzados, la tripulación ve que después de 4 horas el bote está fuera de curso por 15°.

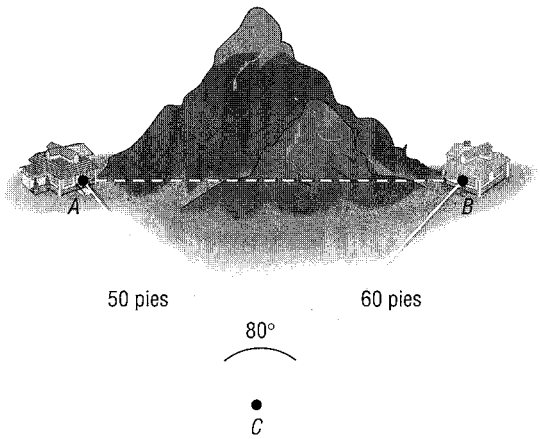


(a) ¿A qué distancia está el bote de la isla en ese momento?

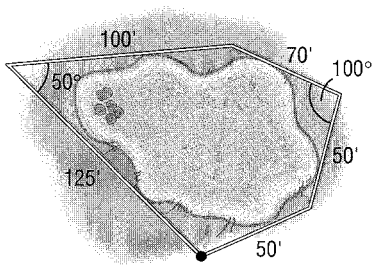
(b) ¿Qué ángulo debe girar para corregir su curso?

(c) ¿Cuánto tiempo se agrega al viaje debido a la desviación? (Suponga que la velocidad permanece constante e igual a 18 millas por hora.)

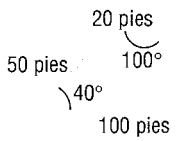
92. Dos casas están localizadas en lados opuestos de una pequeña colina. Véase la ilustración. Para medir la distancia entre ellas, un topógrafo camina 50 pies desde la casa A hasta el punto C, utiliza un tránsito para medir el ángulo ACB, que resulta ser de 80°, y después camina hacia la casa B, una distancia de 60 pies. ¿Cuál es la distancia entre las casas?



93. Para calcular aproximadamente el área de un lago, un topógrafo camina alrededor de su perímetro y toma las medidas que aparecen en la ilustración. Con esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago? [*Sugerencia:* utilice la ley de los cosenos con los tres triángulos que aparecen en la figura y después determine la suma de sus áreas.]



94. El terreno irregular de la figura se vende a $100.00 el pie cuadrado. ¿Cuál es el costo del terreno?



TEMA 5

Definiciones y construcciones

CAPÍTULO 1

1.1 Punto, recta, plano y espacio 226

1.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos 228

1.3 Algunas figuras geométricas básicas 232

1.4 Segmentos y ángulos; congruencia y medición 236

1.5 Bisectrices del segmento y del ángulo 240

1.6 Rectas y planos perpendiculares 244

1.7 Polígonos 248

Conceptos importantes 252

Resumen 253

Examen 254

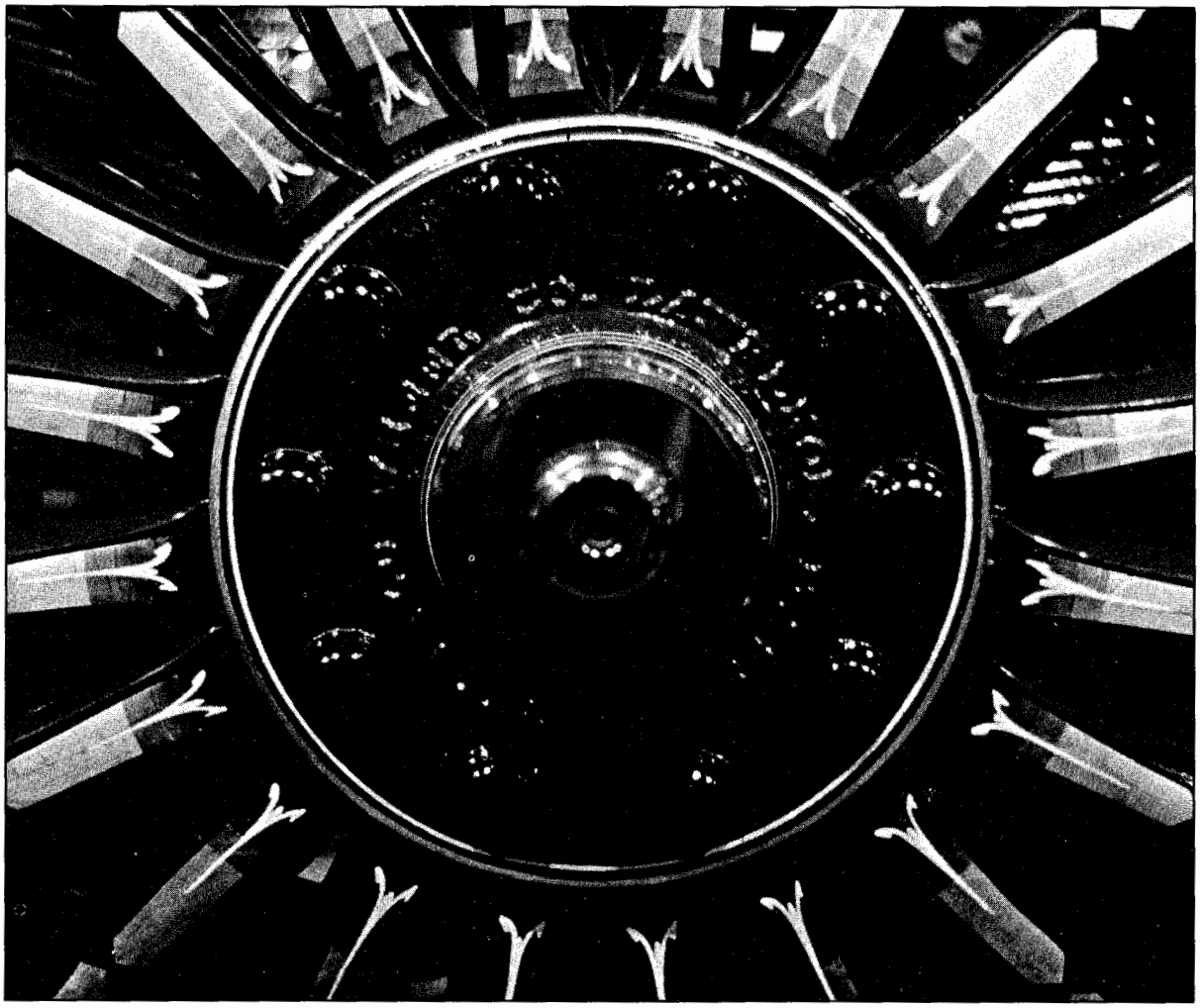
Técnicas para la solución de problemas

Dibujo de un diagrama 255

La geometría en nuestro mundo

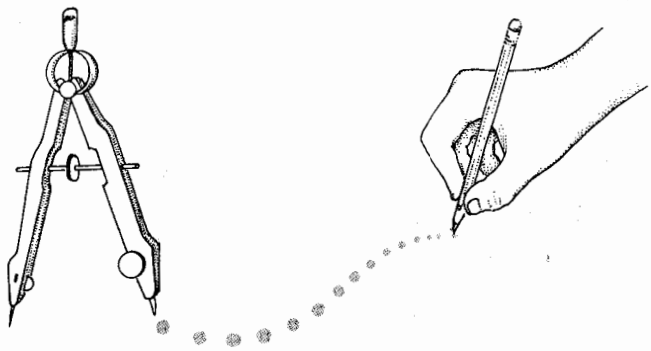
Diseño interior: Teselados 256

Definiciones y construcciones



1.1 Punto, recta, plano y espacio

¿Cómo podrían describirse un punto, una recta, un plano y el espacio? Estos cuatro conceptos son muy importantes en el estudio de la geometría. Aquí no se definirán el punto, la recta ni el plano, sino que se observarán objetos que los sugieren.

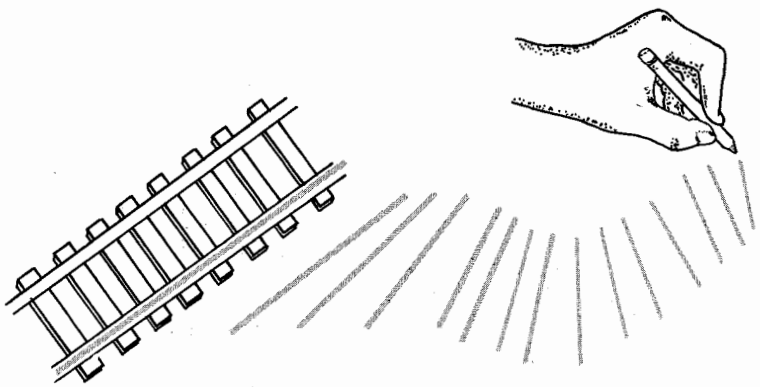


Un punto como parte de un objeto físico

Un punto como la marca más pequeña que se puede dibujar

PUNTO
ubicación, sin longitud, anchura ni altura

Un punto es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido.

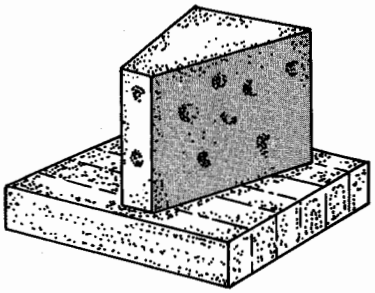


Una recta como parte de una situación física

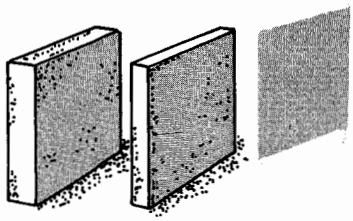
Una recta como la línea más delgada que se puede dibujar

RECTA
longitud ilimitada, derecha, sin grosor ni extremos

Una recta es una idea o abstracción. Como no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido.



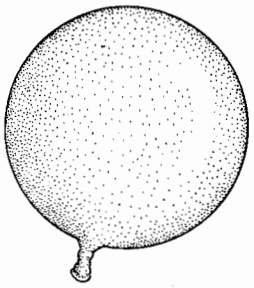
Un plano como parte de un objeto físico



Un plano como el corte más delgado posible

PLANO
ilimitado, continuo en todas direcciones, llano, sin grosor
•

Una plano es una idea o abstracción. Debido a que no puede definirse con términos más sencillos,



Hay puntos sobre, dentro y fuera del globo

El espacio como lo que queda al destruir el globo

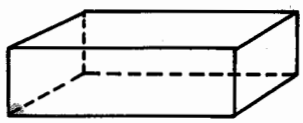
ESPACIO
ilimitado, sin longitud, anchura ni altura

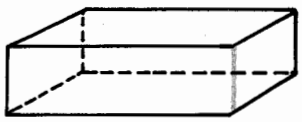
El espacio es una idea o abstracción.

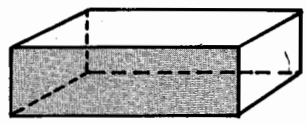
Definición 1.1
El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.

EJERCICIOS

1. Indíquese si la porción en color de cada figura sugiere un punto, una recta, un plano o el espacio.

a. 

b. 

c. 

2. Menciónense cinco objetos cuya forma sugiera un punto en alguna de sus partes. Identifíquese la parte específica de cada objeto.
3. Menciónense tres objetos o situaciones físicas que ilustren la idea de recta o de una parte de ella.
4. Menciónense cinco objetos cuyas formas sugieran un plano en alguna de sus partes.
5. Menciónense tres objetos, como el globo, que sugieran la idea de espacio.

1.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos

Para representar puntos, se dibujan pequeñas marcas en un papel. Las letras mayúsculas al lado de cada punto son sus nombres; así, se llaman *punto A*, *punto B* y *punto C*.

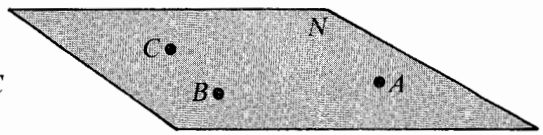
Una recta puede considerarse como un conjunto de puntos. Al dar nombre a un par de ellos, se puede llamar a la recta en función de esos dos puntos. Por ejemplo, los puntos A y B están en la recta, por lo que se llama *recta AB*; se supone que por los puntos A y B sólo pasa una recta. Otra manera de decir esto es: *dos puntos determinan una recta.* En ocasiones, se nombra una recta con una letra minúscula. En este caso, la recta AB también podría llamarse *recta* ℓ.

Se escribe: $\overleftrightarrow{AB}$

recta AB
o
recta ℓ

Un plano también puede concebirse como un conjunto de puntos. Se designa con una sola letra o dando nombre a tres de sus puntos que no estén en una recta. Así, se le llama *plano N* o *plano ABC.*

Los puntos A, B y C están en el plano N.

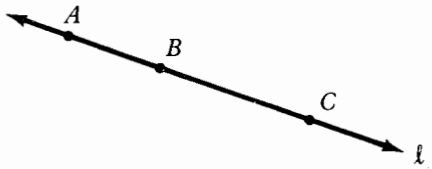


Se supone que sólo un plano contiene estos tres puntos. Se dice entonces que tres puntos que no están en una misma recta determinan al plano.

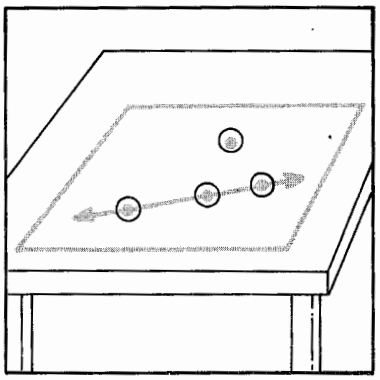
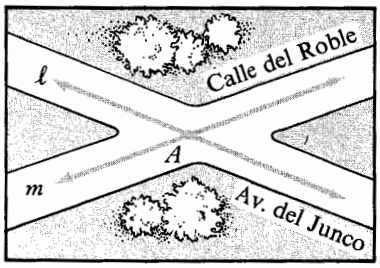
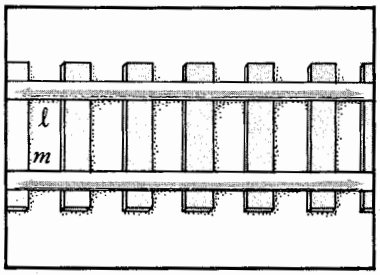
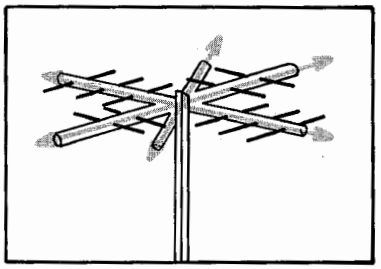
Al considerar la recta ℓ como un conjunto de puntos, puede decirse que el punto A *está en* la recta ℓ, y que el punto A *es un elemento* de la recta ℓ para describir la misma situación. También puede decirse que *la recta* ℓ *contiene al punto A.*

Si A, B y C son puntos de la recta ℓ, como se muestra en la figura siguiente, se dice que el punto B está *entre* los puntos A y C. Si A, B y C no están en la misma recta, no se usa la palabra *entre* para describir su relación.

El punto B está entre los puntos A y C.

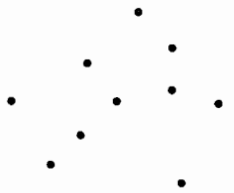


Algunas de las relaciones básicas de los puntos y las rectas en un plano se describen a continuación con modelos, símbolos y definiciones.

Modelo físico, figura	***Descripción, símbolo***	***Definición***
	A, B y C son *colineales*. A, D y C son *no colineales*. A, B, C y D están en el mismo plano; son puntos *coplanares*. Los puntos que, como conjunto, no están en el mismo plano, son *no coplanares*.	**Definición 1.2** Los **puntos colineales** son puntos que están en la misma recta. **Definición 1.3** Los **puntos coplanares** son puntos que se encuentran en un mismo plano.
	Las rectas ℓ y m se *intersecan* en el punto A.	**Definición 1.4** Las **rectas intersecantes** son dos rectas con un punto en común.
	Las rectas ℓ y m no tienen un punto en común. ℓ es *paralela* a m. Se escribe: $\ell \parallel m$	**Definición 1.5** Las **rectas paralelas** son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan.
	Las rectas p, q y r tienen exactamente un punto en común. Son *rectas concurrentes*.	**Definición 1.6** Las **rectas concurrentes** son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.

EJERCICIOS

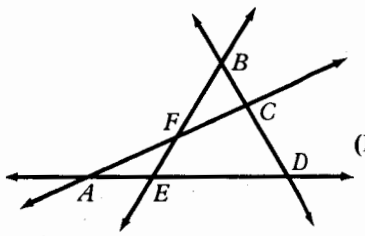
A.



(Ejercicio 2)

1. Dibújense tres puntos que sean colineales.
2. Trácese el grupo de puntos que se muestra a continuación y, con una regla, dibújese una recta a través de grupos de tres o más puntos colineales.

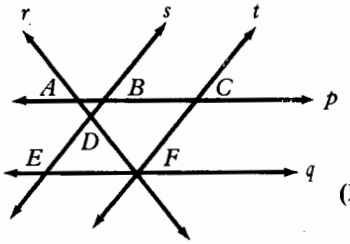
Los ejercicios 3, 4 y 5 se refieren a la figura de la derecha.



(Ejercicios 3-5)

3. Nómbrense conjuntos de tres puntos colineales.
4. Nómbrense conjuntos de tres puntos no colineales.
5. Nómbrense cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.

Los ejercicios 6, 7 y 8 se refieren a la figura de la derecha. (Si las rectas parecen paralelas, puede suponerse que lo son.)



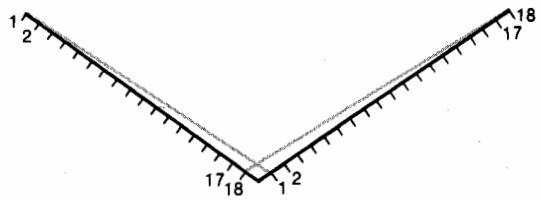
(Ejercicios 6-8)

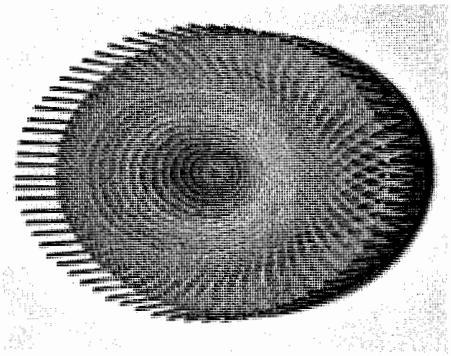
6. Enumérense tres pares de rectas intersecantes.
7. Enumérense tres rectas concurrentes.
8. Enumérense todos los pares de rectas paralelas.
9. Dibújense cuatro rectas concurrentes.

ACTIVIDADES

Los diseños conocidos como *hiloramas* son creaciones interesantes elaboradas en su totalidad con líneas rectas de hilo o cuerda. Estos diseños pueden ser simples o muy complicados.

Para tener una idea de cómo se hacen los *hiloramas*, se trazará un ángulo y se marcará como se muestra a continuación. Con un bolígrafo de punta fina o un lápiz, se unen los puntos que tienen el mismo número.

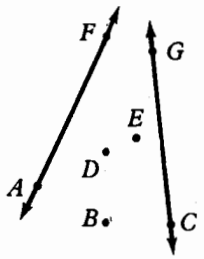




B.

10. Es importante observar que tres puntos pueden ser colineales aunque las rectas no estén marcadas. Menciónense grupos de tres puntos colineales de la figura siguiente.

11. Aunque no se haya dibujado, hay una recta que pasa por cada par de puntos. Cítense dos de estas rectas en la figura.

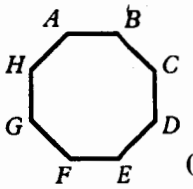


(Ejercicios 10-11)

12. Enumérense tres rectas que serían paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ si estuvieran dibujadas.

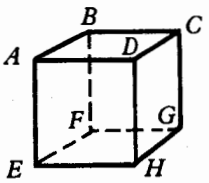
13. Menciónense tres rectas que serían paralelas a $\overleftrightarrow{EF}$ si estuvieran dibujadas.

14. Enumérense cuatro rectas que unan los puntos marcados con letras y sean concurrentes en el centro de la figura.



(Ejercicios 12-14)

15. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de este cubo son coplanares. ¿Cuántos conjuntos de cuatro puntos coplanares hay en el cubo?

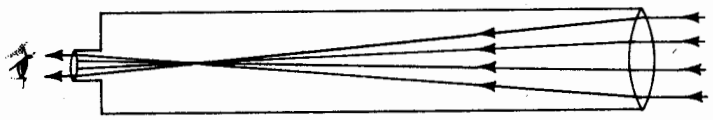


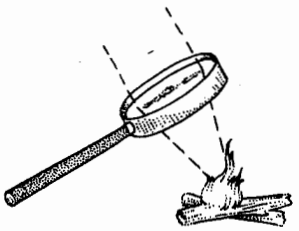
16. Con frecuencia se usan rectas para describir (o representar) la realidad física; entre las rectas paralelas, las concurrentes y los puntos colineales, ¿cuáles se emplearían para describir cada uno de los casos siguientes?

a. Iniciar un fuego con una lupa.

b. La luz procedente de una linterna.

c. El uso de un telescopio de refracción.





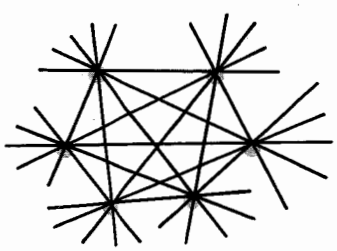
17. ¿Es posible dibujar cuatro rectas que se intersequen en un punto? ¿Es posible dibujar cuatro rectas que se intersequen en dos, tres, cuatro, cinco, seis o más puntos? Hágase un dibujo que ilustre cada caso.

SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántas rectas pueden determinar seis puntos, si hay una recta que pasa por cada par de puntos?

seis puntos colineales, una recta

Experiméntese y compruébese si seis puntos pueden colocarse de tal manera que determinen seis rectas. Colóquense seis puntos para determinar siete, ocho, nueve... catorce rectas.

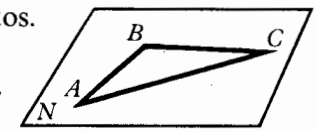


seis puntos, entre los que no hay tres que sean colineales; quince rectas

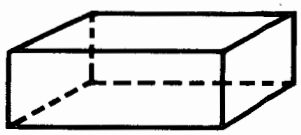
1.3 Algunas figuras geométricas básicas

Ya que las rectas, los planos y los espacios se consideran *conjuntos de puntos*, resulta útil definir las figuras geométricas como conjuntos y puntos. Una *figura plana* es una figura con todos los puntos en un plano, pero no todos en una recta. Una *figura espacial* no tiene todos sus puntos en un solo plano.

Revisemos primero algunas ideas básicas sobre conjuntos.



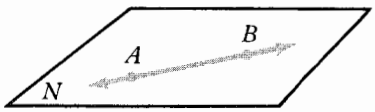
Un triángulo es una figura plana.



Una caja es una figura espacial

Subconjunto. Si todo elemento de un primer conjunto se encuentra también en un segundo conjunto, el primero es un *subconjunto* del segundo.

Ejemplo



La recta AB es un *subconjunto* del plano N.

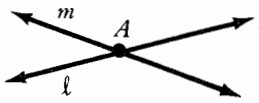
Unión. La *unión* de dos o más conjuntos es un conjunto que contiene todos los elementos de estos conjuntos.

Ejemplo

La *unión* de las rectas ℓ y m contiene todos los puntos de las dos rectas.

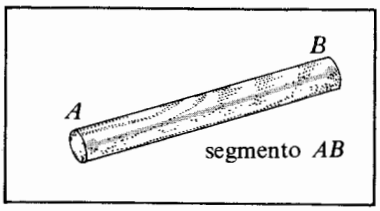
Intersección. La *intersección* de dos conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos comunes a ambos conjuntos.

Ejemplo



La *intersección* de las rectas ℓ y m es el punto A.

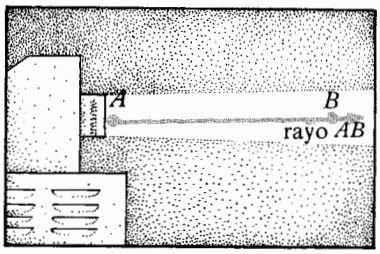
A continuación se describen algunas figuras geométricas básicas con modelos, símbolos y definiciones.



A y B son los extremos.
Se escribe: $\overline{AB}$

Definición 1.7

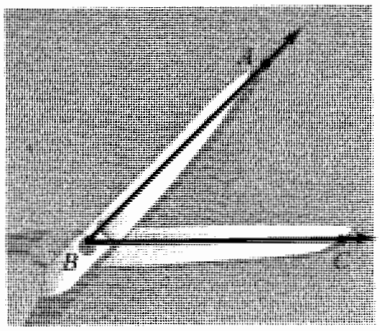
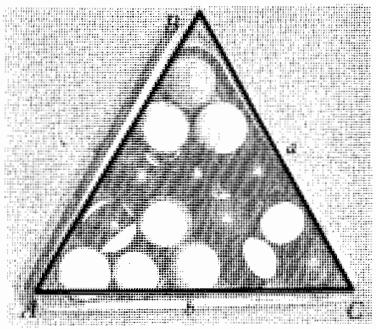
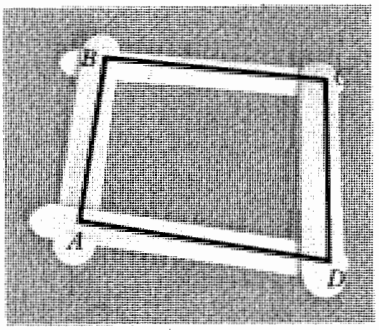
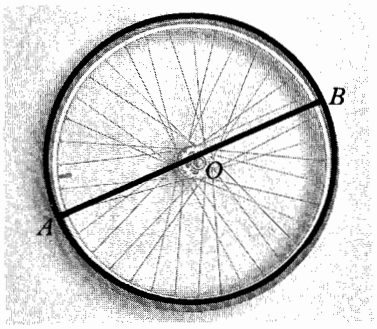
Un **segmento**, $\overline{AB}$, es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B.



A es el extremo.
Se escribe: $\overrightarrow{AB}$

Definición 1.8

Un **rayo**, $\overrightarrow{AB}$, es un subconjunto de una recta que contiene un punto A dado y todos los puntos que están en el mismo lado de A, como B.

Modelo físico, figura	Descripción, símbolo	Definición
	B es el *vértice*. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son los lados. El interior de $\angle ABC$ es la intersección de los puntos del lado A de $\overleftrightarrow{BC}$ con los del lado C de $\overleftrightarrow{AB}$.	**Definición 1.9** Un **ángulo** es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo.
	A, B y C son vértices. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son lados. Se escribe: $\triangle ABC$	**Definición 1.10** Un **triángulo** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.
	A, B, C y D son *vértices*. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ son *lados*. Se escribe: cuadrilátero $ABCD$	**Definición 1.11** Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, entre los cuales no hay tres que sean colineales. Los segmentos se intersecan sólo en sus extremos.
	Los puntos A y B están en el círculo. El punto O es el centro del círculo. $\overline{AB}$ es un *diámetro* del círculo. $\overline{OB}$ es un *radio* del círculo. Se dice: círculo O Se escribe: $\odot O$	**Definición 1.12** Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado del plano.

EJERCICIOS

A.

Dibújese seis veces la recta que se muestra abajo. En cada dibujo resáltese una de las siguientes figuras:

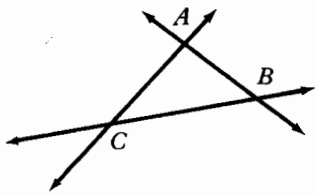
1. $\overline{BC}$. **2.** $\overrightarrow{BD}$. **3.** $\overrightarrow{CA}$. **4.** $\overline{AD}$. **5.** $\overleftrightarrow{BC}$. **6.** $\overleftrightarrow{DB}$.

(Ejercicios 1-6)

Dibújese y dése el nombre de la figura apropiada en cada uno de los ejercicios 7 a 12.

7. $\angle ABC$. **8.** $\angle XYZ$. **9.** $\triangle DEF$. **10.** $\angle A$. **11.** $\overrightarrow{BA}$. **12.** $\overline{CD}$.

En los ejercicios 13 a 15, elíjanse dos símbolos que se refieran al mismo ángulo.



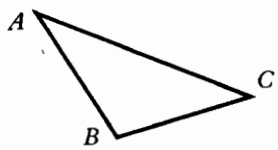
(Ejercicios 13-15)

13. $\angle ABC$, $\angle CAB$, $\angle CBA$.

14. $\angle CAB$, $\angle BAC$, $\angle CBA$.

15. $\angle ACB$, $\angle CAB$, $\angle BCA$.

16. $\triangle ABC$ y $\triangle BAC$ son dos nombres para el triángulo que se muestra a la derecha. A este mismo triángulo se le pueden dar otros cuatro nombres, ¿cuáles son?



(Ejercicio 16)

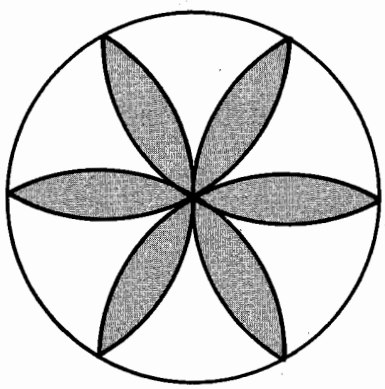
17. Dibújese un círculo con un compás. Márquese su centro, un radio y un diámetro. Por último, escríbase el nombre del círculo.

18. Elíjanse cuatro puntos, A, B, C y D, en el círculo y dibújese el cuadrilátero $ABCD$.

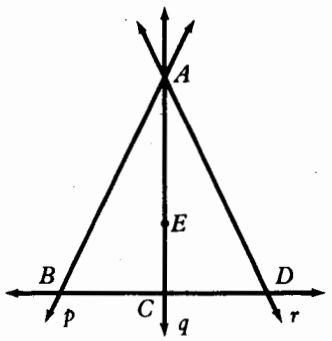
ACTIVIDADES

Para elaborar este diseño, dibújese un círculo. Después, con el compás abierto a la longitud del radio y colocado a intervalos iguales a lo largo del círculo, trácense los arcos.

Complétese un diseño como éste. Luego, elabórense y coloréense otros diseños usando círculos y segmentos por el procedimiento descrito antes. Pueden hacerse concursos de diseños con regla y compás.



B.



(Ejercicios 19-25)

19. Nómbrense con símbolos las cuatro rectas trazadas en esta figura. Nómbrese una recta que no se haya trazado.

20. Nómbrense ocho segmentos trazados. Nómbrense ahora varios que no lo estén.

En los ejercicios 21 a 24, elíjanse los dos símbolos que hacen referencia al mismo conjunto de la figura.

21. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, p.

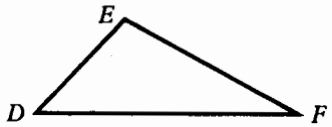
22. $\overleftrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$, q.

23. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$.

24. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overline{DB}$.

25. Nómbrense seis ángulos distintos de la figura.

26. Trácense y recórtense dos triángulos como $\triangle DEF$. Colóquense estos triángulos juntos para formar tantos cuadriláteros como sea posible.



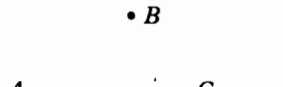
(Ejercicio 26)

27. ¿Es $\overline{CD}$ el mismo segmento que $\overline{DC}$? ¿Por qué?

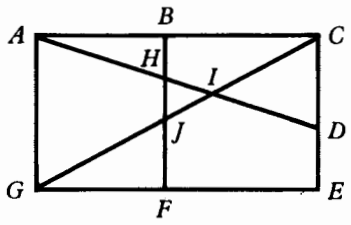
28. ¿Es $\overrightarrow{CD}$ el mismo rayo que $\overrightarrow{DC}$? ¿Por qué?

C.

29. Márquense tres puntos como los que se muestran a la derecha. Con ellos, trácense $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. ¿Consiste la figura resultante en tres rectas o en tres segmentos? ¿Es un triángulo? ¿Por qué?



30. Cítense por lo menos ocho triángulos en esta figura.



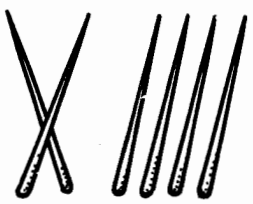
31. Dibújese esta figura y trácese un segmento que añada exactamente otros tres triángulos.

32. Cítense por lo menos ocho cuadriláteros en esta figura.

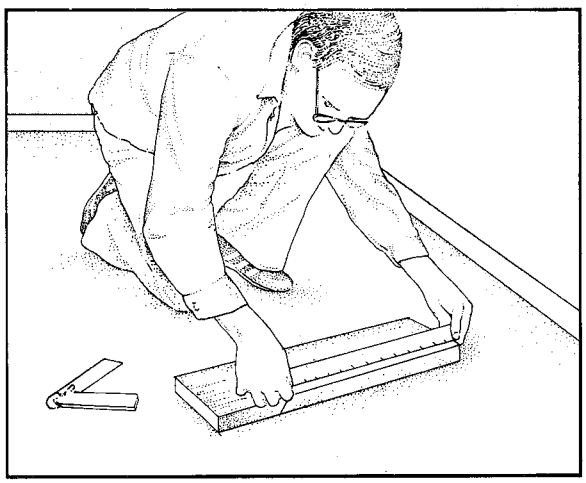
SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cómo podrían unirse seis palillos de manera que se formen cuatro triángulos?

(*Sugerencia:* con independencia del tamaño de los palillos, se necesitará bastante espacio.)



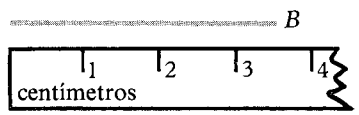
1.4 Segmentos y ángulos; congruencia y medición



El hombre que aparece en el dibujo cortará una tabla para que mida 0.5 m de largo y tenga un borde con ángulo de 45°. Primero, tiene que medir.

Los detalles sobre las propiedades básicas de la medición de ángulos y segmentos se presentarán en la sección 2.8.

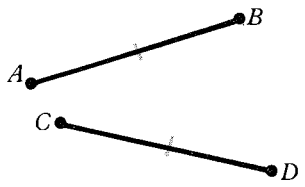
La *medición de la longitud* asigna un número real a cada segmento.



La *longitud* de $\overline{AB}$ es 3.5 cm.

Se escribe: $AB = 3.5$.

Hay una manera especial para describir dos segmentos de la misma longitud.



Se dice: $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$.

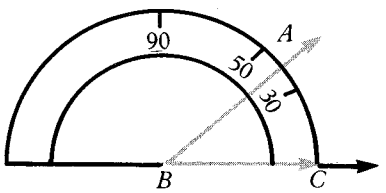
Se escribe: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Algunas veces se marcan los segmentos para mostrar que son congruentes.

Definición 1.13

Dos **segmentos** son **congruentes** si tienen la misma longitud.

La *medición de ángulos* asigna a cada ángulo un número real entre 0 y 180.

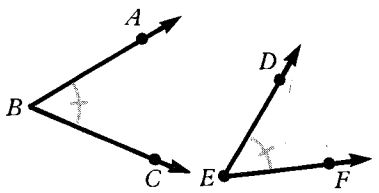


La *medida en grados* de $\angle ABC$ es 40.

Se escribe: $m\angle ABC = 40$

Algunas veces se escribe que $\angle ABC$ mide 40°.

Hay una manera especial de describir dos ángulos de la misma medida.



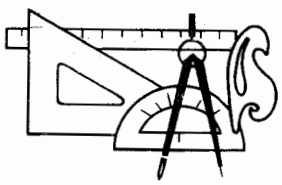
Se dice: $\angle ABC$ es congruente con $\angle DEF$.

Se escribe: $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Definición 1.14

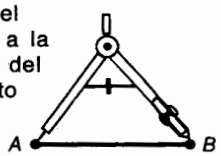
Dos **ángulos** son **congruentes** si tienen la misma medida.

Los diseñadores emplean gran variedad de instrumentos y técnicas de dibujo para elaborar planos exactos de proyectos de construcción. En geometría, se debe conocer el uso de dos instrumentos —la regla sin graduar y el compás— para hacer tipos especiales de dibujos llamados *construcciones*. Las dos construcciones que se describen a continuación utilizan el concepto de congruencia definido antes.



Construcción 1. Constrúyase un segmento congruente con un segmento dado. (Cópiese un segmento.)

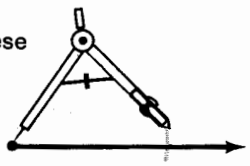
1. Abrase el compás a la longitud del segmento dado.



Segmento dado

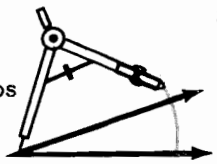
2. Trácese un rayo que tenga mayor longitud que el segmento dado.

3. Con el mismo compás, cópiese un segmento sobre el rayo.



Construcción 2. Constrúyase un ángulo congruente con un ángulo dado. (Cópiese un ángulo.)

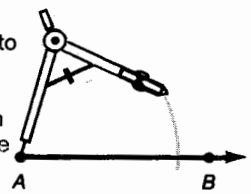
1. Trácese un arco que interseque ambos rayos del ángulo dado.



Angulo dado

2. Trácese un rayo que sirva como un lado del ángulo copia.

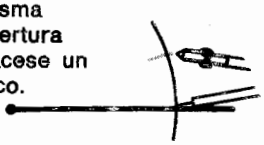
3. Con el mismo compás, abierto como en el primer paso (1), trácese un arco que cruce el rayo.



4. Abrase el compás a la medida de la abertura del ángulo dado.

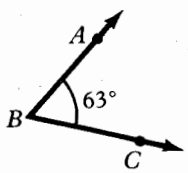
Angulo dado

5. Con el compás a esa misma abertura trácese un arco.

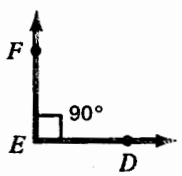


6. Trácese el segundo lado para completar la copia del ángulo dado.

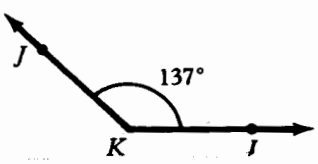
Los tres tipos de ángulos existentes se definen a continuación. Empléese la construcción 2 para trazar tres ángulos congruentes con cada uno de los siguientes:



Definición 1.15
Un **ángulo agudo** es un ángulo que mide menos de 90°.



Definición 1.16
Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°.

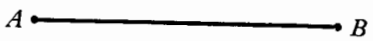


Definición 1.17
Un **ángulo obtuso** es un ángulo que mide más de 90°.

EJERCICIOS

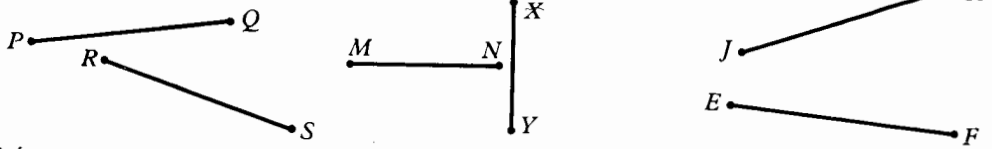
A.

1. Con una regla graduada en centímetros, encuéntrese la longitud de este segmento. $AB = \underline{?}$



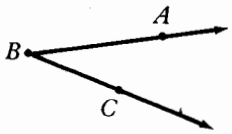
2. Trácense segmentos de las longitudes siguientes:
$CD = 8$ cm $\quad EF = 5.6$ cm $\quad GH = 7.5$ cm
Con la regla sin graduar y el compás, constrúyanse tres segmentos congruentes con cada uno de los dibujados.

3. Escríbase una proposición con $\cong$ o con $\ncong$ («no es congruente con») para cada uno de los tres pares de segmentos siguientes.



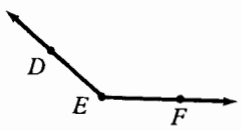
Trácense estos ángulos en un papel. Con un transportador, encuéntrense sus medidas. Si es necesario, pueden prolongarse los lados de cada ángulo.

4.



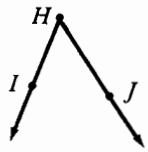
$m\angle ABC = \underline{?}$

5.



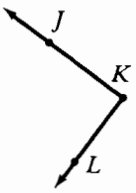
$m\angle DEF = \underline{?}$

6.



$m\angle IHJ = \underline{?}$

7.



$m\angle JKL = \underline{?}$

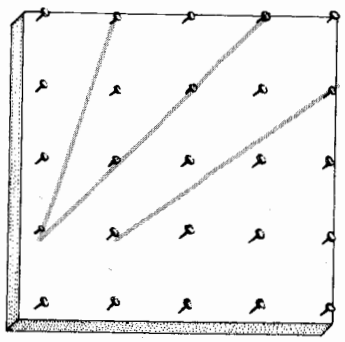
8. Clasifíquense los ángulos de los ejercicios 4 a 7 en agudos, rectos y obtusos.

9. Con una regla sin graduar y un compás, constrúyanse ángulos congruentes con cada uno de los que aparecen en los ejercicios 4 a 7.

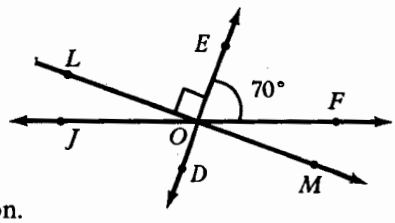
ACTIVIDADES

Se necesita una matriz de puntos de 5 × 5. Dos puntos son extremos de un segmento. Dos segmentos con un extremo común determinan un ángulo.

a. ¿Cuántas longitudes diferentes de segmentos pueden trazarse en una matriz de 5 × 5?
b. ¿Cuántas medidas diferentes de ángulos pueden trazarse en una matriz de 5 × 5?



B.

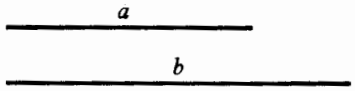


10. Nómbrense cuatro ángulos rectos en esta figura.

11. Nómbrense cuatro ángulos agudos.

12. Nómbrense cuatro ángulos obtusos.

Los segmentos con longitudes a y b se muestran a continuación.

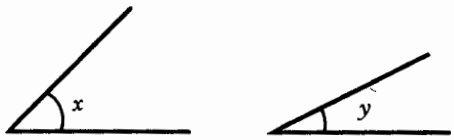


13. Constrúyase un segmento con longitud $2a$.

14. Constrúyase un segmento con longitud $a + b$.

15. Constrúyase un segmento con longitud $b - a$.

Se muestran los ángulos con medidas x e y.



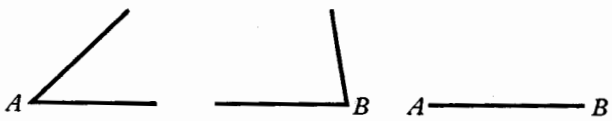
16. Constrúyase un ángulo que mida $x + y$.

17. Constrúyase un ángulo que mida $x - y$.

18. Constrúyase un ángulo que mida $3y$.

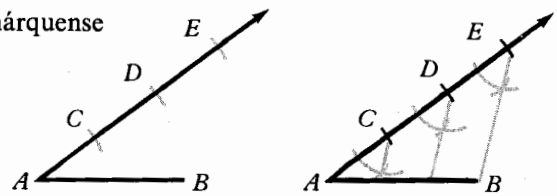
19. Un avión vuela en dirección sureste. ¿Cuántos grados gira al cambiar su curso hacia el sursuroeste?

C.



20. Constrúyase $\triangle ABC$ con lado $\overline{AB}$ y ángulos A y B.

21. Síganse estas instrucciones para dividir el segmento $\overline{AB}$ en tres segmentos congruentes.



a. Trácese un rayo a partir del punto A y márquense sobre él tres segmentos congruentes.

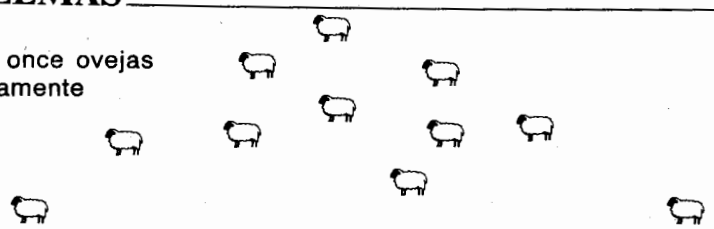
b. Trácese $\overline{EB}$.

c. Empléese la construcción 2 para copiar $\angle AEB$ en D y después en C.

d. Los lados de los ángulos copiados dividen $\overline{AB}$ en tres segmentos congruentes.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Un granjero quiere separar estas once ovejas construyendo once corrales exactamente con cuatro vallas rectas.
¿Cómo puede hacerlo?
(Las vallas se pueden cruzar.)



1.5 Bisectrices del segmento y del ángulo

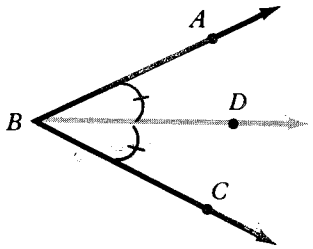
En un diamante de béisbol, la segunda base está a la misma distancia de las dos líneas de *foul*. *Home*, la primera base, la segunda base y la tercera base, están en las esquinas de un cuadrado. ¿Está el montículo del lanzador en el punto medio entre:

a. *home* y la segunda base?

b. la primera base y la tercera?

c. ninguna de las anteriores?

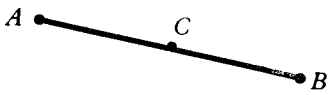
La marcación de un diamante de béisbol incluye los conceptos y los procedimientos de construcción que se explican a continuación.



El rayo BD es la *bisectriz de* $\angle ABC$. Todos los puntos de $\overrightarrow{BD}$ están a la misma distancia de los lados de $\angle ABC$.

Definición 1.18

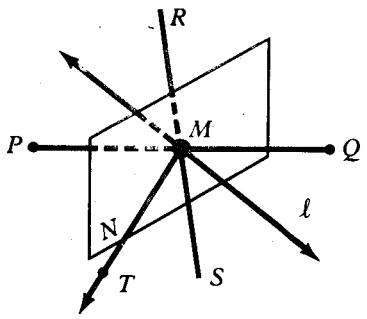
La **bisectriz de un ángulo** ABC es un rayo BD en el interior de $\angle ABC$, de manera que $\angle ABD \cong \angle DBC$.



El punto C es el *punto medio* de $\overline{AB}$.

Definición 1.19

El **punto medio de un segmento** es un punto C entre A y B, de manera que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.



$\overline{RS}$, $\overleftrightarrow{MT}$, la recta ℓ y el plano N intersecan a $\overline{PQ}$ en el punto medio M, y son bisectrices de $\overline{PQ}$.

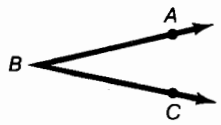
Definición 1.20

La **bisectriz de un segmento** es cualquier punto, segmento, rayo, recta o plano que contenga al punto medio del segmento.

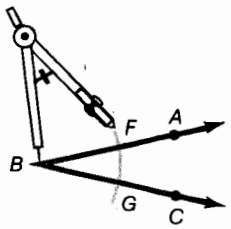
A continuación se describen los métodos para bisecar un ángulo y un segmento.

Construcción 3. Bisecar un ángulo.

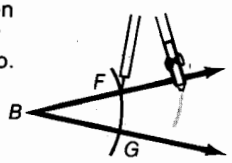
1. Dado el ángulo *ABC*,



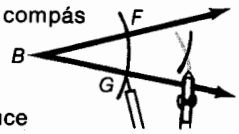
2. Con *B* como centro, trácese un arco que interseque ambos lados del ángulo en *F* y *G*.



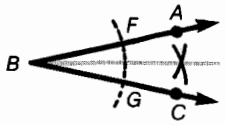
3. Con *F* como centro, trácese un arco en el interior del ángulo.



4. Con *G* como centro y la misma abertura de compás que en el tercer paso, trácese un arco que cruce al primero.

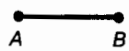


5. Unanse *B* y el punto de intersección de los arcos para marcar la bisectriz del ángulo.

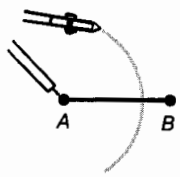


Construcción 4. Bisecar un segmento.

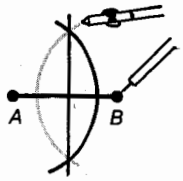
1. Dado el segmento de recta *AB*,



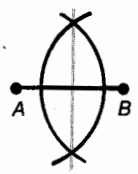
2. Con *A* como centro y el compás con una abertura mayor que la mitad de *AB*, trácese un arco semicircular.



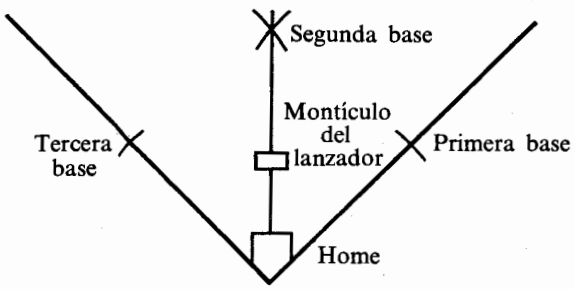
3. Con *B* como centro y el compás con la misma abertura que en 2, trácese un arco semicircular que interseque al primer arco.



4. Unanse los dos puntos de intersección para completar la construcción de la bisectriz de $\overline{AB}$.



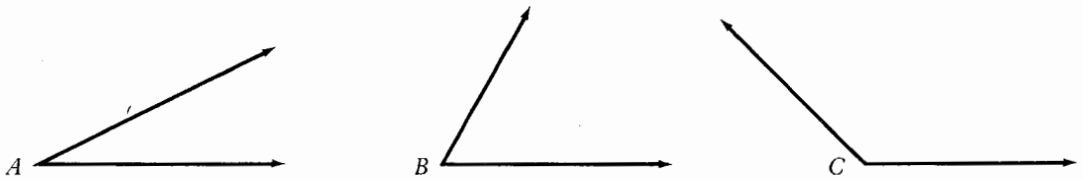
Este diagrama muestra cómo la bisección de un ángulo resulta útil en la marcación de un diamante de béisbol. Obsérvese que el montículo del lanzador está sobre la bisectriz del ángulo, a 60 pies y 6 pulgadas de *home*. No está sobre una recta que vaya de la primera base a la tercera, ni está en el punto medio de la recta que va de *home* a la segunda base.



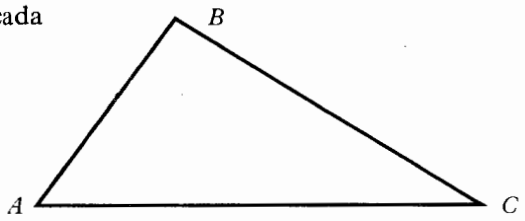
EJERCICIOS

A.

1. Trácese un segmento $\overline{AB}$. Biséquese $\overline{AB}$.
2. Trácese un segmento $\overline{AB}$. Constrúyase un punto N de tal manera que $AN = \frac{1}{4}AB$.
3. ¿Qué otras fracciones de $\overline{AB}$ se pueden construir?
4. Trácense ángulos cuya medida se aproxime a la de los ángulos A, B y C. Constrúyanse las bisectrices de estos ángulos.



5. Trácese este triángulo. Biséquese cada ángulo. ¿Son concurrentes las bisectrices de los ángulos?

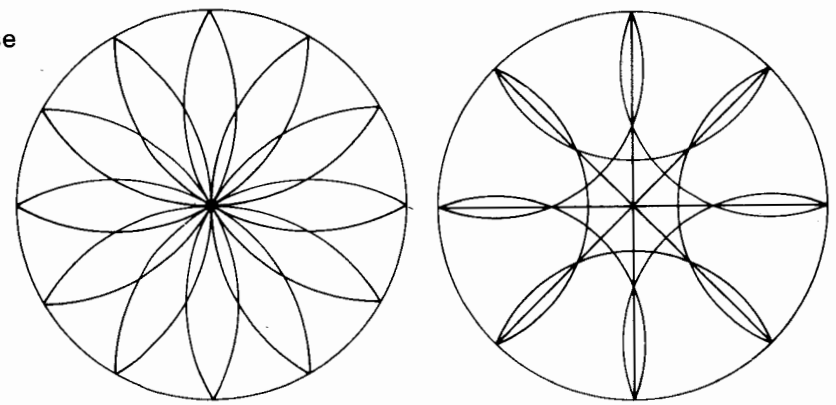


6. La bisectriz de $\angle XYZ$ es $\overrightarrow{YT}$. Escríbanse los nombres de los ángulos congruentes que se forman.

ACTIVIDADES

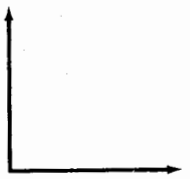
Para construir estos diseños es necesario bisecar ángulos.

1. Constrúyase y coloréese uno de estos diseños.
2. Con un compás y una regla, constrúyase un diseño original que requiera la bisección de ángulos.



B.

Para realizar los ejercicios 7 a 10, deben usarse las construcciones. Si se desea, puede copiarse el ángulo recto *ABC*. No debe utilizarse el transportador.



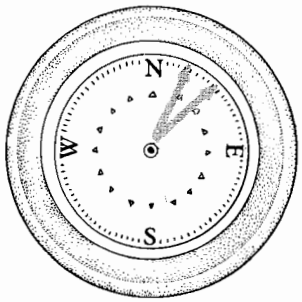
(Ejercicios 7-10)

7. Constrúyase un ángulo de 45°. **8.** Constrúyase un ángulo de $22\frac{1}{2}°$.

9. Constrúyase un ángulo de 135°. **10.** Constrúyase un ángulo de $67\frac{1}{2}°$.

11. Trácense dos ángulos agudos; llámense $\angle J$ y $\angle K$. Constrúyase un tercer ángulo que mida $\frac{1}{2}(m\angle J + m\angle K)$. No debe utilizarse el transportador

12. Dibújense las cuatro direcciones señaladas en una brújula. Con una regla y un compás, trácese una recta que apunte hacia el nornoreste.

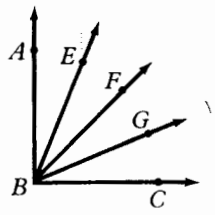


C.

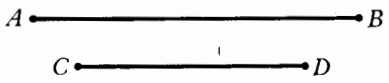
13. Constrúyase un ángulo de $112\frac{1}{2}°$. **14.** Constrúyase un ángulo de $82\frac{1}{2}°$.

15. Constrúyase un ángulo de $157\frac{1}{2}°$. **16.** Constrúyase un ángulo de $97\frac{1}{2}°$.

17. En este diagrama, $\overrightarrow{BF}$ biseca a $\angle EBG$, $m\angle ABC = 90$, $m\angle ABE = 20$, $m\angle GBC = 24$. ¿Qué es $m\angle ABF = ?$



18. Constrúyase un segmento de longitud $4CD - \frac{1}{2}AB$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Un *compás oxidado* pierde su movimiento y siempre tiene la misma abertura.

Un *compás plegable*, en cambio, vuelve a cerrarse en cuanto se separa del papel.

1. Biséquese $\overline{AB}$ con:

a. un compás plegable

b. un compás oxidado con abertura de *C* a *D*.

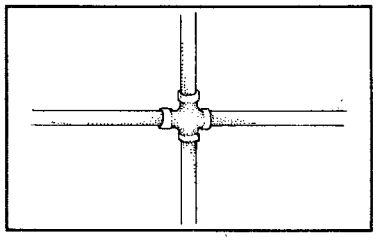
2. Biséquese un ángulo con:

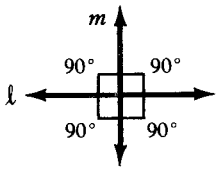
a. un compás plegable. **b.** un compás oxidado.

1.6 Rectas y planos perpendiculares

En nuestra vida cotidiana hay muchos ejemplos de rectas y planos perpendiculares. Algunos de estos ejemplos se emplean en las definiciones siguientes.

Modelo físico ***Figura, descripción*** ***Definición***





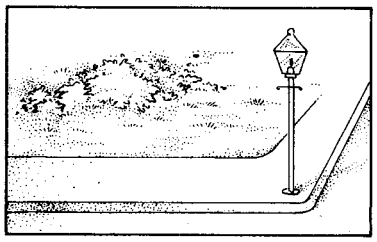
ℓ es perpendicular a m.
Se escribe: $\ell \perp m$.

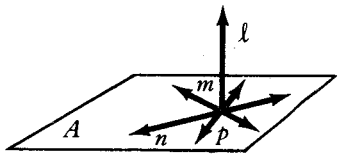
Definición 1.21

Dos rectas son **perpendiculares** si al intersecarse forman ángulos rectos congruentes.

A partir de proposiciones simples que pueden demostrarse, se interpretará ésta definición de *perpendicular* incluyendo los siguientes conceptos:

1. Cuando dos rectas son perpendiculares, todos los ángulos que se forman miden 90° (ángulos rectos) y son congruentes.
2. Cuando dos rectas se intersecan para formar uno, dos o tres ángulos de 90° (ángulos rectos), forman cuatro ángulos rectos y son perpendiculares.
3. Cuando dos rectas se intersecan para formar un par de ángulos congruentes con un lado común, las rectas son perpendiculares.

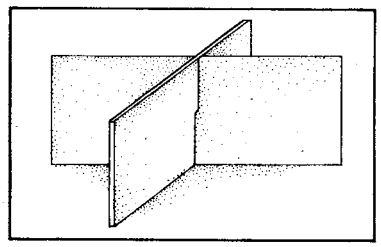


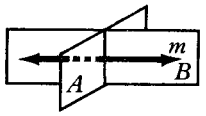


La recta ℓ es perpendicular a las rectas m, n, p, etc.; por tanto, la recta ℓ es perpendicular al plano.

Definición 1.22

Una **recta es perpendicular a un plano** si es perpendicular a cada una de las rectas del plano que intersecan a la recta.

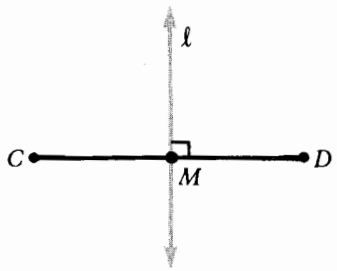




La recta m del plano B es perpendicular al plano A; por tanto, el plano B es perpendicular al plano A.

Definición 1.23

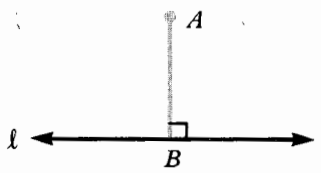
Dos **planos son perpendiculares** si en uno de ellos hay una recta que es perpendicular al otro.



ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{CD}$.

Definición 1.24

La **bisectriz perpendicular de un segmento** es una recta perpendicular al segmento y contiene su punto medio.



AB es la distancia del punto A a la recta ℓ.

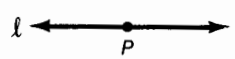
Definición 1.25

La **distancia entre un punto y una recta** es la longitud del segmento trazado desde el punto perpendicular a la recta.

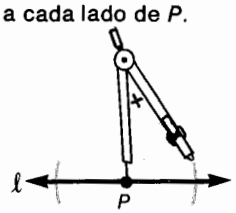
En la construcción 4 se trazó la bisectriz perpendicular de un segmento. Las siguientes son otras dos construcciones importantes que incluyen rectas perpendiculares.

Construcción 5. Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado de la recta.

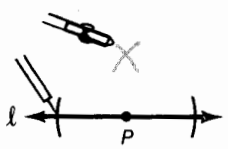
1. Dados una recta ℓ y un punto P de ℓ,



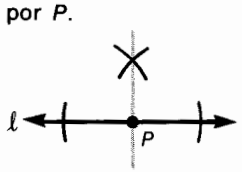
2. Trácese un arco a cada lado de P.



3. Trácense dos arcos que se crucen arriba de la recta ℓ.

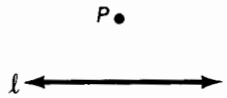


4. Trácese la perpendicular a la recta ℓ por P.

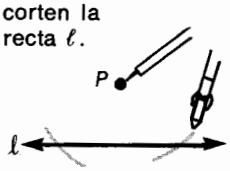


Construcción 6. Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado fuera de la recta.

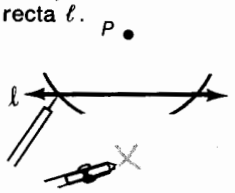
1. Dados una recta ℓ y un punto P fuera de la recta ℓ,



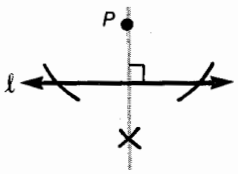
2. Trácense dos arcos que corten la recta ℓ.



3. Trácense dos arcos que se crucen por debajo de la recta ℓ.

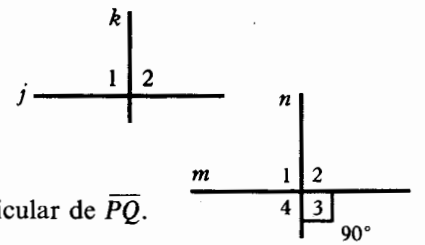


4. Trácese la perpendicular a la recta ℓ, por P.

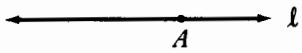


EJERCICIOS

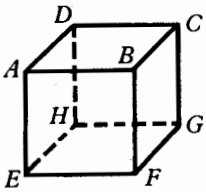
A.



1. $\angle 1 \cong \angle 2$. ¿Qué puede concluirse sobre las rectas j y k?
2. $m\angle 3$ es 90. ¿Qué puede decirse sobre las rectas m y n y los ángulos 1, 2 y 4?
3. Trácese un segmento $\overline{PQ}$. Constrúyase la bisectriz perpendicular de $\overline{PQ}$.
4. Trácese una recta ℓ. Constrúyase una recta perpendicular a ℓ que contenga al punto A de ℓ.
5. Trácese una recta m y un punto P que no esté en m. Constrúyase una recta perpendicular a m que pase por P.

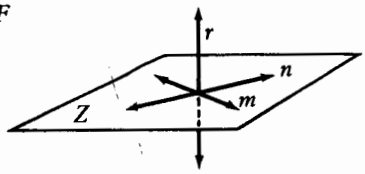


6. Cítense cuatro rectas que sean perpendiculares al plano $ABCD$.
7. Cítense cuatro pares de planos perpendiculares.



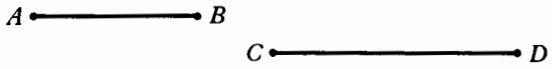
(Ejercicios 6, 7)

8. La recta r es perpendicular al plano Z. ¿Qué puede decirse sobre las rectas r, m y n?



B.

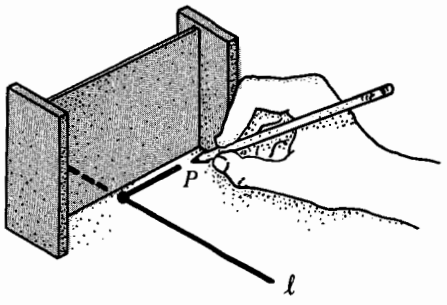
9. Constrúyase un rectángulo con lados congruentes con $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



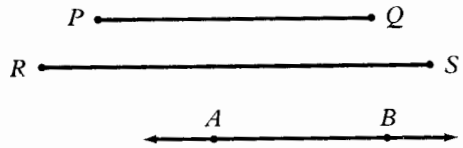
ACTIVIDADES

Estas instrucciones muestran cómo usar una hoja de plástico de color para construir una perpendicular a una recta que pase por un punto que no está en la recta (Construcción 6). Explíquese cómo realizar las construcciones 3, 4 y 5 de este capítulo usando la hoja de plástico.

Colóquese la hoja de plástico perpendicular al plano sobre el que se trabajará (mesa, papel, etc.), con un borde próximo al punto P, de tal manera que la imagen visual de la mitad de la recta ℓ frente a la hoja de plástico, esté exactamente a la mitad de la recta ℓ que está detrás de dicha hoja. Hágase el dibujo junto al borde para producir la perpendicular a la recta ℓ por el punto P.



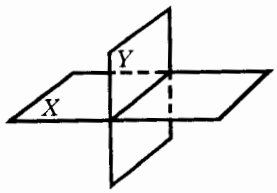
10. Constrúyase un triángulo con un ángulo de 45° y lados congruentes con los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$. (No se debe utilizar el transportador.)



11. Aplíquese la construcción 5 para hacer un cuadrado con lados AB

12. Trácese un triángulo ABC. Aplíquese la construcción 6 para trazar un punto D sobre $\overline{BC}$ de manera que $\overline{AD}$ sea perpendicular a $\overline{BC}$.

13. ¿Es el plano X perpendicular al plano Y? De acuerdo con la definición de los planos perpendiculares, ¿qué información se requiere para asegurarse de que los planos son perpendiculares?

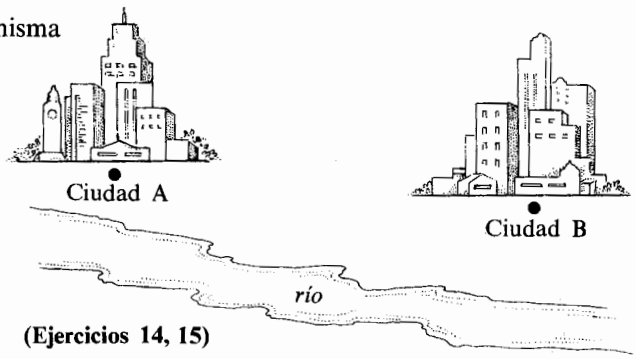


C.

14. Dos ciudades necesitan un servicio adicional de agua. Se decidió construir una planta purificadora de agua junto a un río cercano y canalizar el agua desde la planta hasta cada ciudad. Cada ciudad pagará la instalación de las tuberías que irán de la planta a ella. La planta debe ubicarse a la misma distancia de las dos ciudades.

15. Otro objetivo a cumplir al determinar el punto en que debe ubicarse la planta purificadora de agua del ejercicio 14 es que las ciudades compartan de forma equitativa todos los gastos. Este plan implica que la longitud total de la tubería debe ser la mínima necesaria. ¿Dónde debe colocarse la planta purificadora? Trácese el mapa y búsquese la ubicación idónea de la planta.

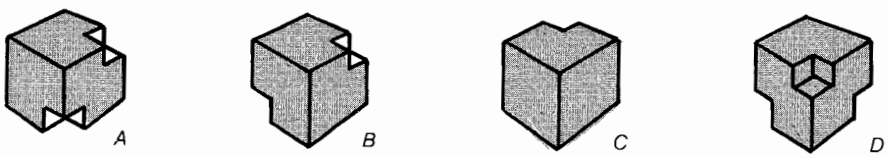
Trácese el mapa que se muestra a continuación y determínese mediante una construcción el punto en que debe colocarse la planta para satisfacer estos objetivos.



(Ejercicios 14, 15)

SOLUCION DE PROBLEMAS

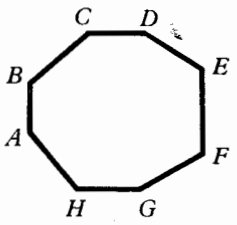
Los siguientes son cuatro cubos idénticos de los que se han extraído una o más porciones cúbicas también de idéntico tamaño.



Compárese cada par de figuras: *A* y *B*, *A* y *C*, *A* y *D*, *B* y *C*, *B* y *D* y *C* y *D*. ¿Cuál de estos pares podría ser el mismo (dependiendo de la esquina posterior que no está a la vista)?

1.7 Polígonos

Las figuras geométricas formadas por líneas rectas son muy comunes en nuestro mundo. Tales figuras reciben el nombre de *polígonos.*



Este polígono tiene ocho lados. Los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H* son sus vértices. A cada segmento de un polígono se le llama *lado.*

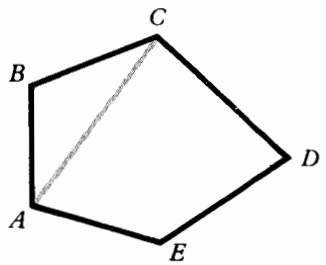
Se escribe:
polígono *ABCDEFGH.*

Definición 1.26

Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos.

Los polígonos reciben un nombre particular de acuerdo con el número de lados que tengan. Por ejemplo: triángulo, 3 lados; cuadrilátero, 4 lados; pentágono, 5 lados; hexágono, 6 lados; heptágono, 7 lados; octágono, 8 lados. Un polígono con n lados podría llamarse **n-gono.**

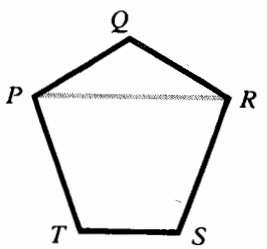
Las definiciones siguientes proporcionan más información sobre los polígonos.



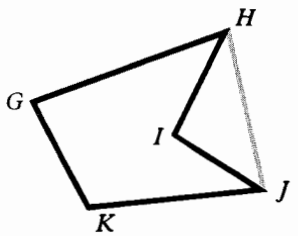
Los extremos de $\overline{AC}$ son vértices no consecutivos del polígono *ABCDE*. $\overline{AC}$ es una de las *diagonales* del polígono.

Definición 1.27

Una **diagonal de un polígono** es un segmento que toca dos vértices no consecutivos cualesquiera del polígono.



Cada diagonal de este polígono, como $\overline{PR}$, está en el interior del polígono. *PQRST* es un polígono convexo.

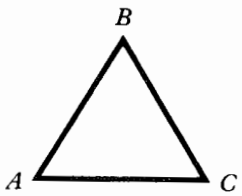


Por lo menos una de las diagonales de este polígono no está en su interior. *GHIJK* no es un polígono convexo.

Definición 1.28

Un **polígono es convexo** si todas sus diagonales están en el interior del polígono.

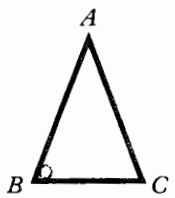
Los triángulos con lados congruentes tienen nombres especiales.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

Definición 1.29

Un **triángulo equilátero** es aquel cuyos lados son todos congruentes entre sí.



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\angle A$ es el *ángulo del vértice.* $\angle B$ y $\angle C$ son los *ángulos de la base.*

Definición 1.30

Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene dos lados congruentes entre sí.

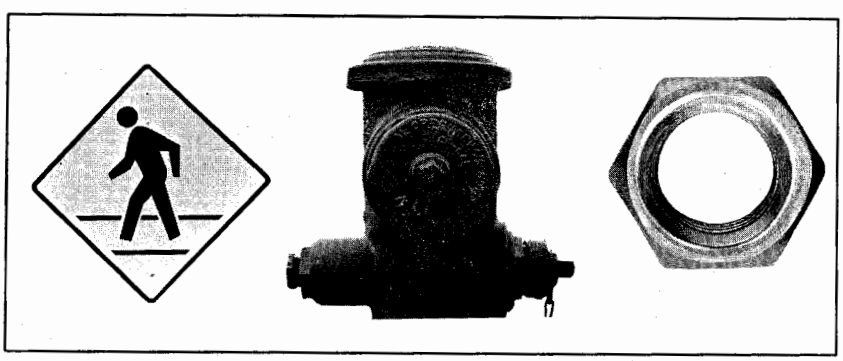
Algunos polígonos tienen características que los convierten en *polígonos regulares.*

Todos los lados son de igual longitud. Todos los ángulos miden lo mismo.

Definición 1.31

Un **polígono regular** es aquel cuyos lados son congruentes entre sí, y todos sus ángulos también son congruentes entre sí.

ABCDEFG es un polígono regular.

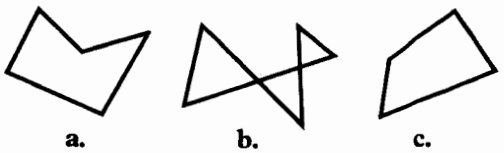


EJERCICIOS

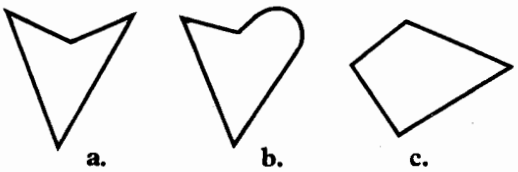
A.

En los ejercicios 1 a 4, selecciónese la figura que no es un polígono regular. Explíquese por qué no lo es.

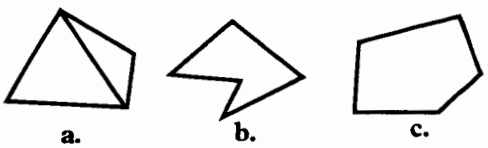
1.



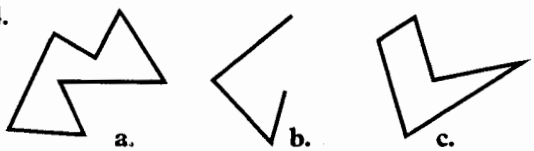
2.



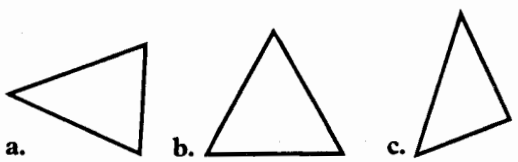
3.



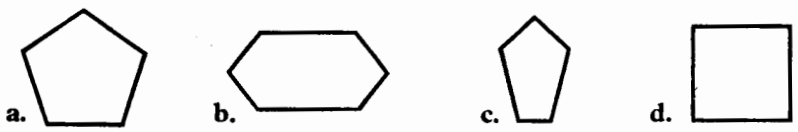
4.



5. ¿Cuáles de las figuras anteriores son polígonos convexos? Por ejemplo, la figura 1c es un polígono convexo.
6. Trácese un octágono convexo. Trácese una de sus diagonales.
7. Trácese un octágono no convexo.
8. Identifíquese cada triángulo como equilátero, isósceles o ninguno de ellos. Empléese una regla.



9. ¿Cuáles de los siguientes son polígonos regulares?



(Ejercicios 9, 10)

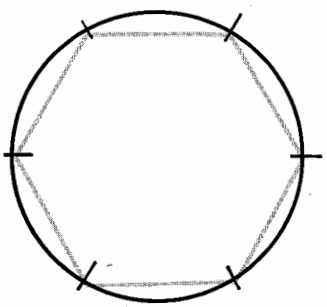
10. Trácense tantas diagonales como sea posible para cada uno de los polígonos anteriores

ACTIVIDADES

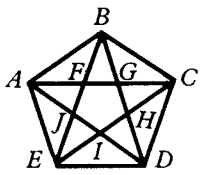
Para construir un hexágono regular puede usarse el método de construcción con regla y compás descrito en las actividades de la sección 1.3.

Combínese este método con la bisección de ángulos y la construcción de bisectrices perpendiculares para construir:

a. un dodecágono regular
b. un octágono regular
c. un polígono regular de 16 lados.



B.

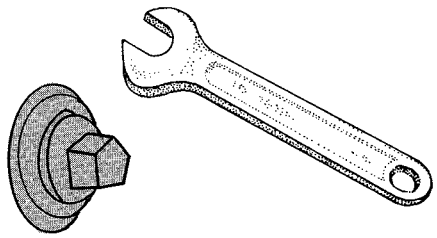


11. *ABCDE* es un pentágono regular. Nómbrense tantos triángulos isósceles como sea posible. (Si un triángulo parece isósceles, puede suponerse que lo es.)

12. Algunas letras del alfabeto pueden dibujarse con la forma de un polígono, pero otras no. Dibújense con forma de polígonos tantas letras como sea posible.

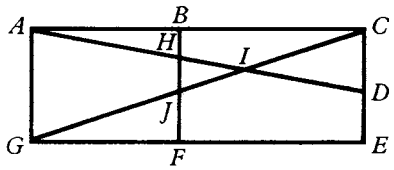
13. Una llave de tuercas fija tiene lados paralelos. ¿Qué puede suponerse acerca del número de caras de la tuerca a la que corresponde esta llave?

14. El vástago de la válvula de una toma de agua para incendios suele tener forma de pentágono regular, en lugar de la forma usual de hexágono regular. ¿A qué puede ser debido?



C.

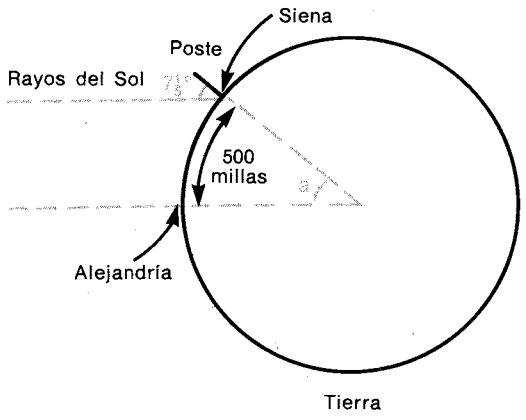
15. La figura que aparece a la derecha contiene ejemplos de diferentes polígonos: desde triángulos hasta decágonos. Encuéntrese y cítese cada uno.



16. Con un transportador y una regla, trácese un octágono cuyos lados tengan cinco longitudes diferentes y los ángulos de los vértices midan 135°.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Eratóstenes (275 a. de C.) calculó la circunferencia de la Tierra con un método ingenioso. Supuso que los rayos del Sol eran paralelos, y descubrió que cuando el Sol se encontraba exactamente sobre Alejandría, sus rayos formaban un ángulo de $7\frac{1}{5}°$ con un poste vertical situado a 500 millas, en Siena (Asuán). Además, supuso que el ángulo central *a* también medía $7\frac{1}{5}°$. Dedujo que la relación del ángulo central *a* a 500 millas sería igual a la relación del total de grados de un círculo para completar la longitud de la circunferencia de la Tierra. Defínase la proporción y hállese la distancia.



Capítulo 1 Conceptos importantes

Términos

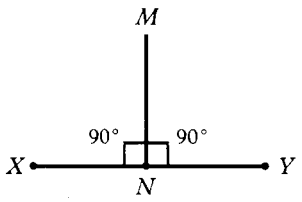
Punto (pág. 226)
Recta (pág. 226)
Plano (pág. 227)
Espacio (pág. 227)
Puntos colineales (pág. 229)
Puntos coplanares (pág. 229)
Rectas intersecantes (pág. 229)
Rectas paralelas (pág. 229)
Rectas concurrentes (pág. 229)
Segmento (pág. 232)
Rayo (pág. 232)
Angulo (pág. 233)
Triángulo (pág. 233)
Cuadrilátero (pág. 233)
Círculo (pág. 233)
Segmentos congruentes (pág. 236)
Angulos congruentes (pág. 236)
Angulo agudo (pág. 237)
Angulo recto (pág. 237)
Angulo obtuso (pág. 237)
Bisectriz de un ángulo (pág. 239)
Punto medio de un segmento (pág. 239)
Bisectriz de un segmento (pág. 239)
Rectas perpendiculares (pág. 243)
Recta perpendicular a un plano (pág. 243)
Planos perpendiculares (pág. 243)
Bisectriz perpendicular (pág. 244)
Distancia de un punto a una recta (pág. 244)
Polígono (pág. 248)
Diagonal de un polígono (pág. 248)
Polígono convexo (pág. 248)
Triángulo equilátero (pág. 249)
Triángulo isósceles (pág. 249)
Polígono regular (pág. 249)

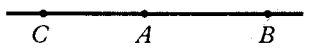
Construcciones

Cópiese un segmento (pág. 237)
Cópiese un ángulo (pág. 237)
Biséquese un ángulo (pág. 240)
Biséquese un segmento (pág. 240)
Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado sobre la recta (pág. 245)
Constrúyase una perpendicular a una recta que pase por un punto dado fuera de la recta (pág. 245)

Capítulo 1 Resumen

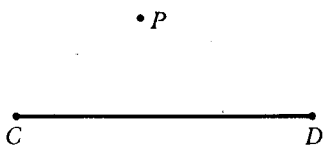
1. Cítense objetos que ilustren lo siguiente:
   a. Punto. **b.** Plano. **c.** Rectas paralelas.
   d. Rectas intersecantes. **e.** Polígono.
2. Indíquese si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas.
   a. Un rayo láser es un ejemplo mejor de recta que un rayo.
   b. $\overline{MN}$ no es perpendicular a $\overline{XY}$, porque sólo se forman dos ángulos rectos.
   c. El punto C está en $\overrightarrow{AB}$.
   d. El punto C está en $\overleftrightarrow{AB}$.
   e. Un radio es un rayo.
   f. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.





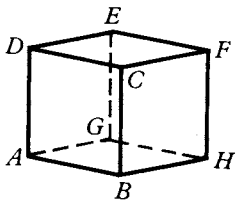
3. ¿Cuántos extremos tienen una recta, un rayo y un segmento?
4. ¿Es lo mismo $\overline{AB}$ que $\overline{BA}$? ¿Por qué?
5. Constrúyase un ángulo de 135°.
6. Dibújese un ángulo obtuso y trácese su bisectriz. ¿Son los ángulos resultantes agudos, rectos u obtusos?
7. Trácese un triángulo ABC (bastante grande). Márquese el punto medio de cada uno de los lados.

8. Trácese un segmento que sea congruente con $\overline{AB}$.
9. Trácese un segmento de longitud $\frac{1}{4}AB$.
10. Cópiense $\overline{CD}$ y P en un papel y trácese una recta perpendicular a $\overline{CD}$ que pase por P.



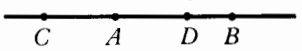
En los ejercicios 11 a 14, empléese la figura del cubo para identificar lo siguiente:

11. Dos planos paralelos.
12. Una recta perpendicular al plano $EFHG$.
13. Una recta paralela al plano $CDEF$ pero que no sea perpendicular al plano $ABCD$.
14. La intersección de los planos $BCEG$ y $BCFH$.

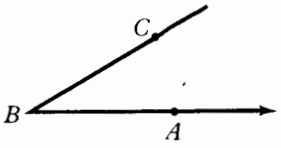


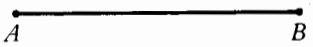
Capítulo 1 Examen

1. Cítense objetos que ilustren lo siguiente:
   a. Recta. **b.** Rectas concurrentes. **c.** Rectas perpendiculares.
   d. Polígono regular. **e.** Espacio.
2. Indíquese si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas.
   a. Dos puntos siempre son colineales.
   b. Si dos ángulos son congruentes, entonces ambos son rectos.
   c. El punto D está en $\overrightarrow{AB}$.
   d. El punto D está en $\overleftrightarrow{AC}$.
   e. Un diámetro de un círculo es una recta.
   f. Un triángulo isósceles debe tener tres lados congruentes.



3. ¿Es lo mismo $\overrightarrow{AB}$ que $\overrightarrow{BA}$? ¿Por qué?
4. Si dos rectas son paralelas, ¿cuántos puntos tienen en común?
5. Dibújese un cuadrilátero no convexo.
6. Dibújese un triángulo ABC. Trácese la bisectriz de cada ángulo.
7. Trácese un ángulo que sea congruente con $\angle ABC$.
8. Sin usar el transportador, trácense cuatro ángulos rectos con un vértice común.
9. Trácese un segmento congruente con $\overline{AB}$.
10. Márquese el punto medio de $\overline{AB}$.

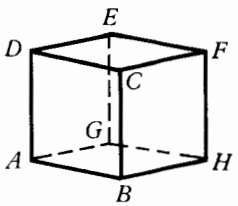




(Ejercicios 9, 10)

En los ejercicios 11 a 14, empléese la figura del cubo e identifíquese lo siguiente:

11. Una recta paralela al plano $ABHG$.
12. Un plano perpendicular a $\overleftrightarrow{EG}$.
13. Una recta que no sea paralela ni perpendicular a ninguna cara del cubo.
14. La intersección de los planos $ADFH$ y $CDEF$.



Técnicas para la solución de problemas

Dibujo de un diagrama

Puede resultar agradable resolver problemas si se conocen diversas maneras de abordarlos. Hay varias técnicas para resolver problemas de matemáticas; una de ellas es dibujar un diagrama.

Ejemplo

En el rayo $\overrightarrow{AB}$, $AC = 5$ y $AB = 2$. Encuéntrese BC. Como ayuda para resolver este problema, se dibujará un diagrama.

En el diagrama se observa que $BC = 3$.

PROBLEMAS

Dibújense diagramas y resuélvanse los siguientes problemas.

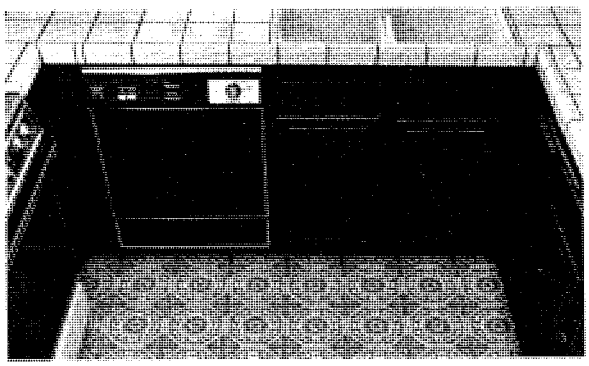
1. En el rayo $\overrightarrow{NP}$, $NP = 4$ y $PM = 6$. Encuéntrese NM.
2. En el rayo $\overrightarrow{XY}$, $XY = 15$ e $YZ = 6$. Encuéntrese ZX.
3. ¿Cuántos postes se necesitan para cercar un terreno rectangular si entre los postes debe haber 5 pies de distancia y el terreno mide 20 pies por 30 pies?
4. Supóngase que un insecto camina sobre un palo vertical y sube dos pulgadas en dos minutos; después, baja una pulgada en un minuto; de nuevo sube dos pulgadas en dos minutos, y así sucesivamente. Si sigue así, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar una altura de 10 pulgadas?
5. Una escalera tiene diez escalones, cada uno mide un pie de ancho y un pie de altura. Una hormiga empieza desde abajo del primer escalón y sube la escalera en línea recta. ¿Qué distancia habrá recorrido la hormiga al llegar a la parte más alta del último escalón?
6. En una escuela se trazó un circuito para una carrera de fondo en las calles de una ciudad. Desde el punto de salida, los corredores avanzaron 4 calles al este, 6 al norte, 2 al oeste, dos al sur, 5 al oeste, 3 al norte, 2 al oeste, 8 al sur y 5 más hacia el este hasta la meta. Establézcase la dirección y el número de calles que se recorrieron desde la salida hasta la meta.

LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

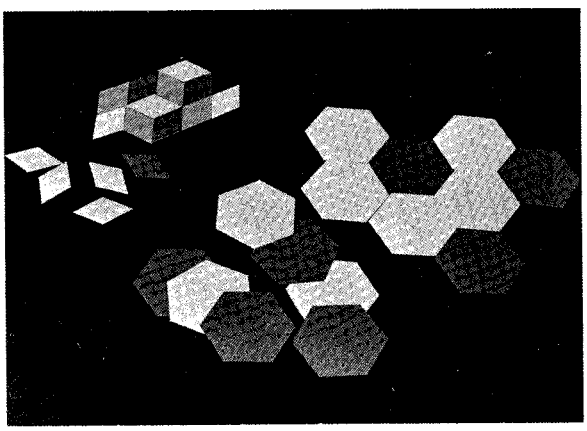
Diseño interior: Teselados

Un diseñador de interiores encuentra ejemplos de geometría al seleccionar diseños de telas, suelos y papel para paredes. Con frecuencia, en diseño se emplea un concepto geométrico llamado *teselado*. Un teselado es un conjunto de polígonos dispuestos de forma que no se sobreponen unos a otros ni quedan separaciones entre ellos.

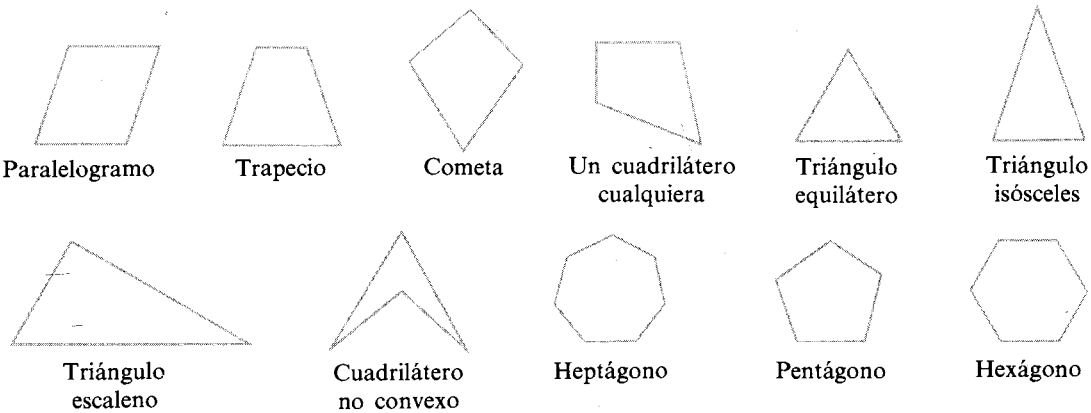
La cocina que aparece en la fotografía tiene un suelo y un recubrimiento de azulejos que son ejemplos de teselados.



1 ¿Con qué polígonos es posible hacer un teselado sobre una superficie plana?

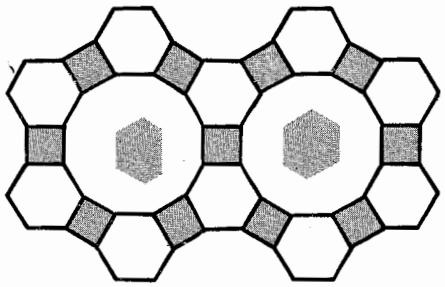


Al colocar un papel sobre un cuadrado y marcarlo varias veces, puede elaborarse un teselado de cuadros. En la fotografía se muestran otros teselados. Trácese en un papel una porción de teselado usando aquellas figuras de las que se muestran a continuación que lo permitan. Entre estas figuras hay dos que *no* pueden usarse en un teselado, ¿cuáles son?



2 ¿Con qué combinaciones de polígonos regulares es posible hacer un teselado sobre una superficie plana?

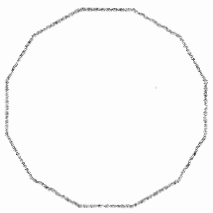
Pueden crearse diseños interesantes para pisos formando teselados que combinen algunos de los polígonos regulares que se muestran a continuación. El modelo que aquí se muestra tiene un *cuadrado*, un *hexágono* y un *dodecágono* rodeando cada punto; se le denomina con los números (4, 6, 12), que señalan el número de lados de cada figura empleada y el orden exacto en que se dispusieron alrededor del punto.



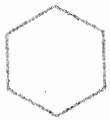
(4, 6, 12)

Trácense las figuras siguientes para mostrar una parte de cada uno de los teselados que se sugieren a continuación. Coloréense de manera que resulten diseños interesantes.

(4, 8, 8) (3, 4, 6, 4) (3, 6, 3, 6) (3, 3, 3, 4, 4) (3, 12, 12)



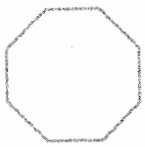
Dodecágono



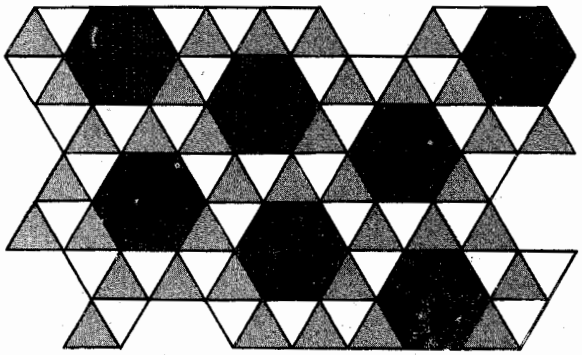
Hexágono

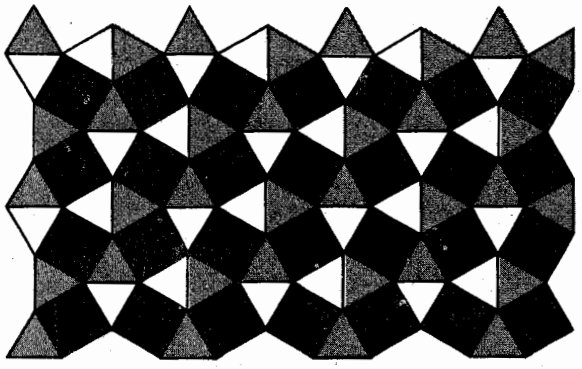
Cuadrado

Triángulo



Octágono





TEMA 6

Razonamiento en geometría

CAPÍTULO 2

2.1 El proceso del razonamiento inductivo 260

2.2 Generalizaciones falsas y contraejemplos 264

2.3 Desarrollo de la geometría por medio del razonamiento deductivo 268

2.4 Tipos de proposiciones Sí - Entonces 272

2.5 Recíproca, inversa y contrarrecíproca 276

2.6 Esquemas de razonamiento 280

2.7 Postulados de geometría 284

2.8 Algunos postulados sobre medición 288

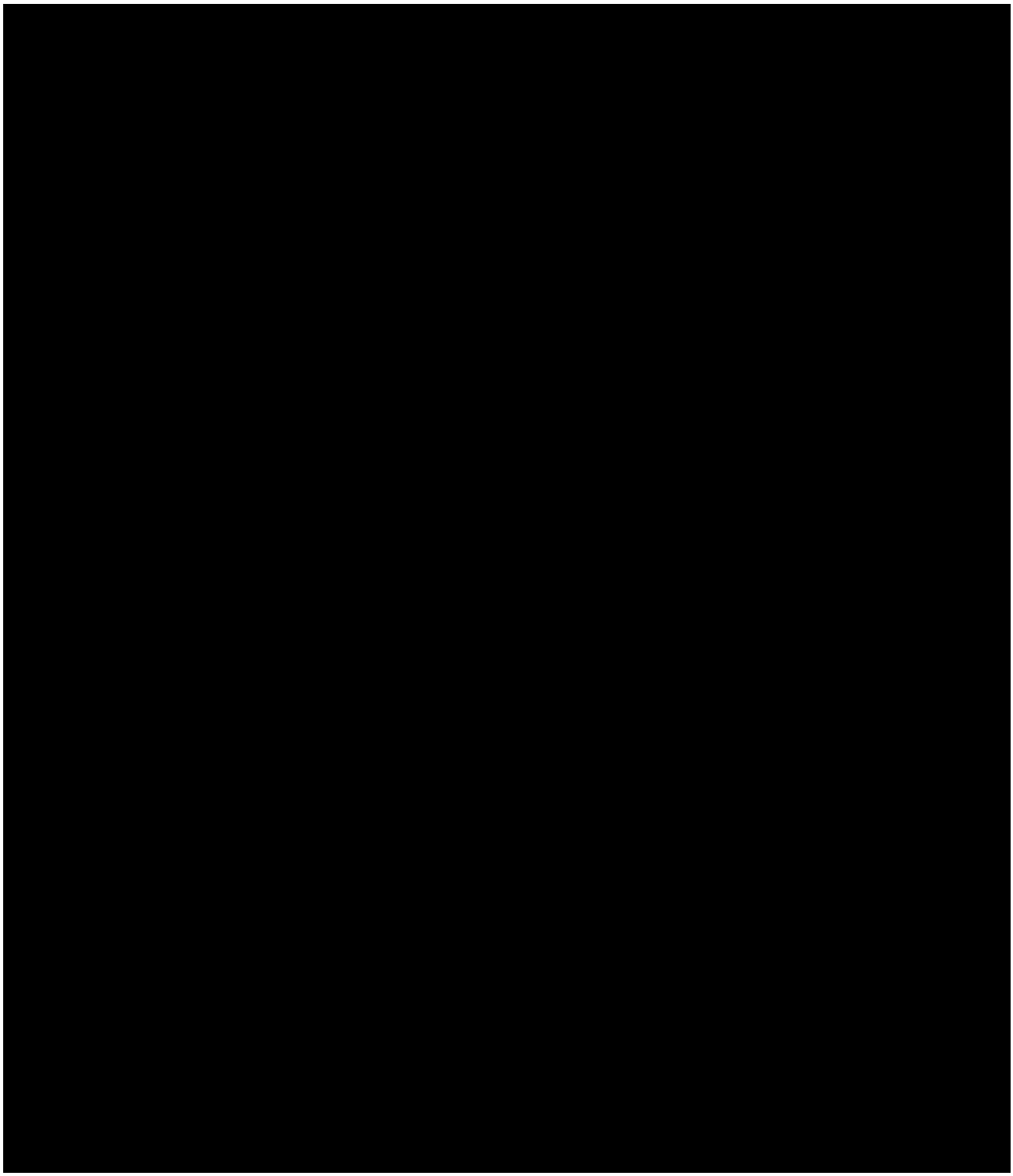
Conceptos importantes 292

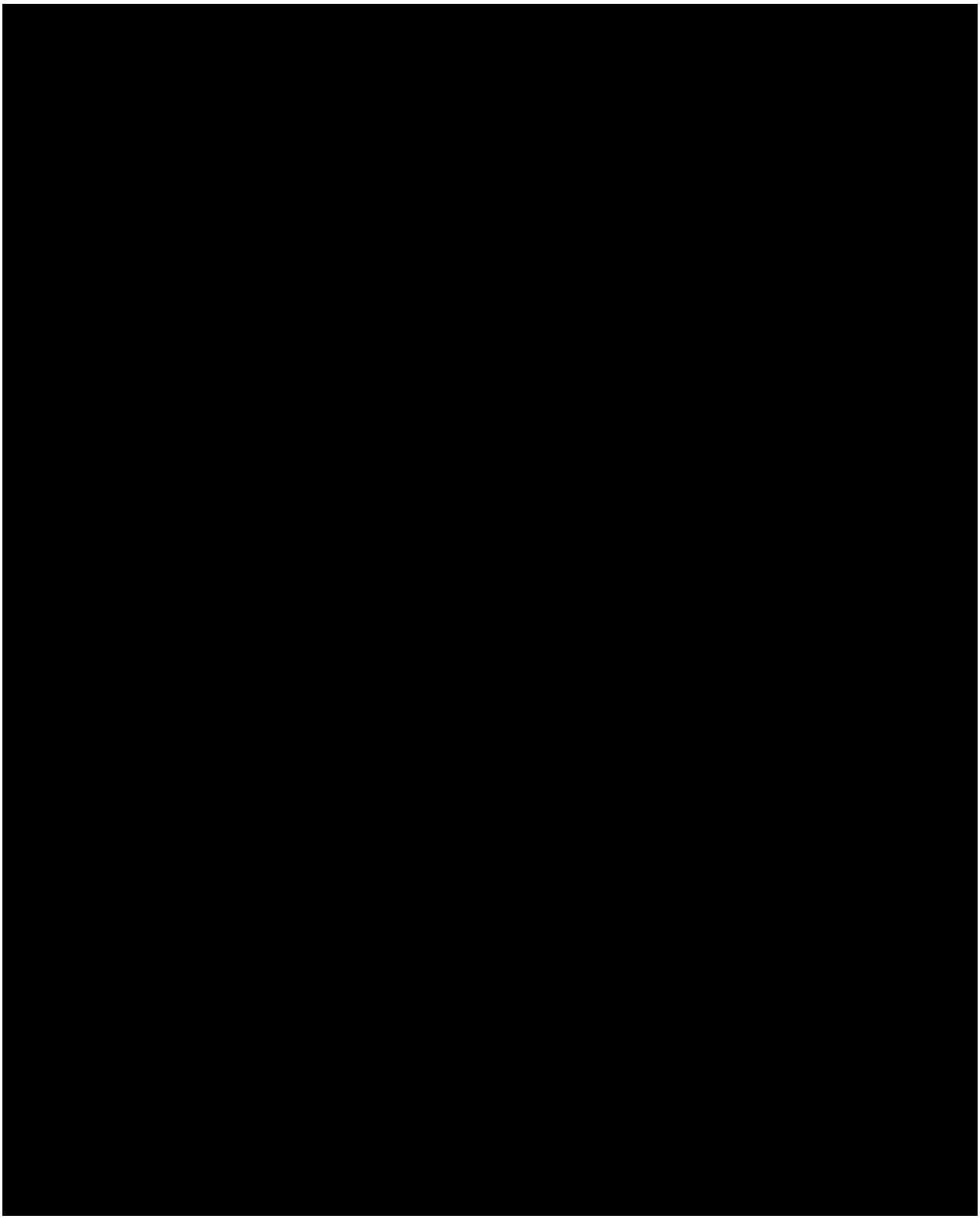
Resumen 293

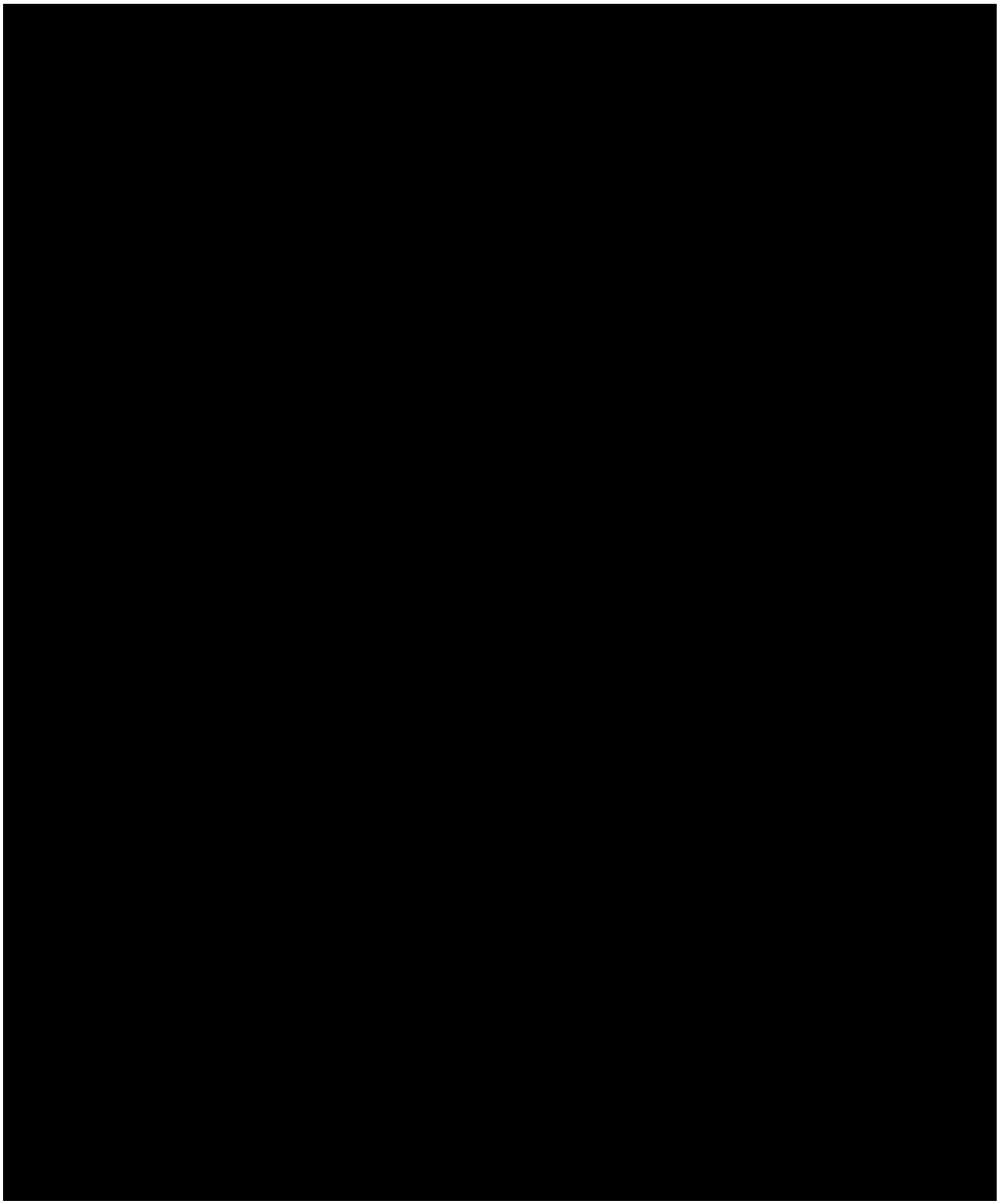
Examen 294

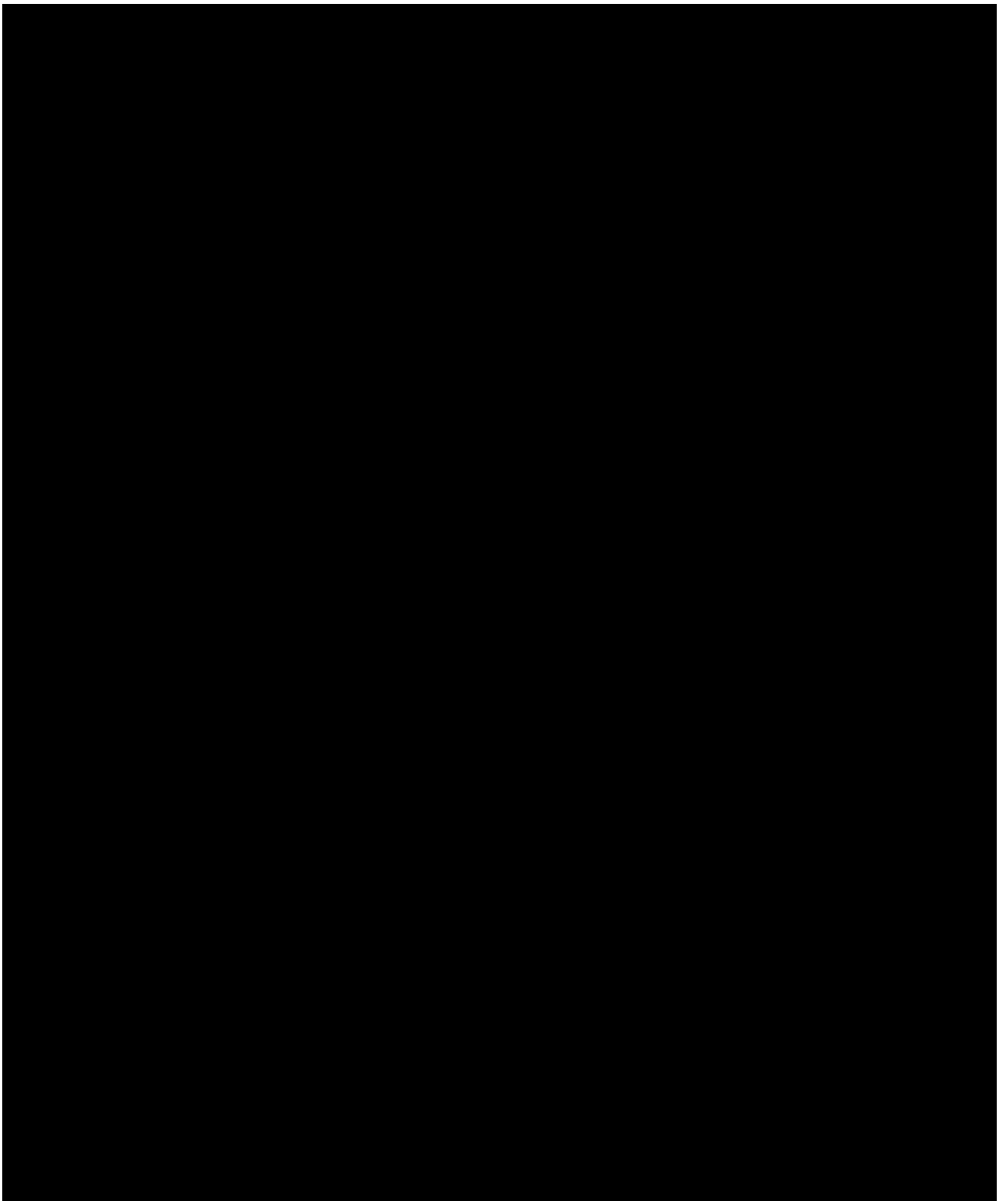
Repaso de álgebra 295

La geometría en nuestro mundo
Fotografía: lentes 296



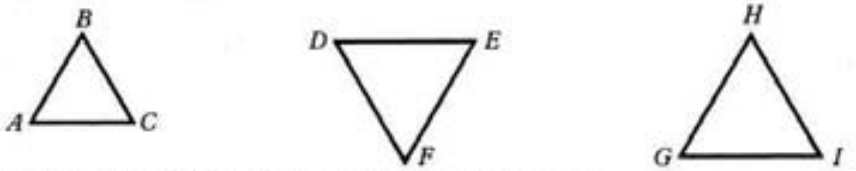






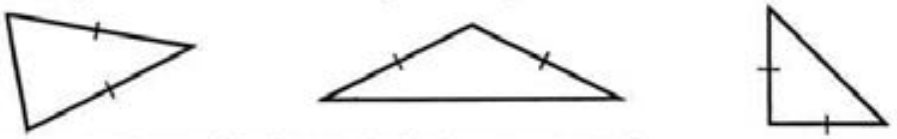
B.

3. Cada uno de los triángulos siguientes es un triángulo equilátero. Mídanse los ángulos. (Si es necesario, prolónguense los lados.) Cópiese y complétese la generalización.



Generalización: Si un triángulo es equilátero, entonces tiene ángulos ?.

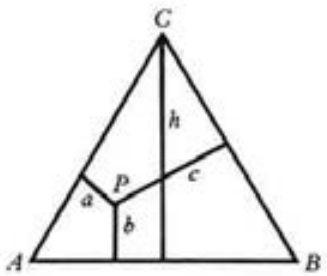
4. Cada uno de los triángulos siguientes tiene dos lados congruentes. Trácense los triángulos isósceles y biséquense los ángulos formados por los lados congruentes. Obsérvese la relación que existe entre la bisectriz y el lado opuesto.



Generalización: En un triángulo con dos lados congruentes, la bisectriz del ángulo formado por éstos es ? al tercer lado.

C.

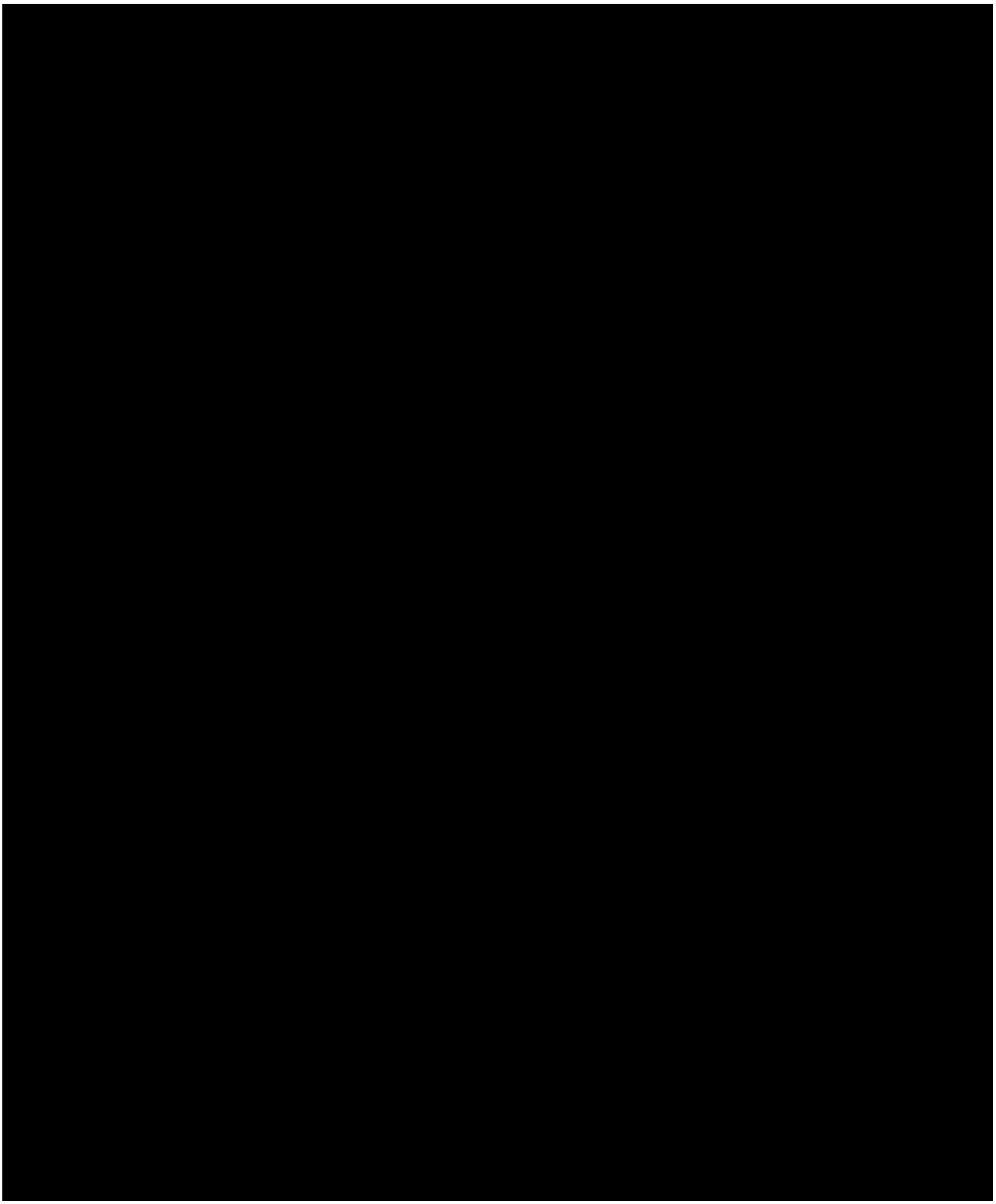
5. Trácese $\triangle ABC$ con $AB = BC = AC$. Elíjase un punto P en el interior del triángulo y trácense las perpendiculares de P a los lados del triángulo. Mídanse h, a, b y c al mm más cercano. Hágase lo mismo, con puntos P diferentes, tantas veces como sea necesario para formular una generalización.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Este diseño de cuatro palillos representa un espejo con una moneda en él.

Muévanse *sólo dos* palillos para formar un espejo del mismo tamaño que éste, pero dejando la moneda (que no debe moverse) fuera del espejo.

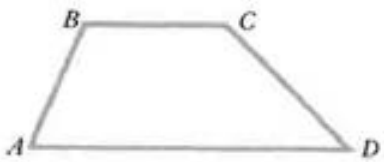


Ejemplo 2

Generalización falsa: Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, tiene un par de lados congruentes.

Comentario: Para demostrar que la generalización es falsa, debe presentarse un cuadrilátero con un par de lados paralelos que *no* tenga dos lados congruentes.

Contraejemplo: La figura $ABCD$ tiene $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, pero no tiene dos lados congruentes.

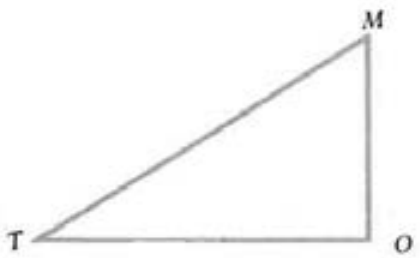


Ejemplo 3

Generalización falsa: Si un triángulo tiene un ángulo recto, tiene dos lados congruentes.

Comentario: Para demostrar que la generalización es falsa, debe presentarse un triángulo con un ángulo recto que *no* tenga dos lados congruentes.

Contraejemplo: La figura TOM tiene un ángulo recto ($\angle O$), pero sus tres lados tienen diferentes longitudes.



Un contraejemplo puede describirse como se hace aquí.

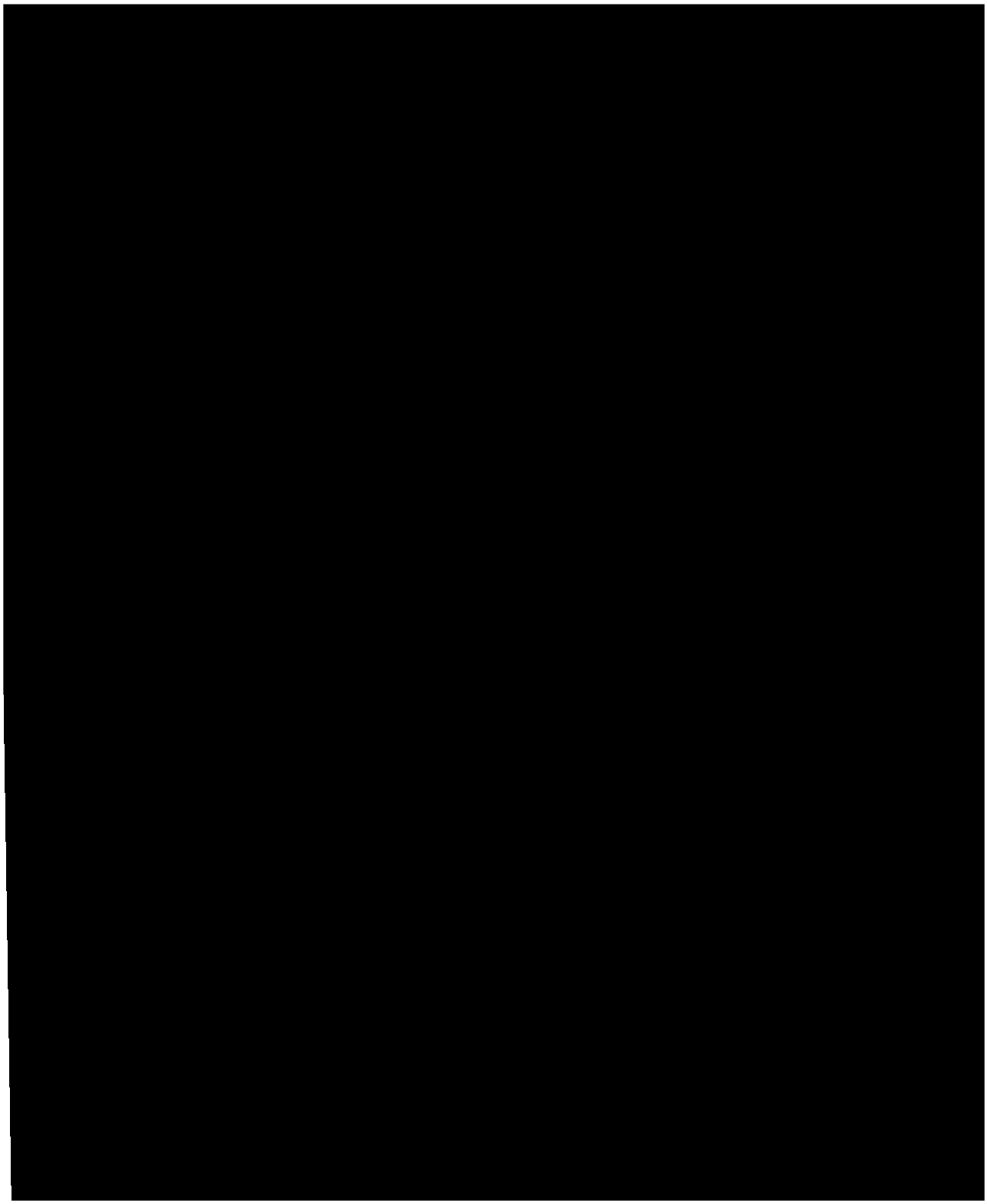
Definición 2.1

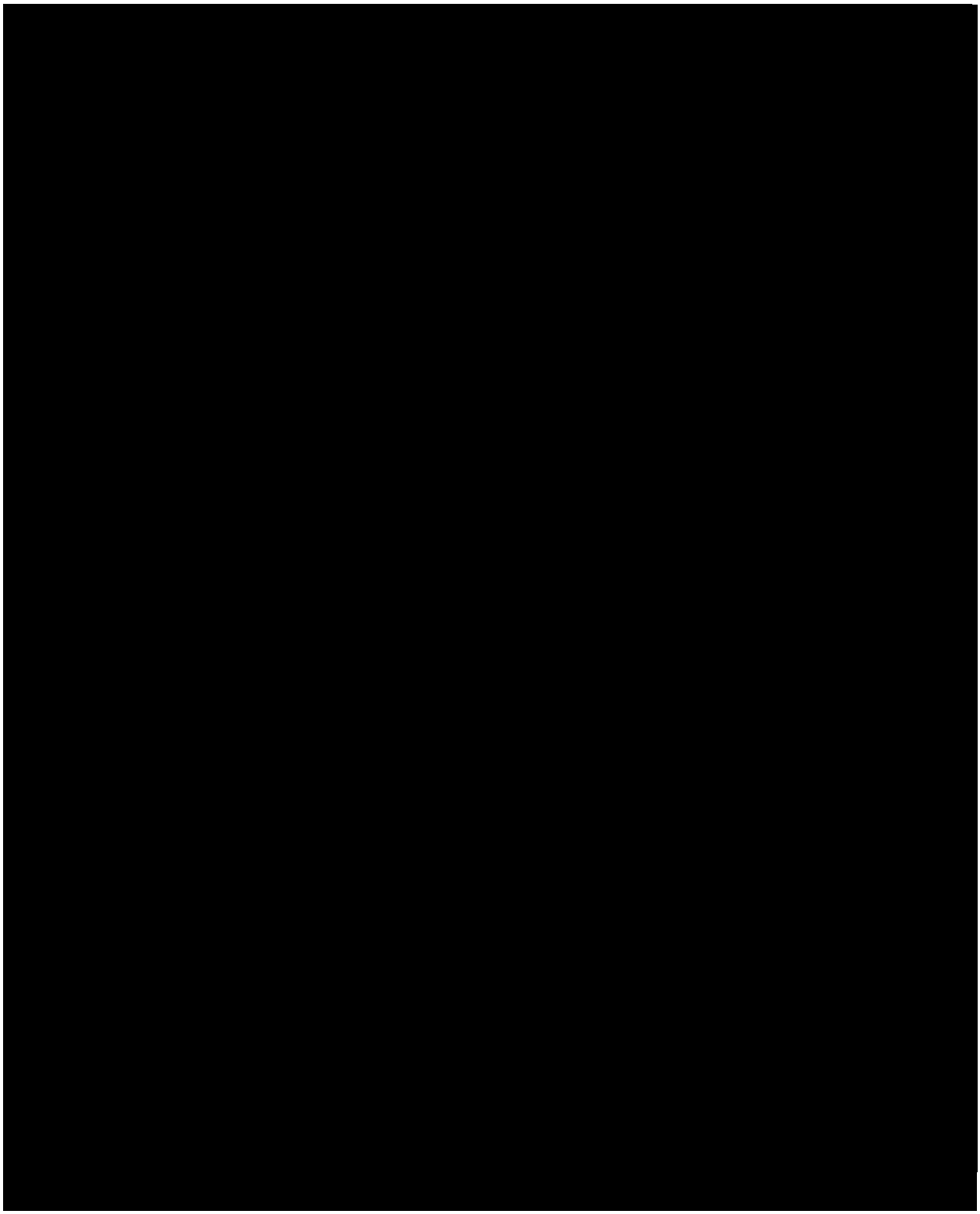
Un **contraejemplo** es un solo ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una generalización.

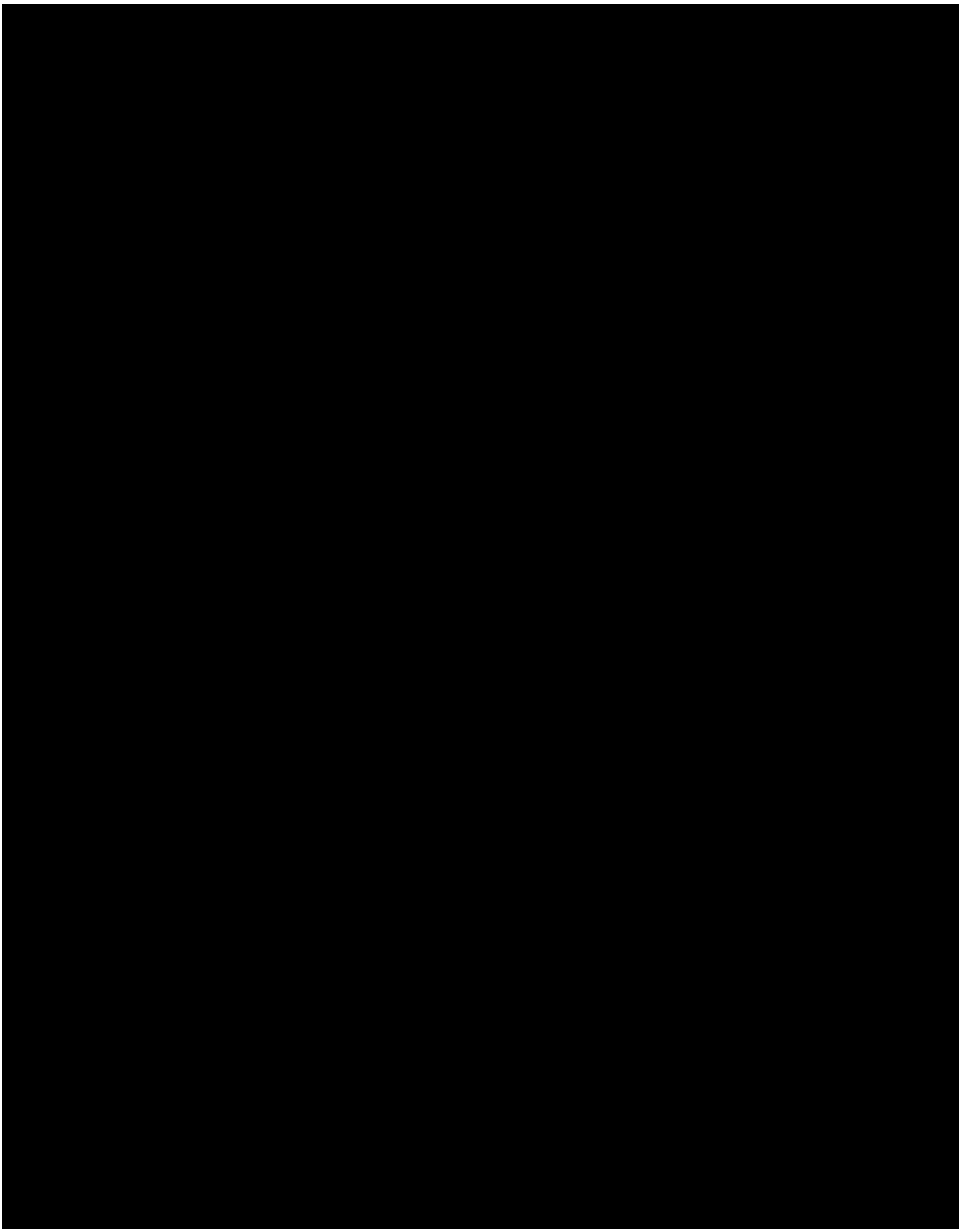
Ejemplo 4

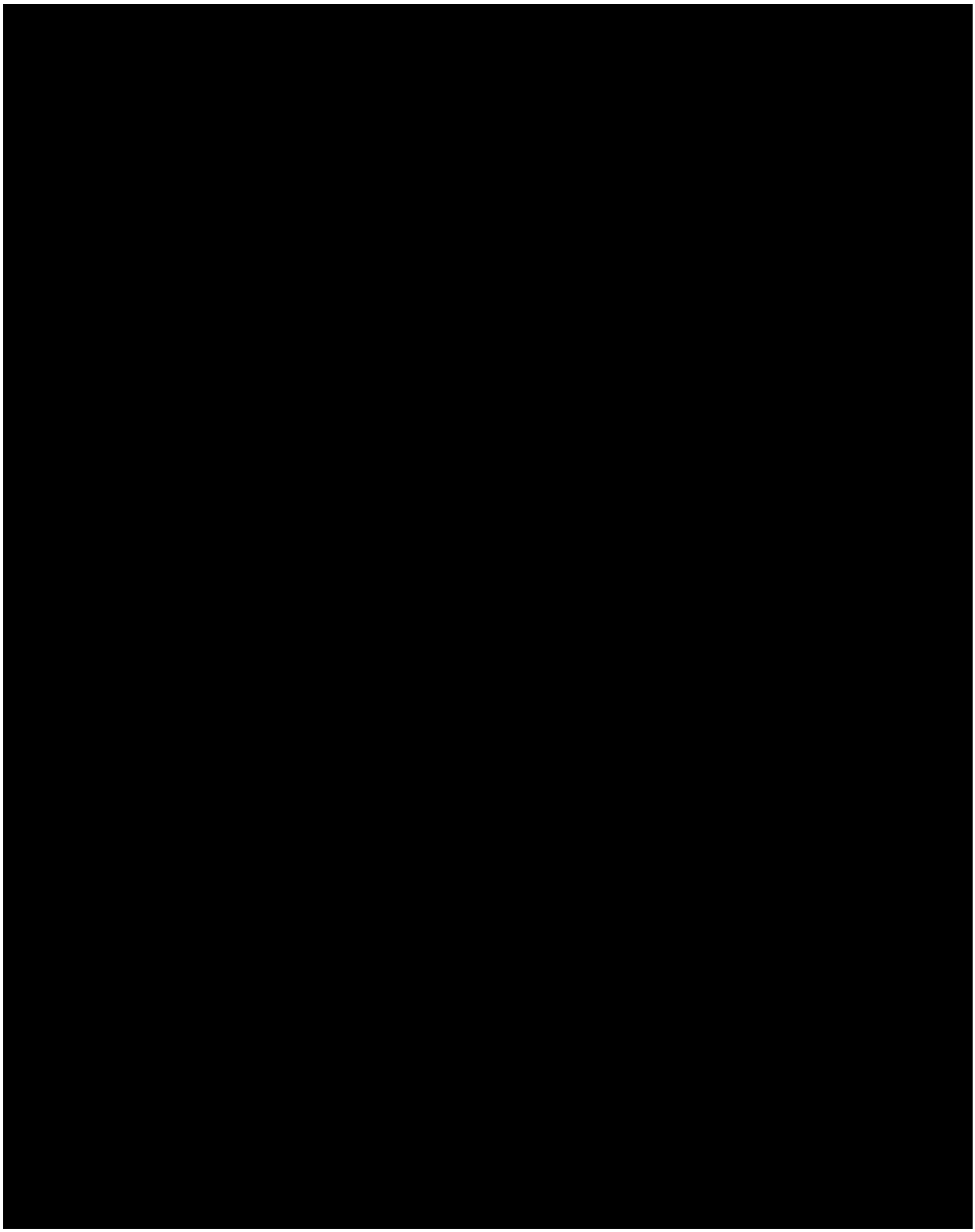
Esta figura es un contraejemplo para la generalización falsa siguiente.

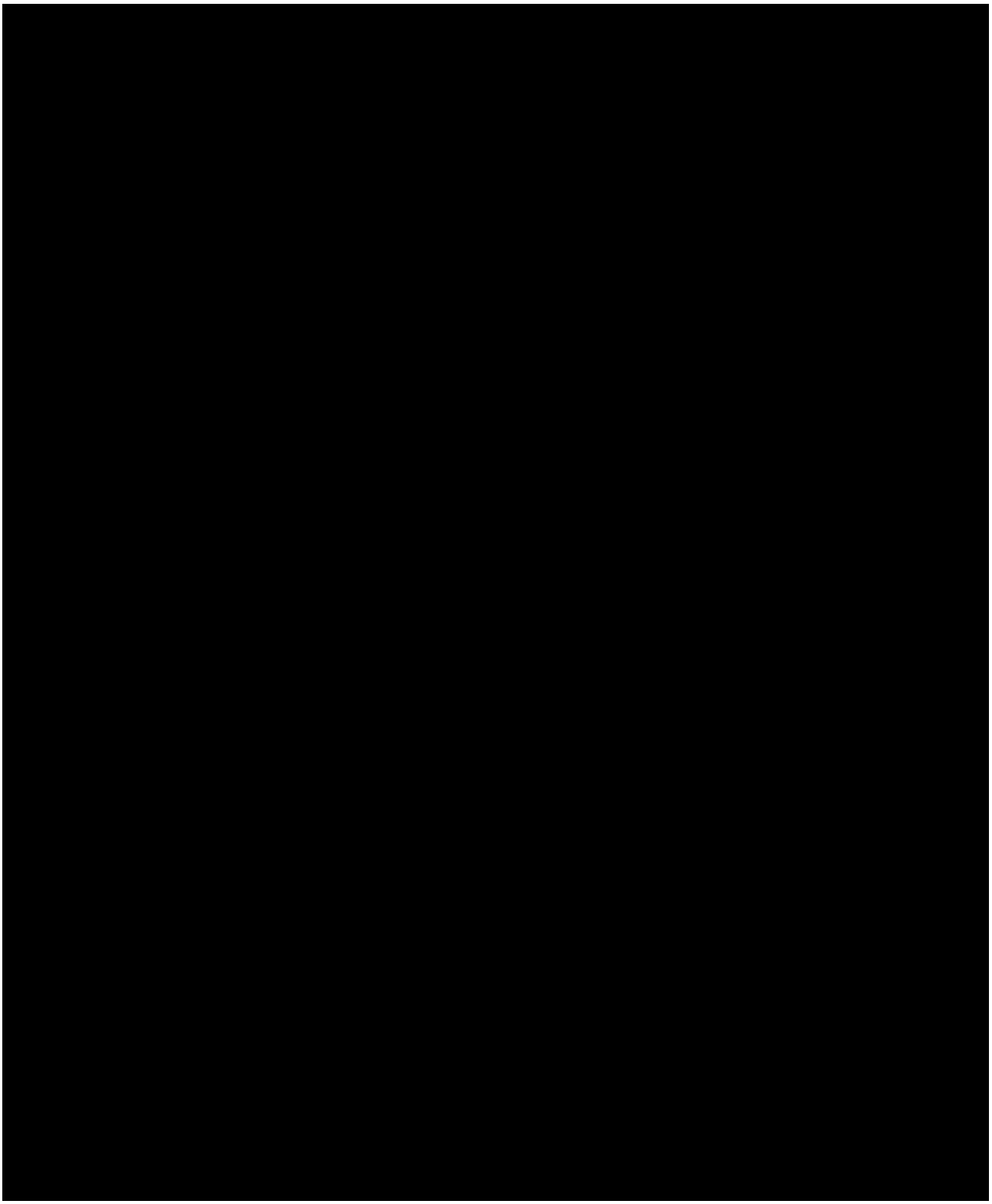
Si dos rectas se intersecan, entonces forman ángulos rectos.

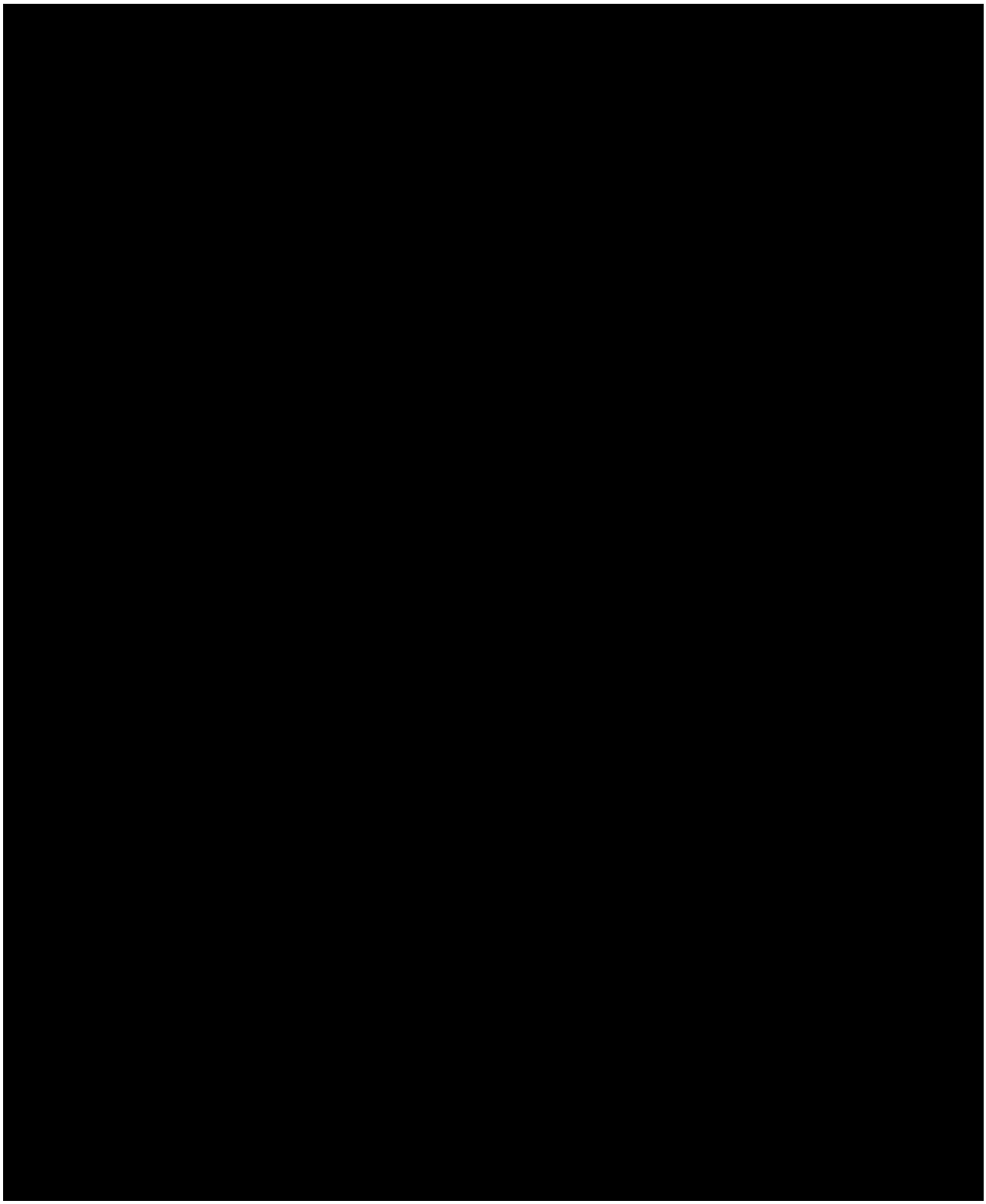


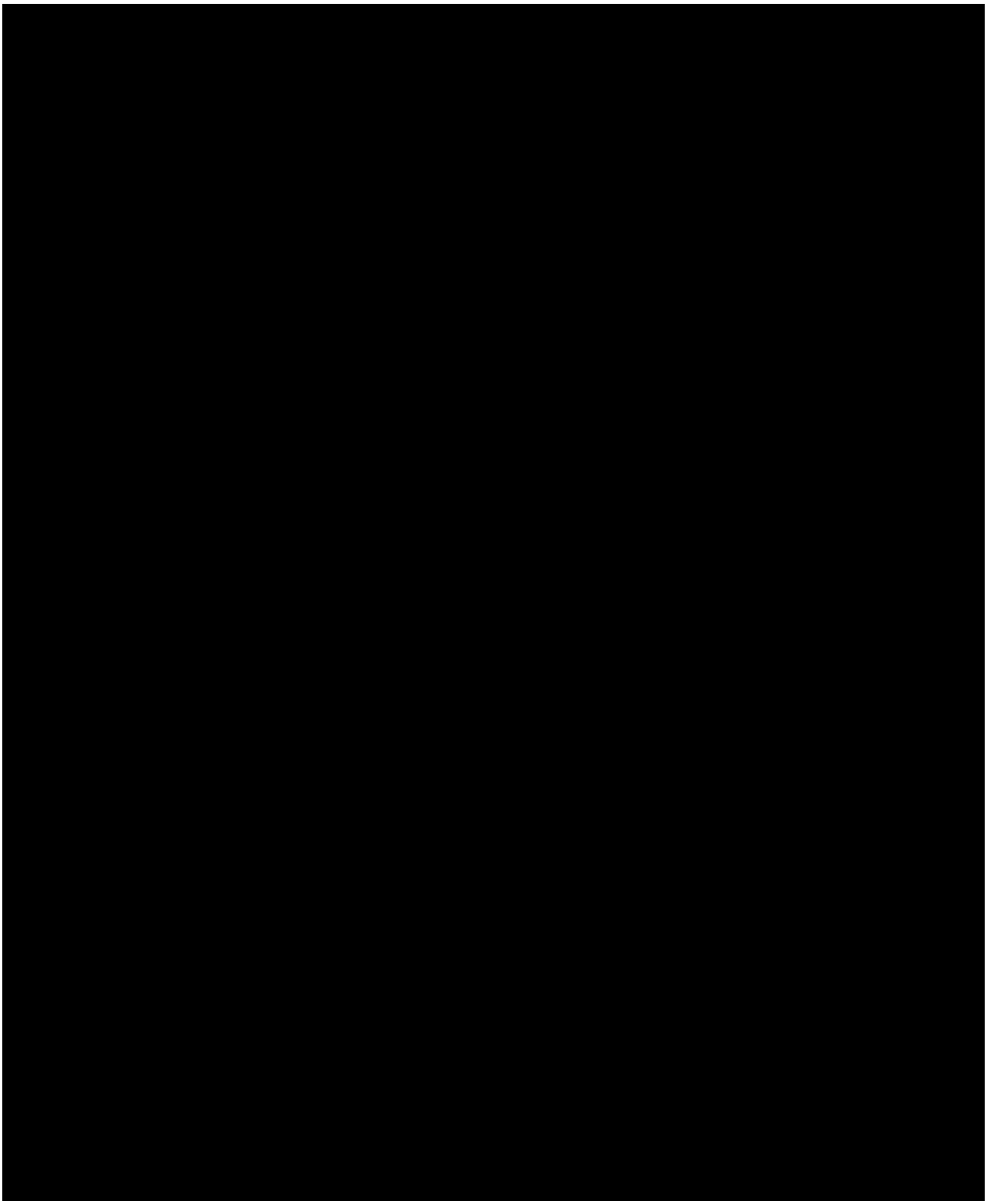


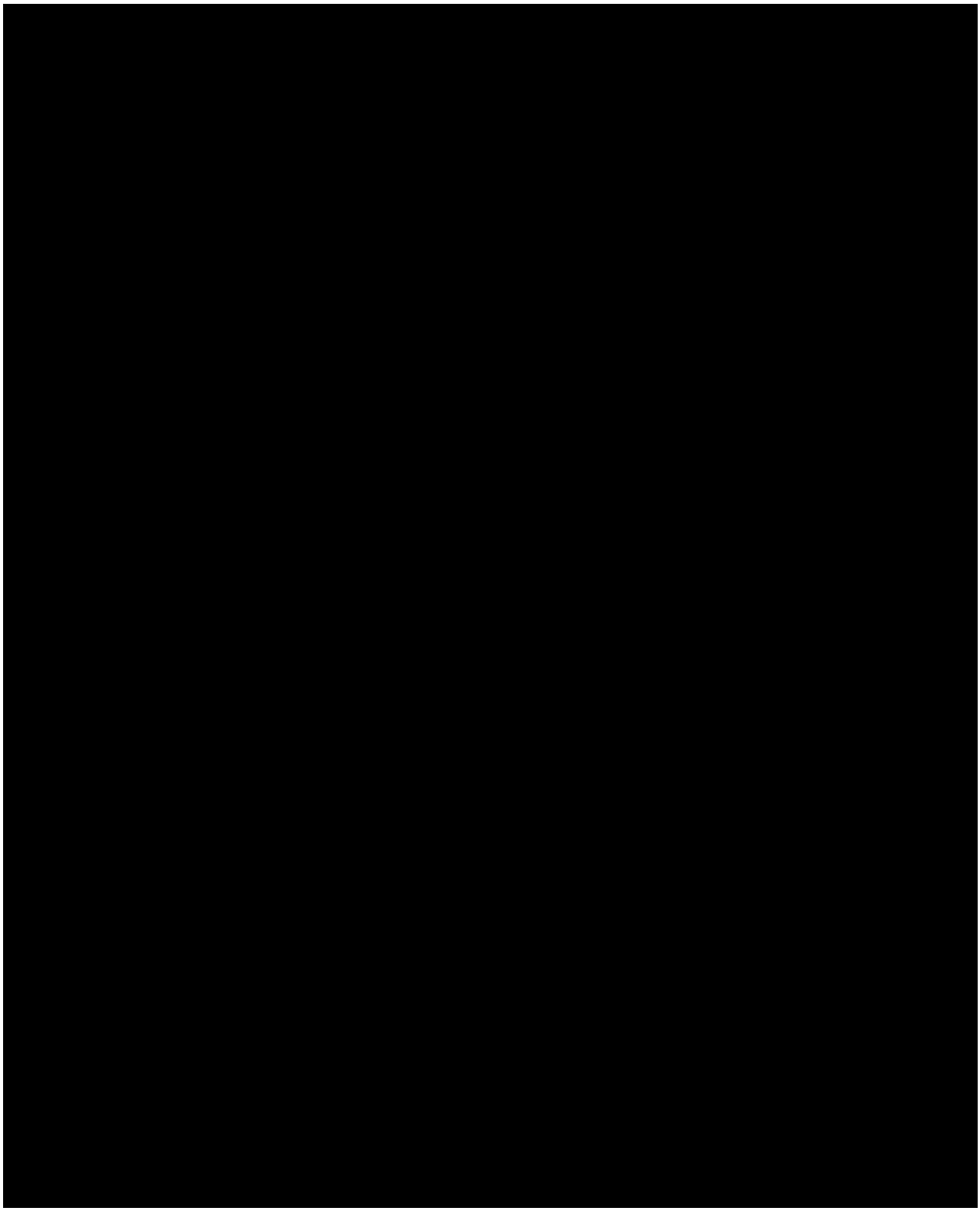


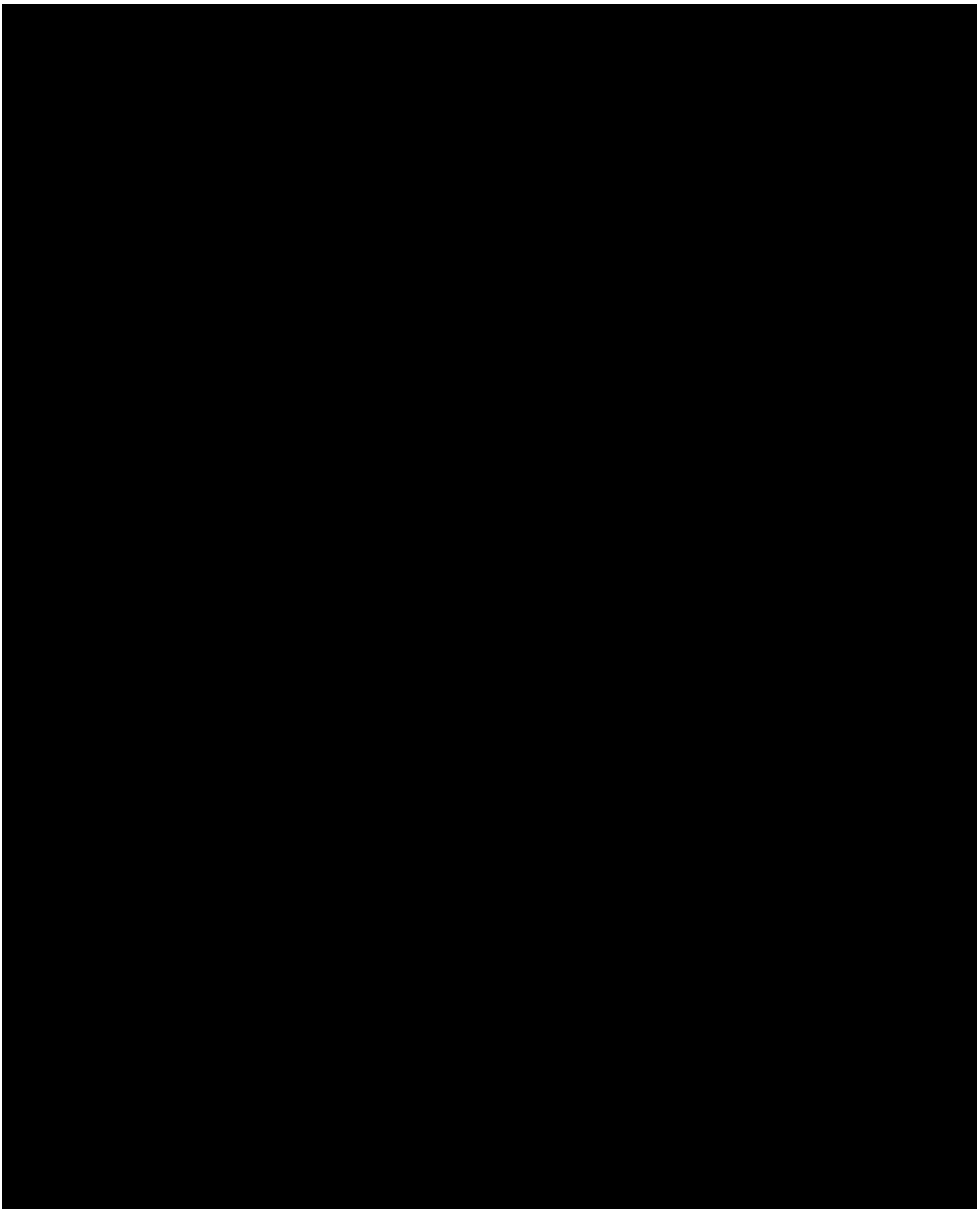


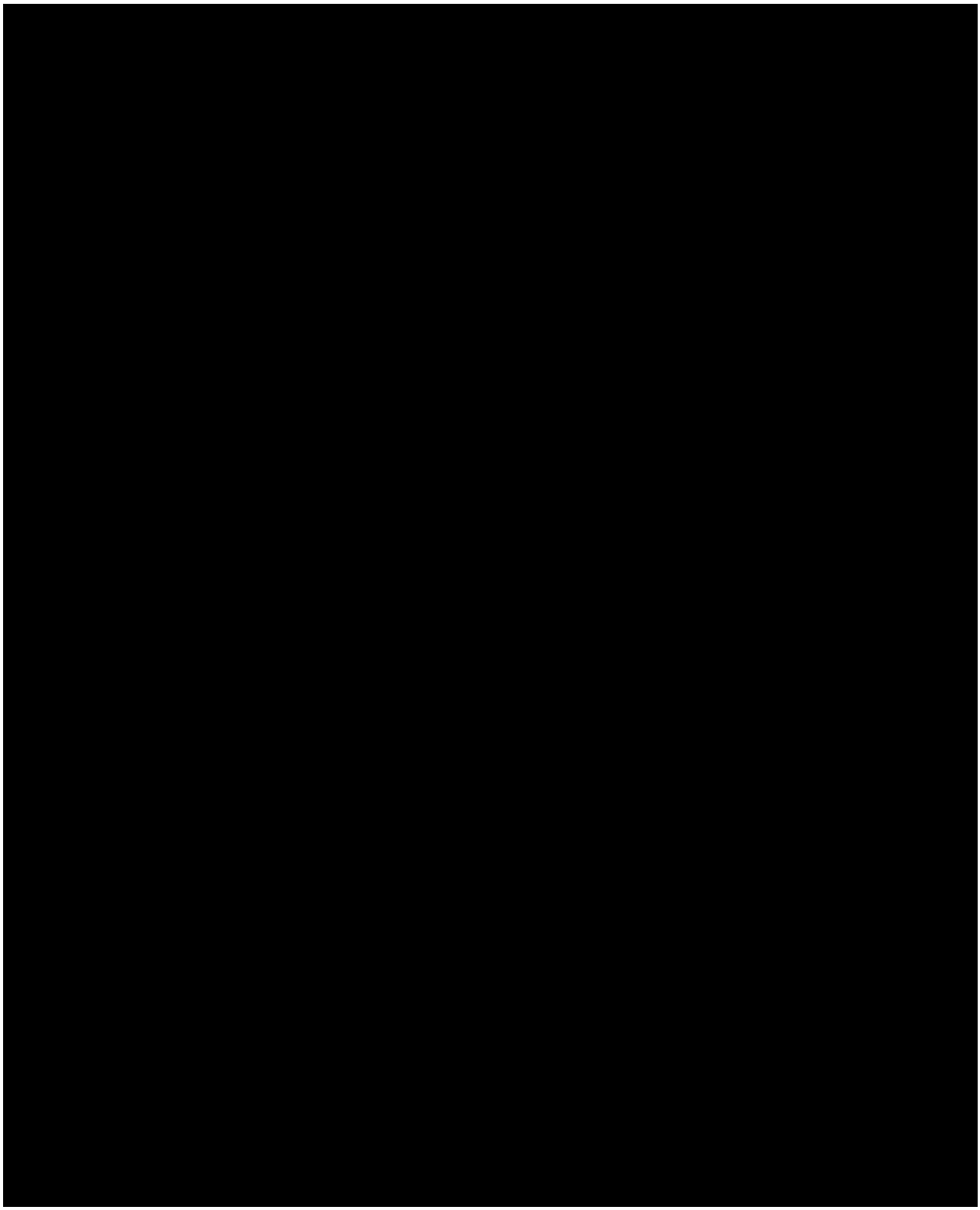


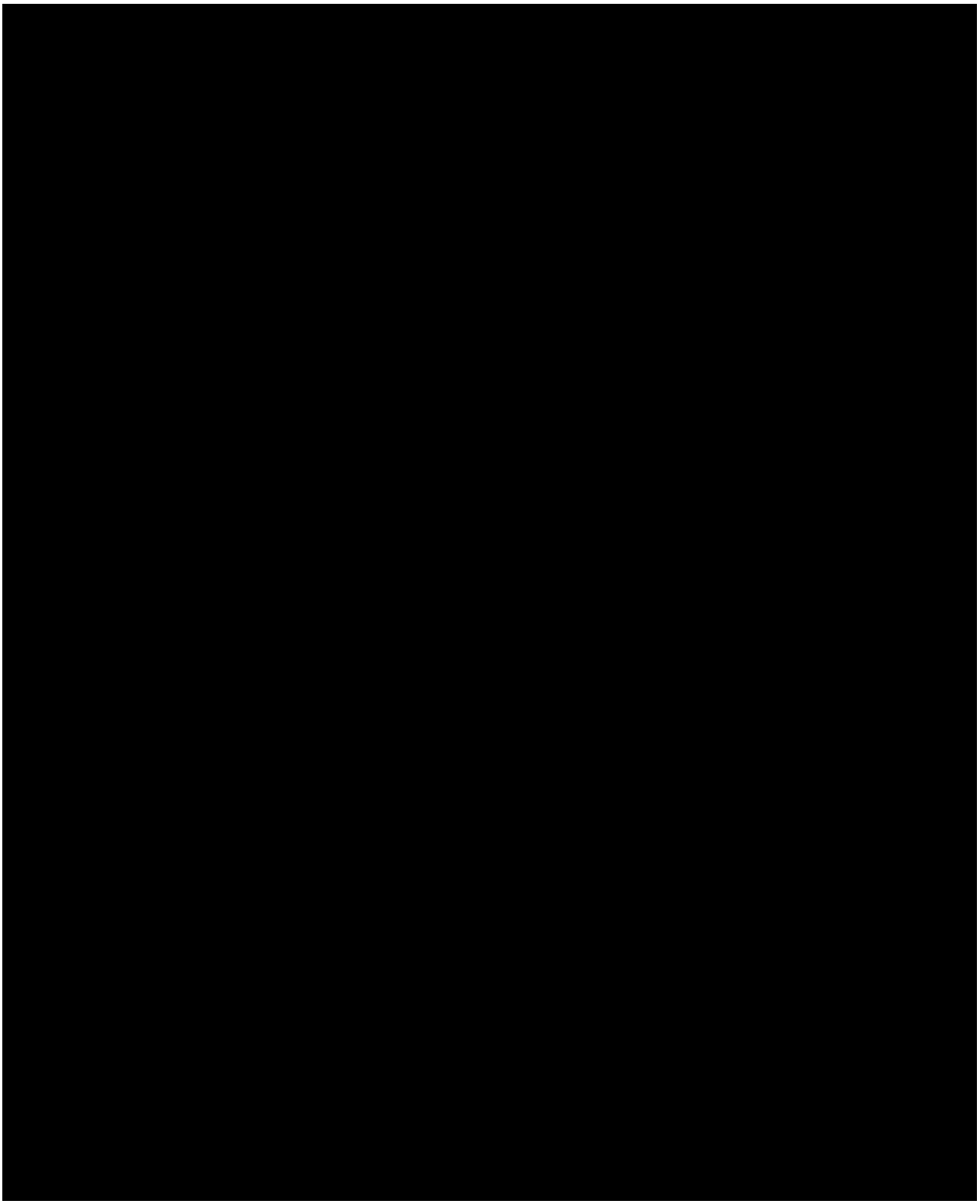


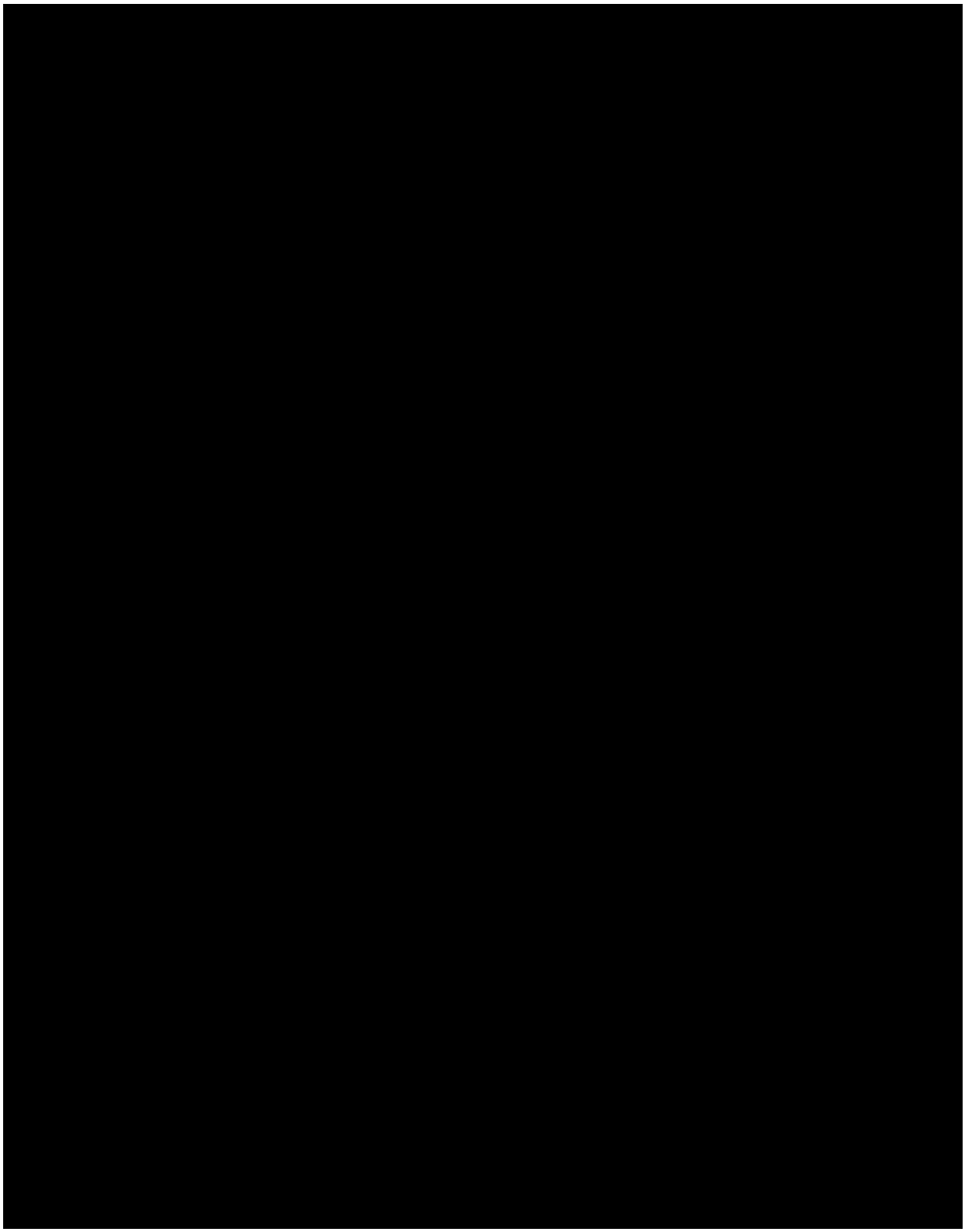


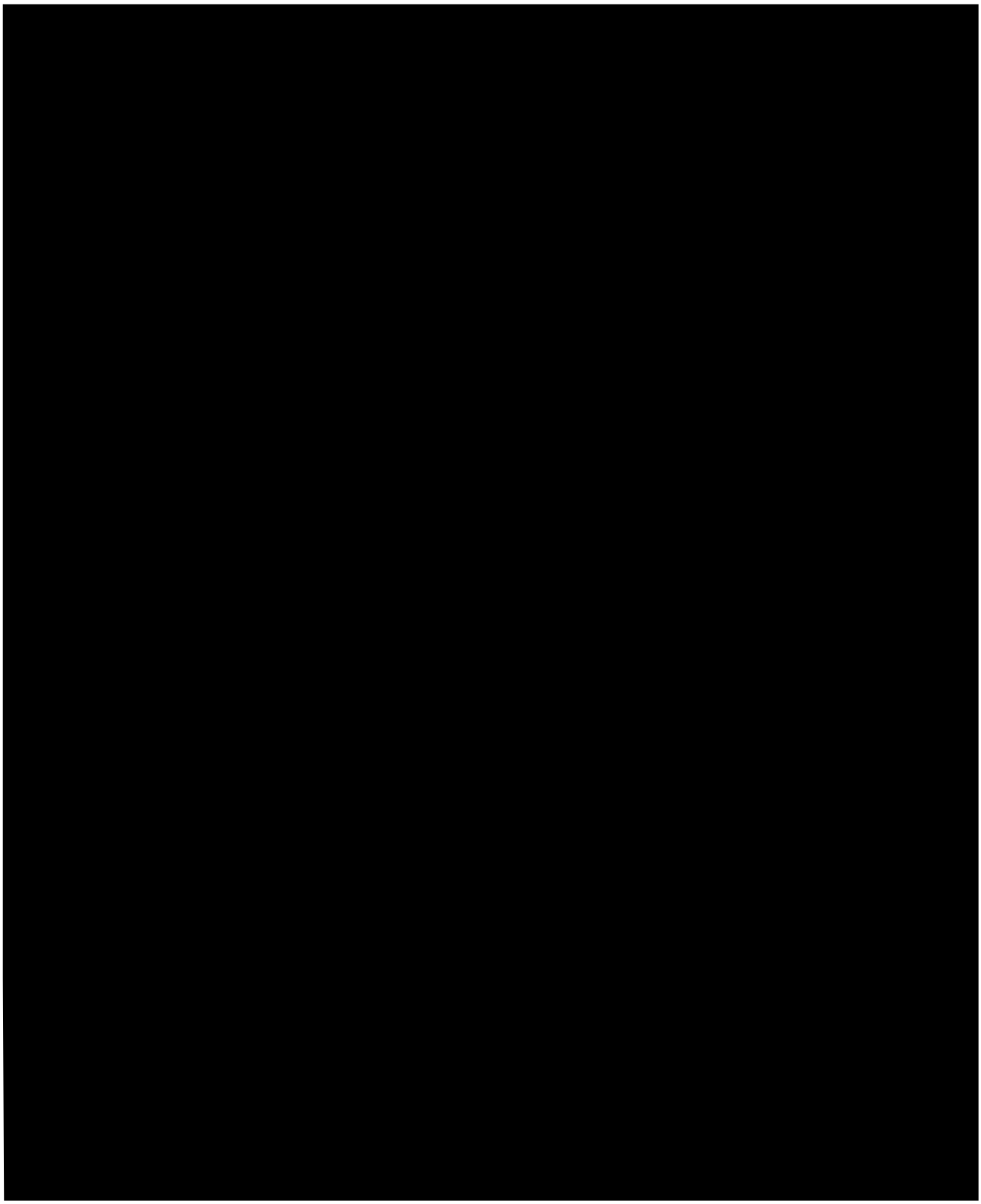


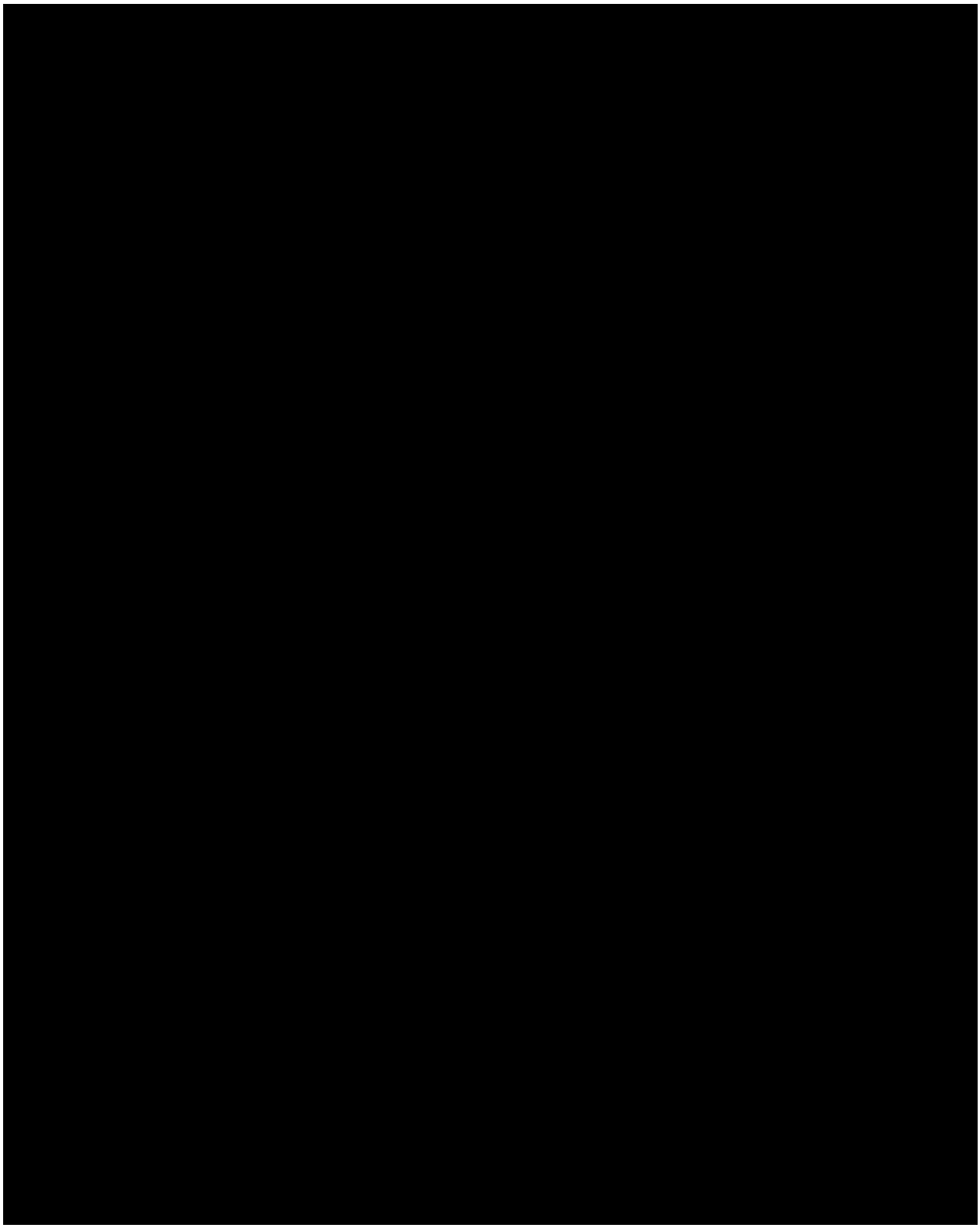


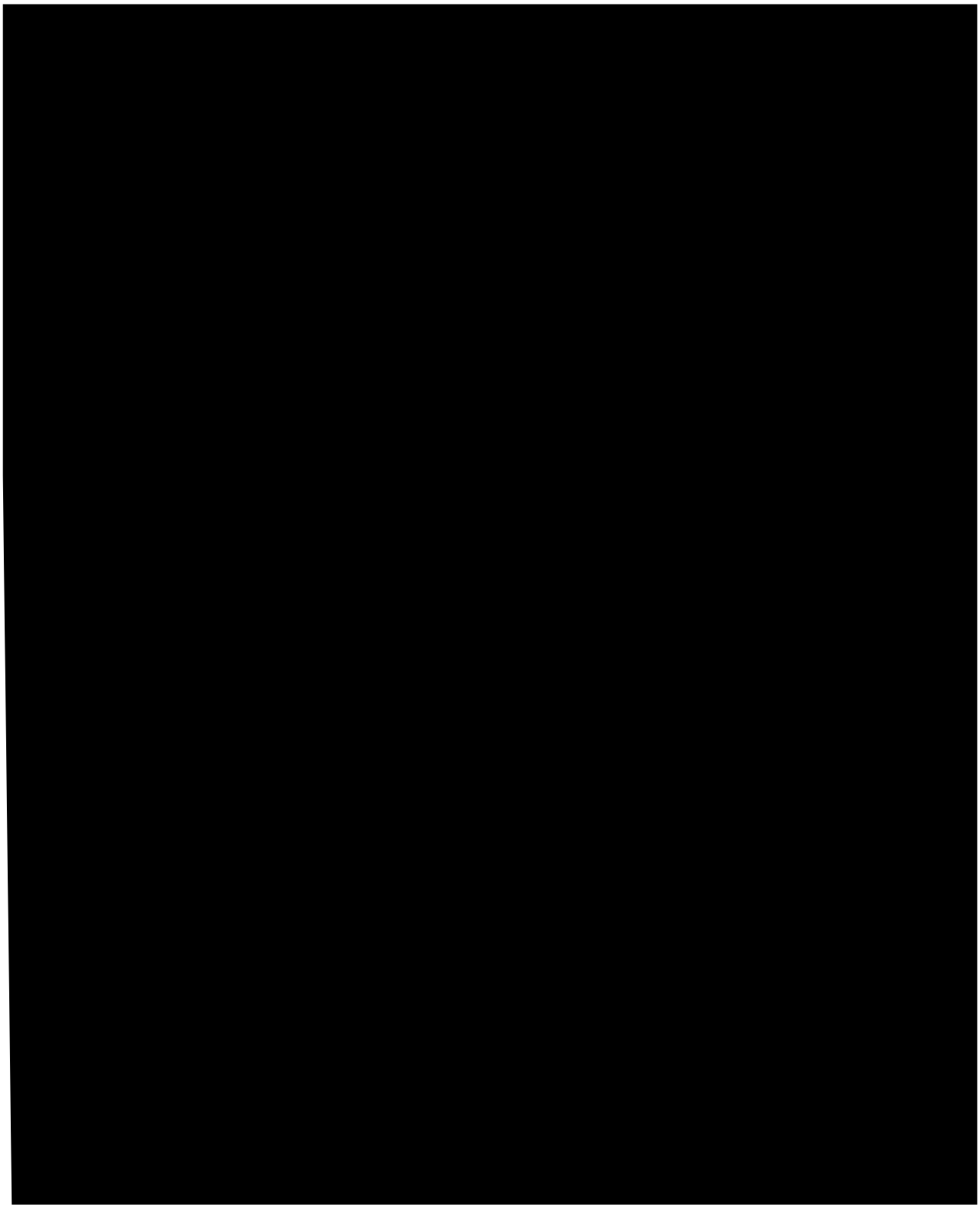


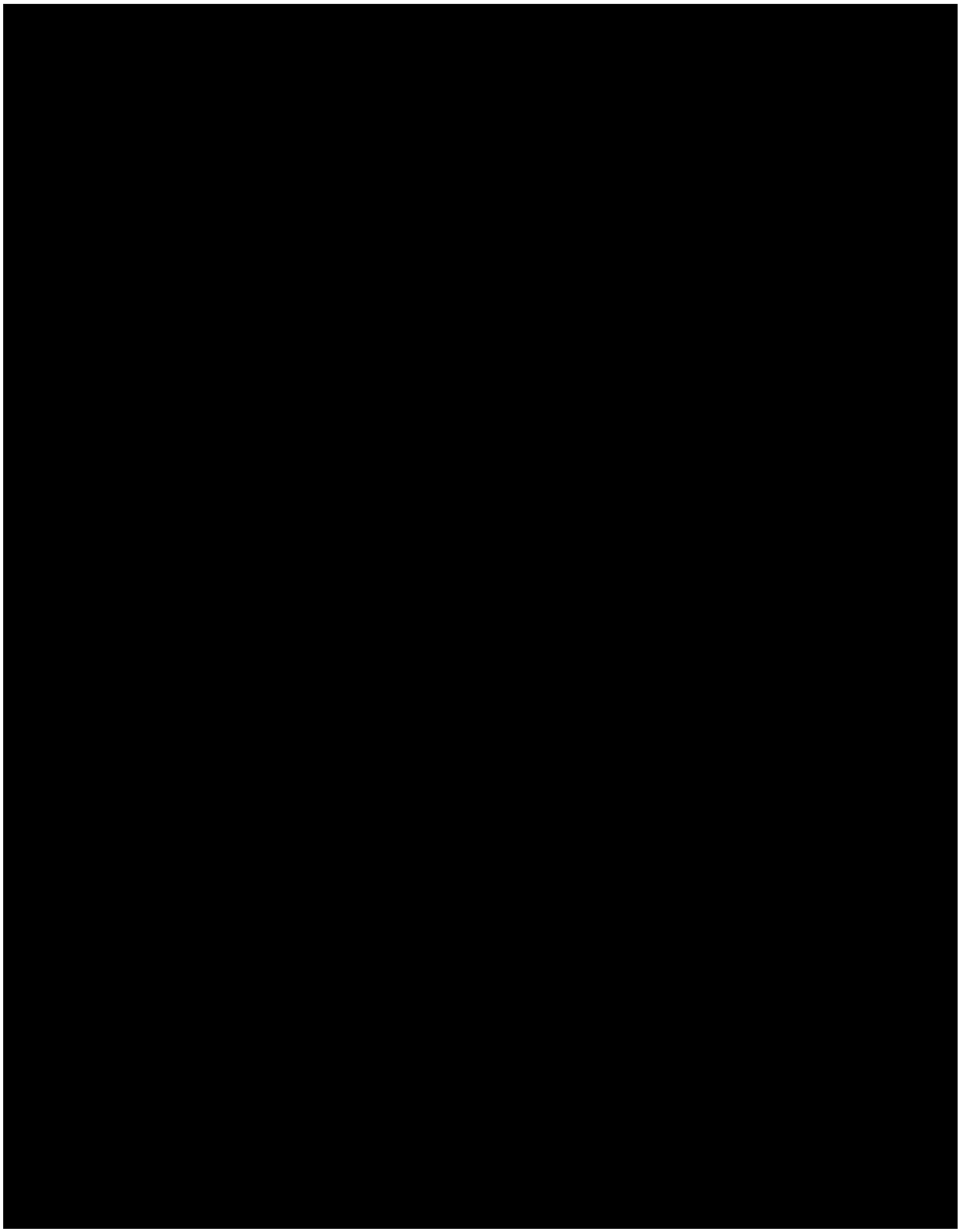


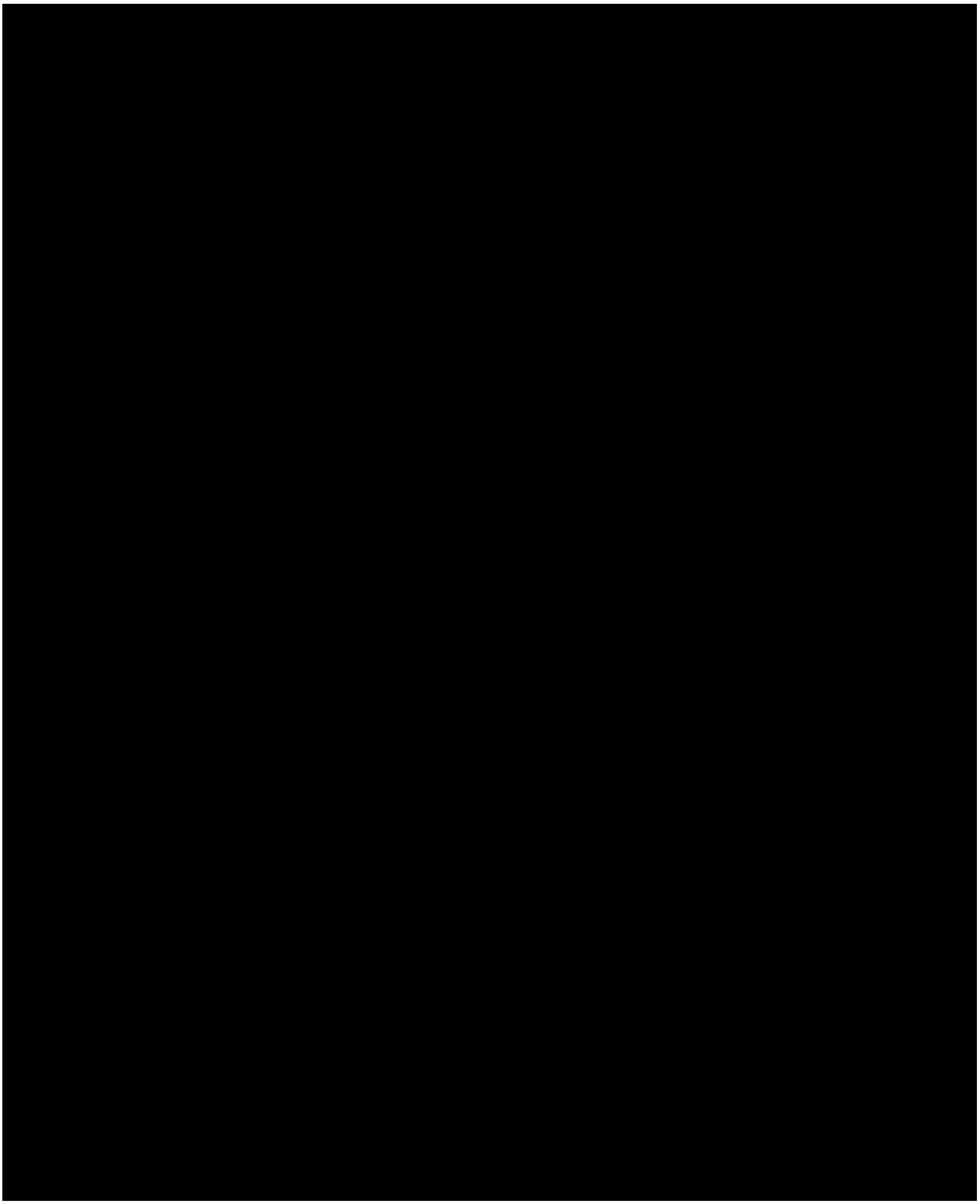


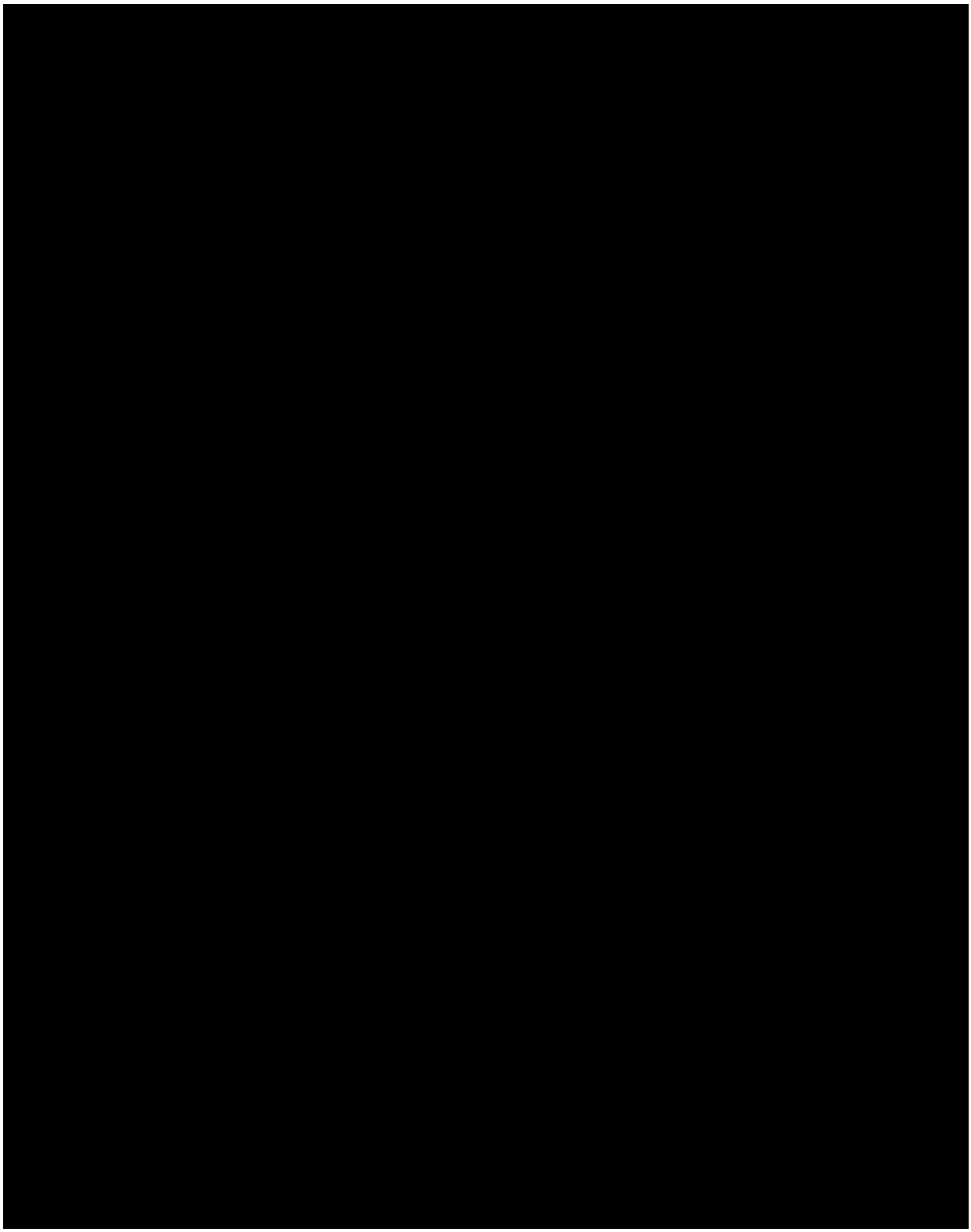


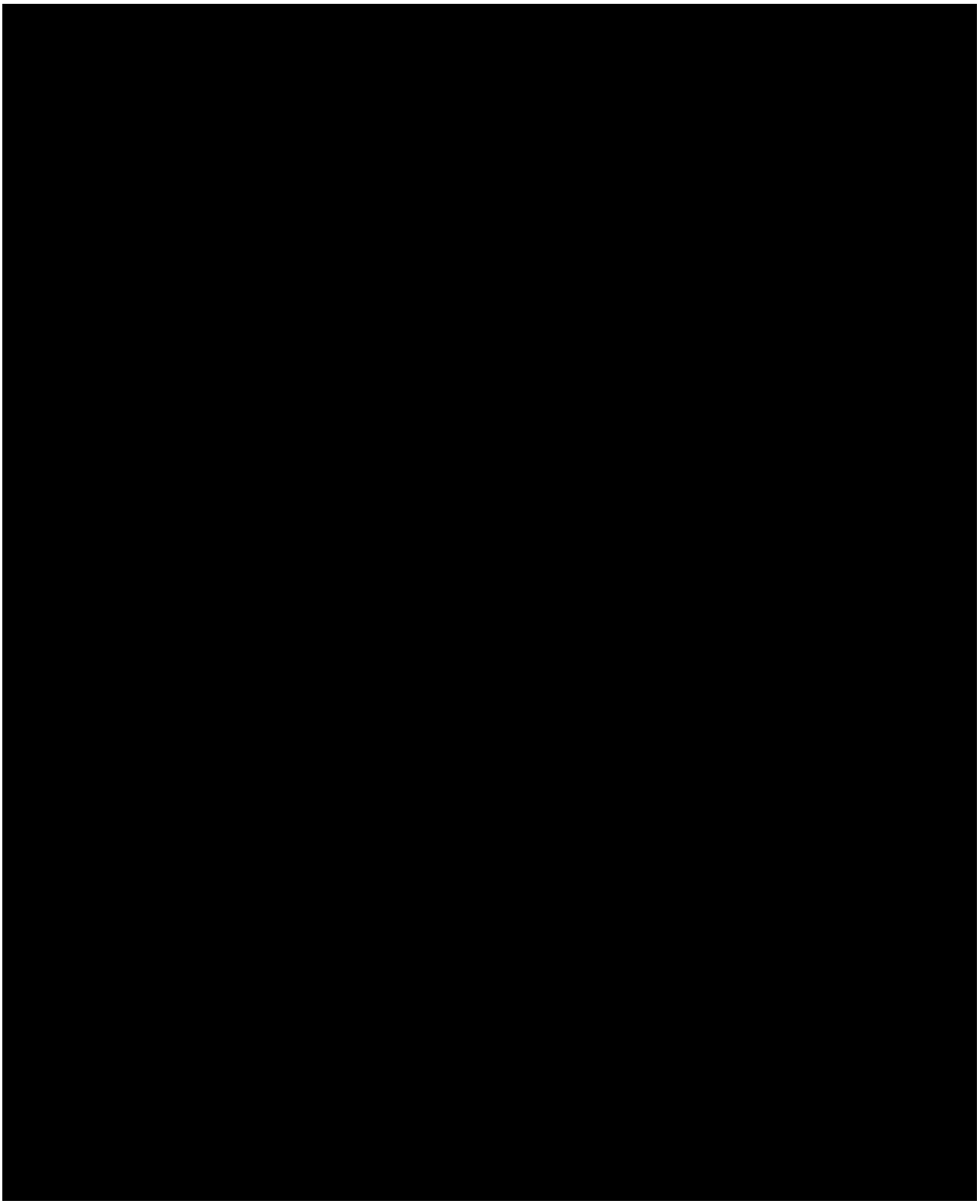


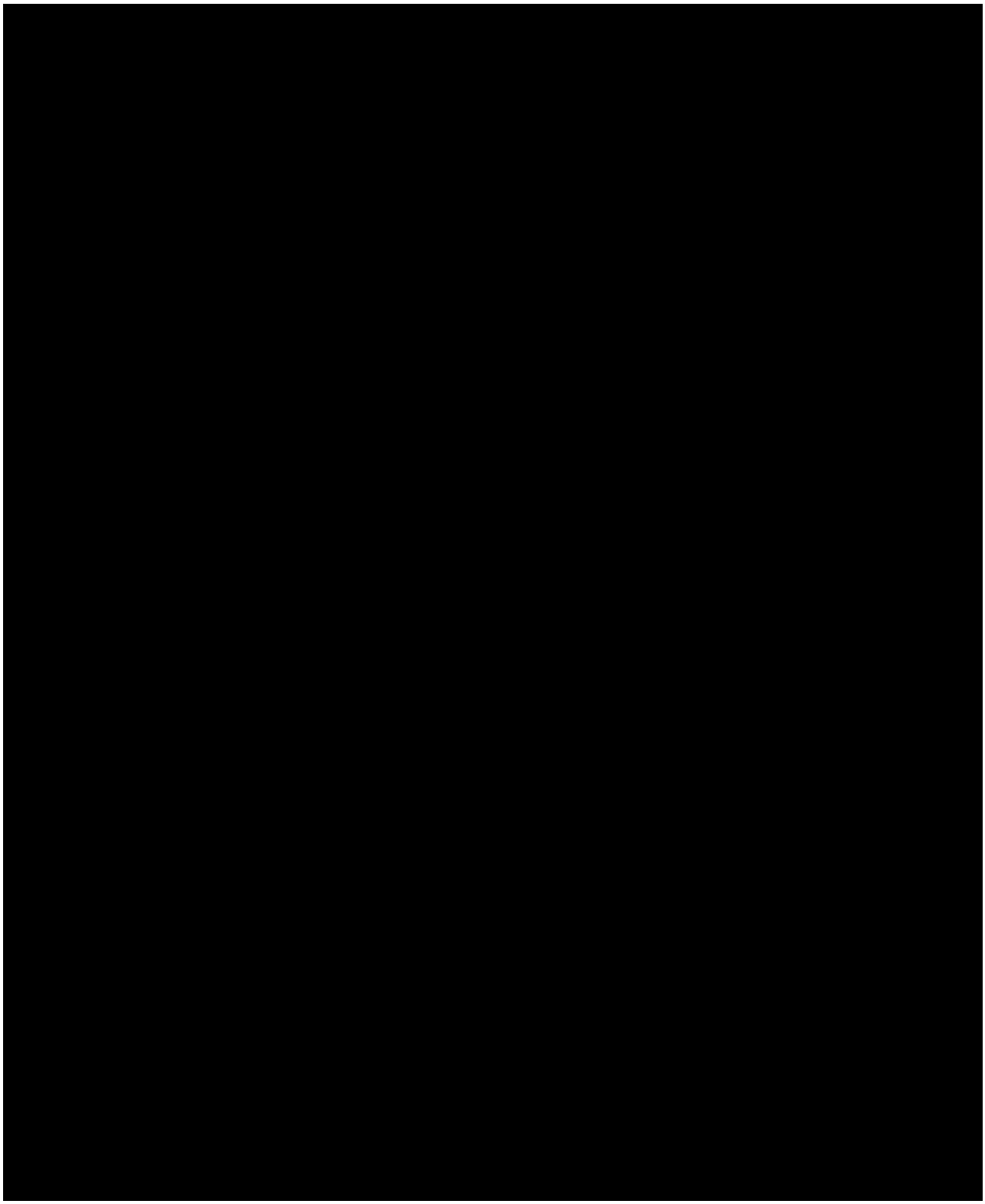


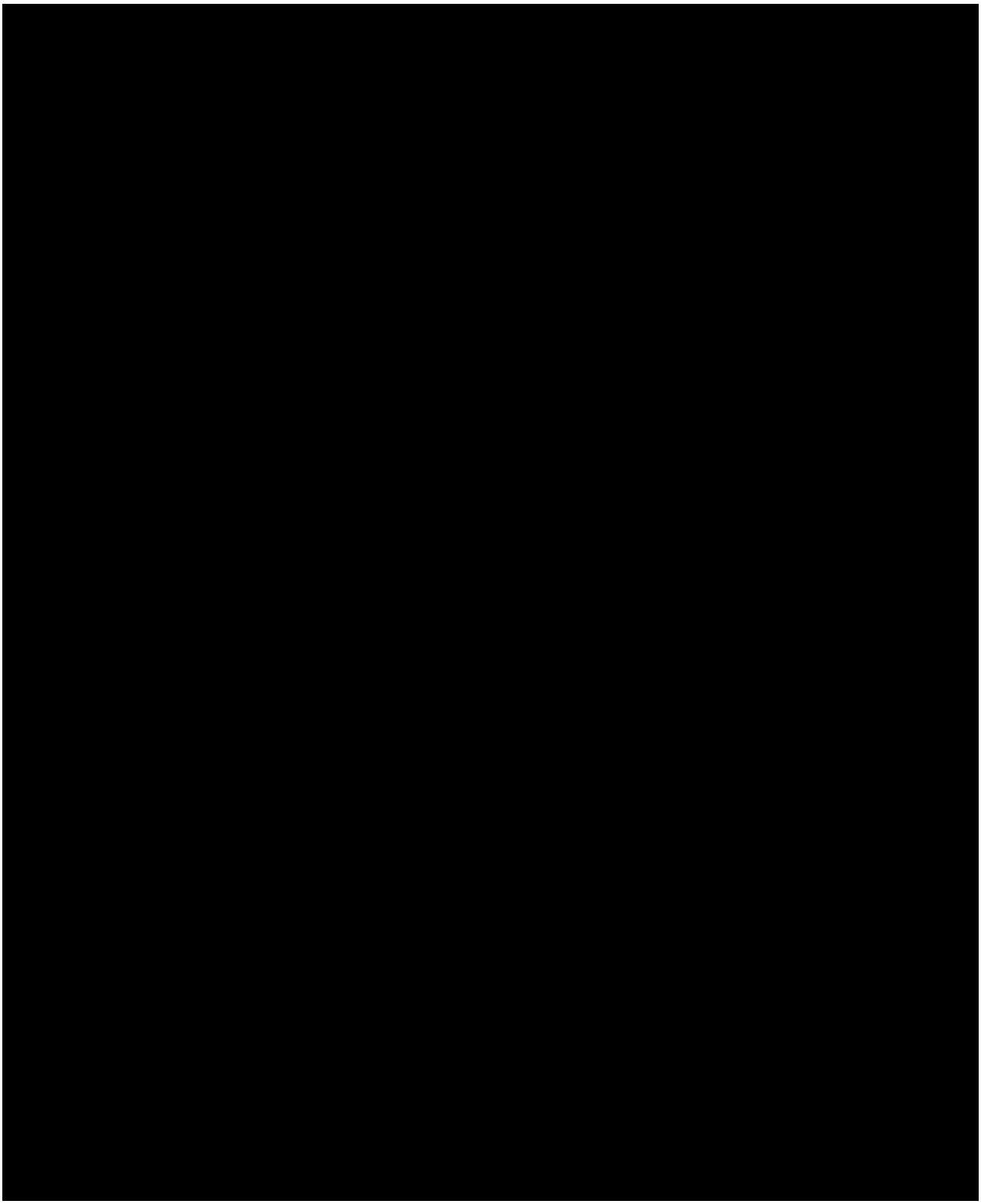


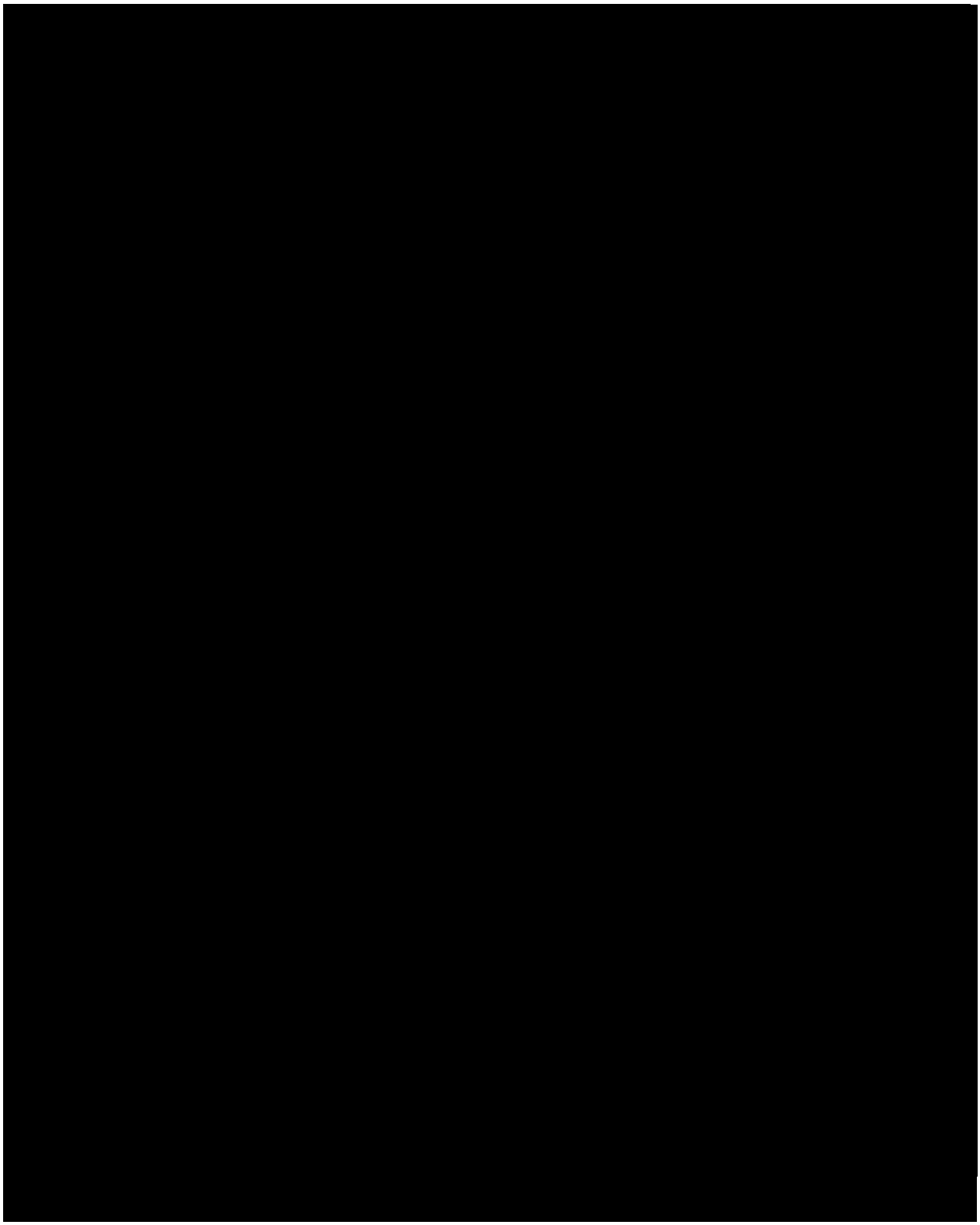


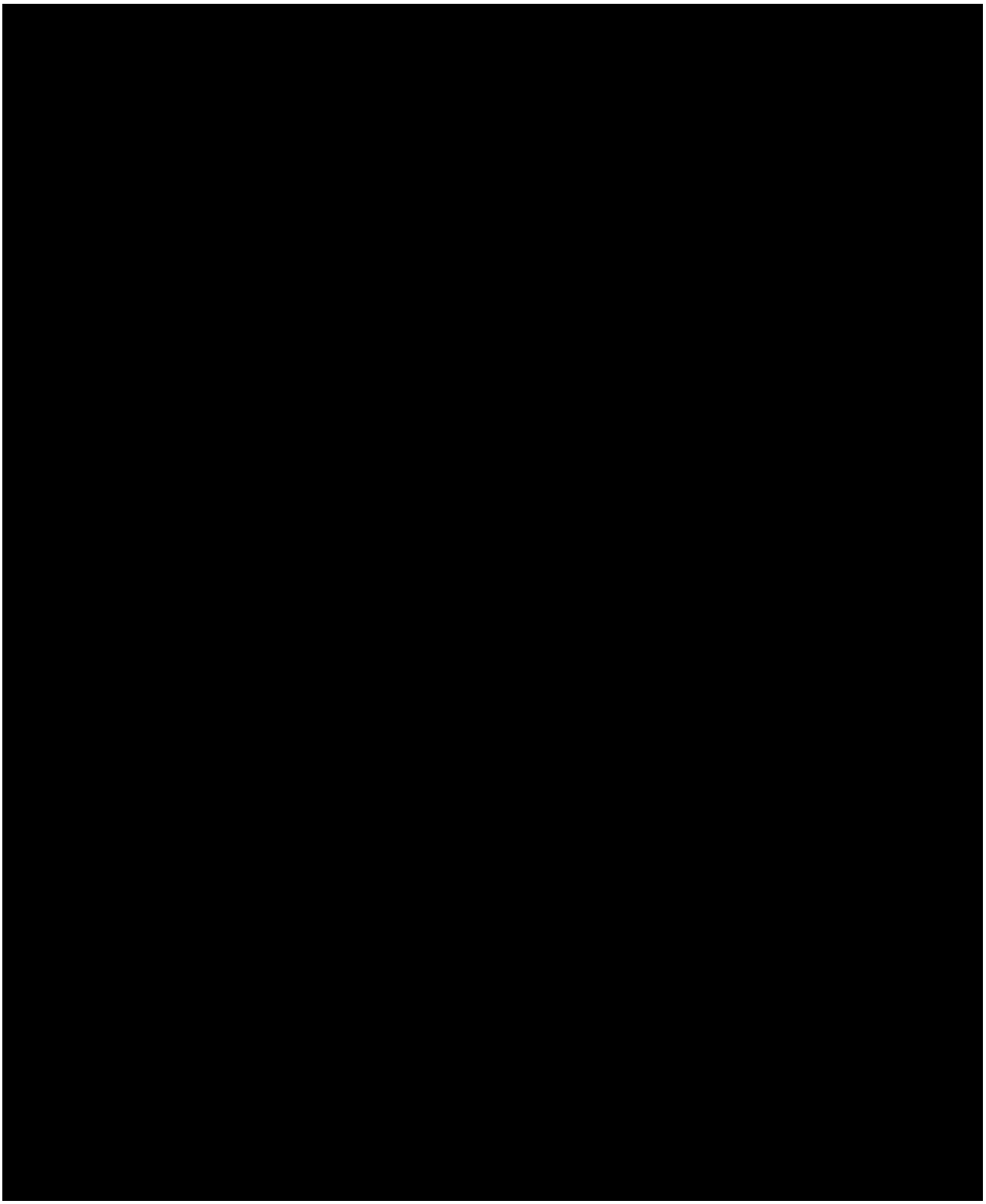


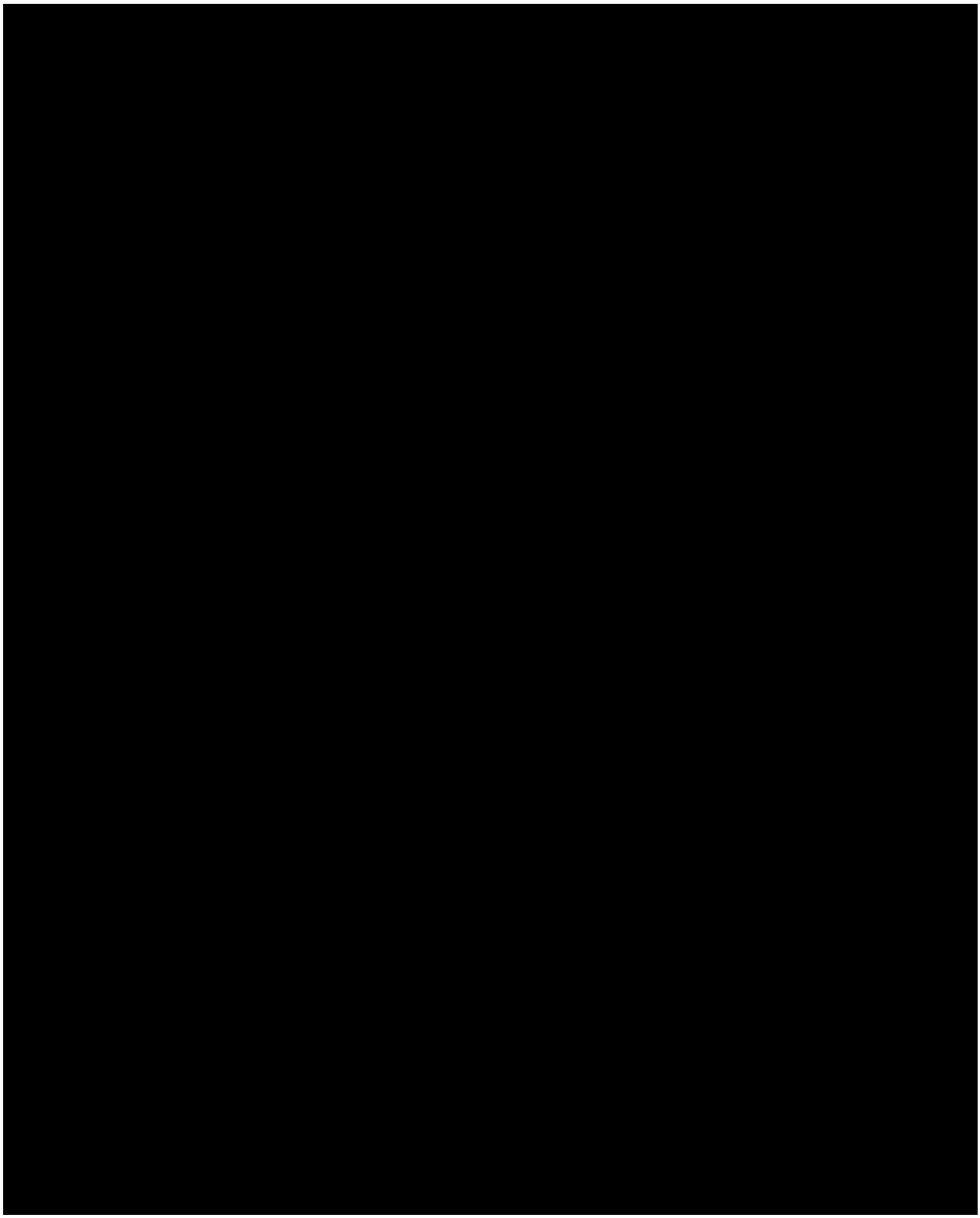


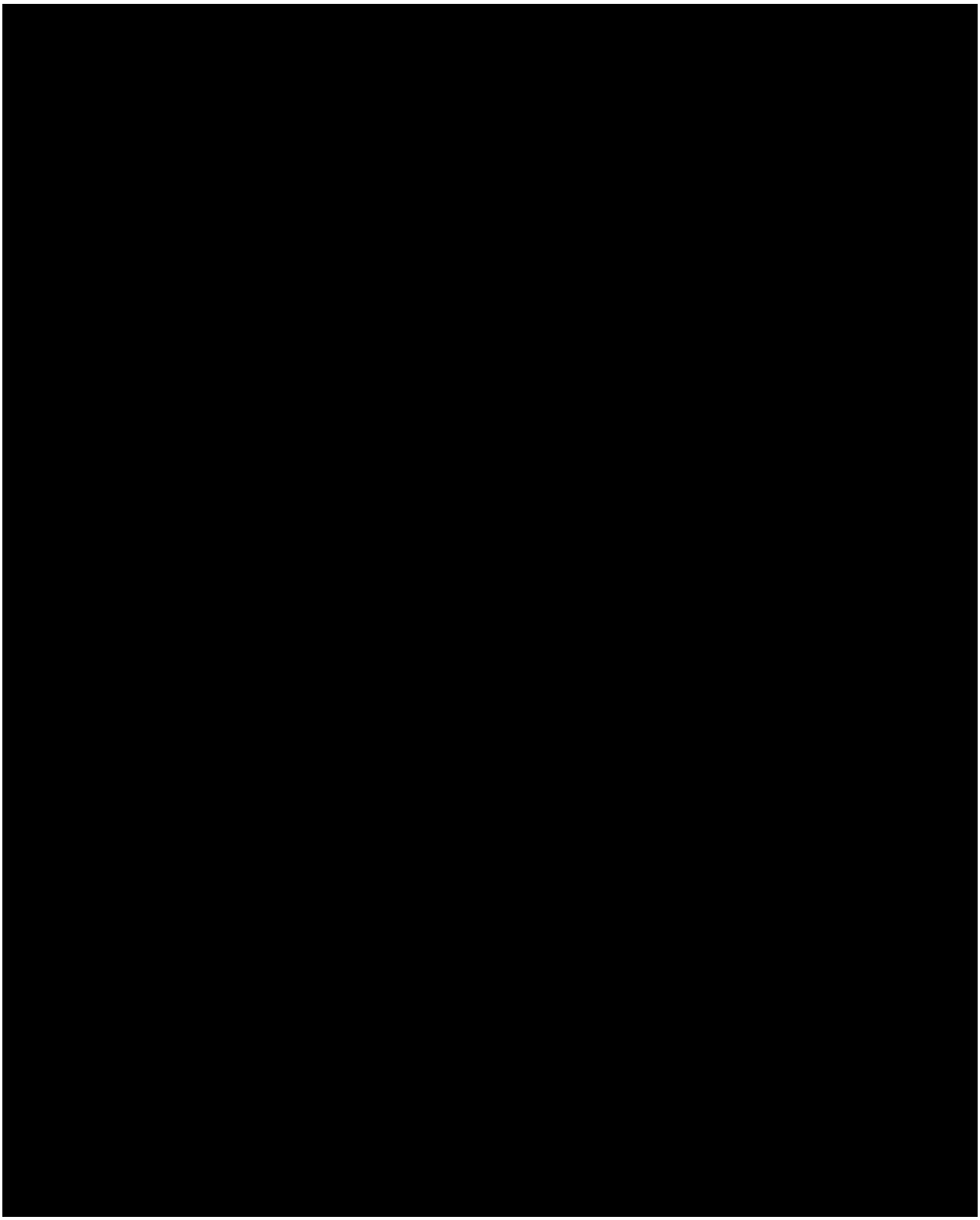


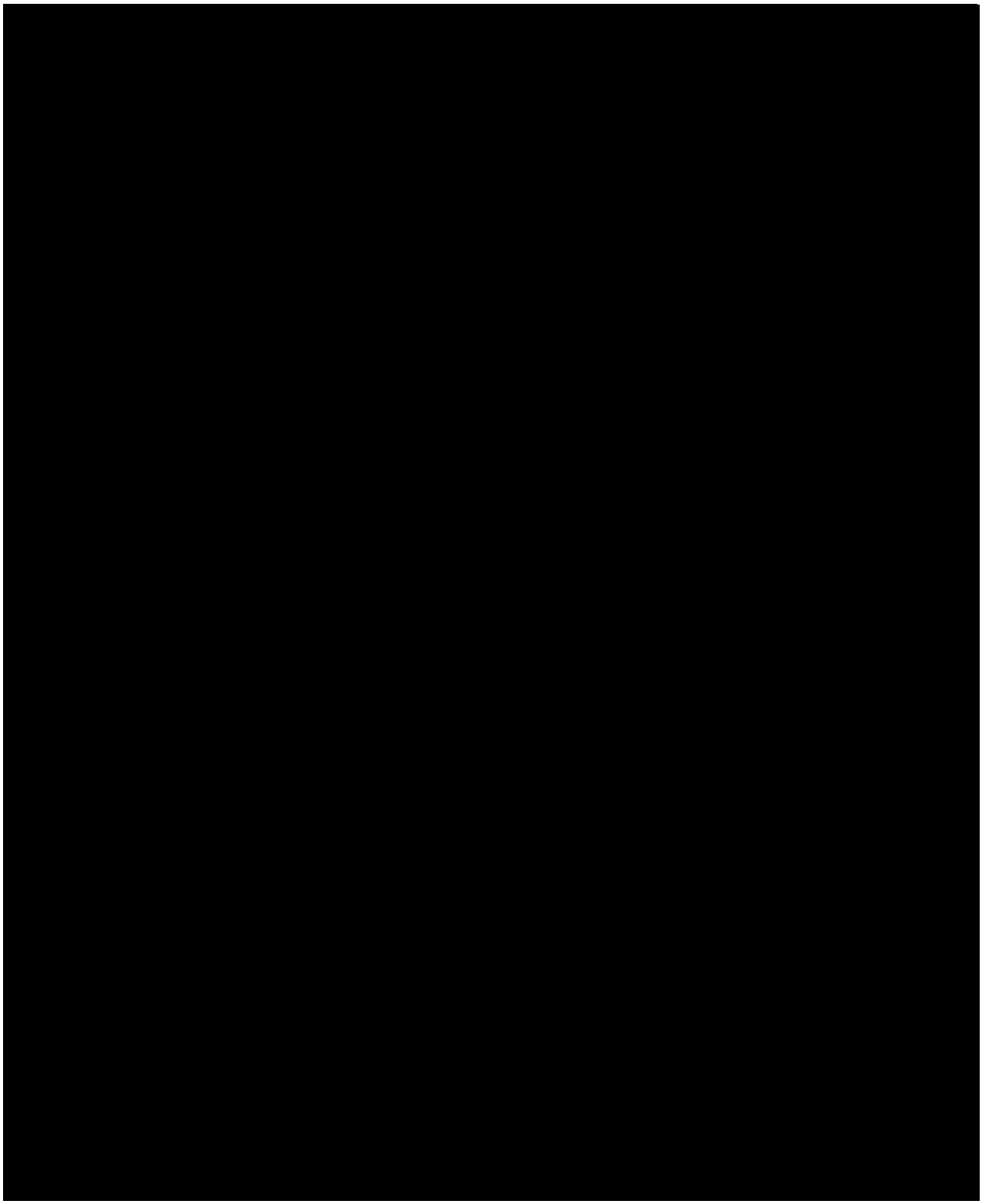


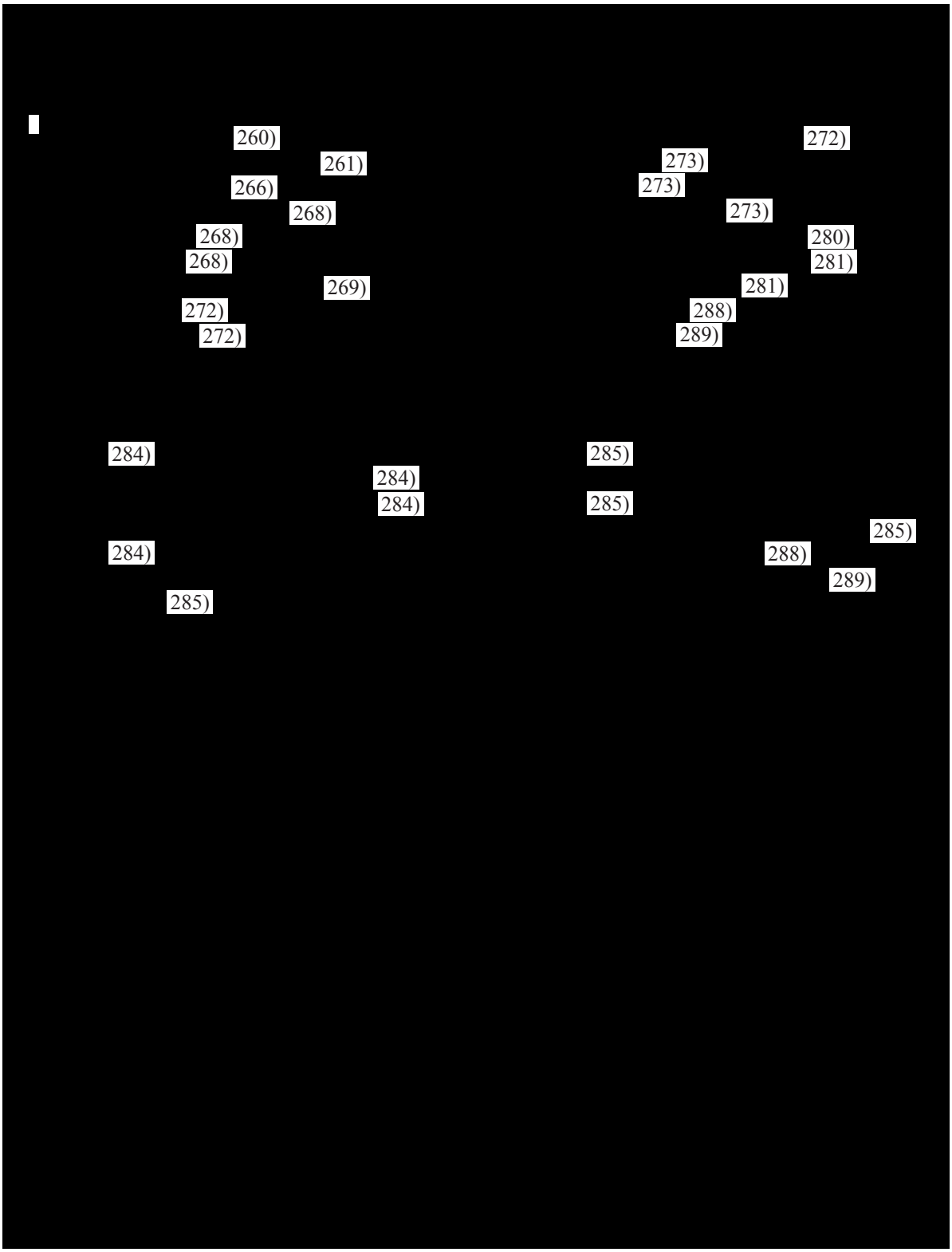


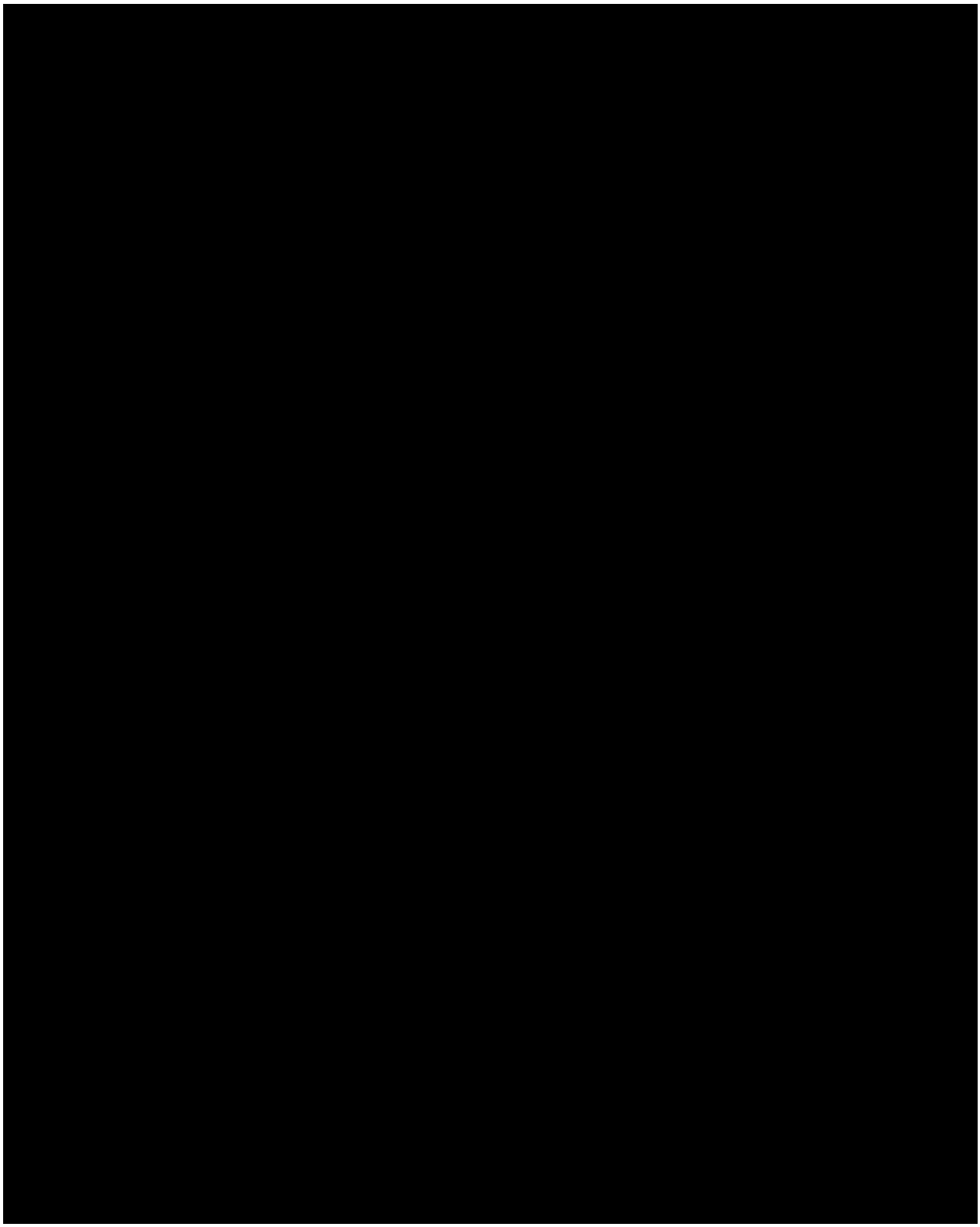


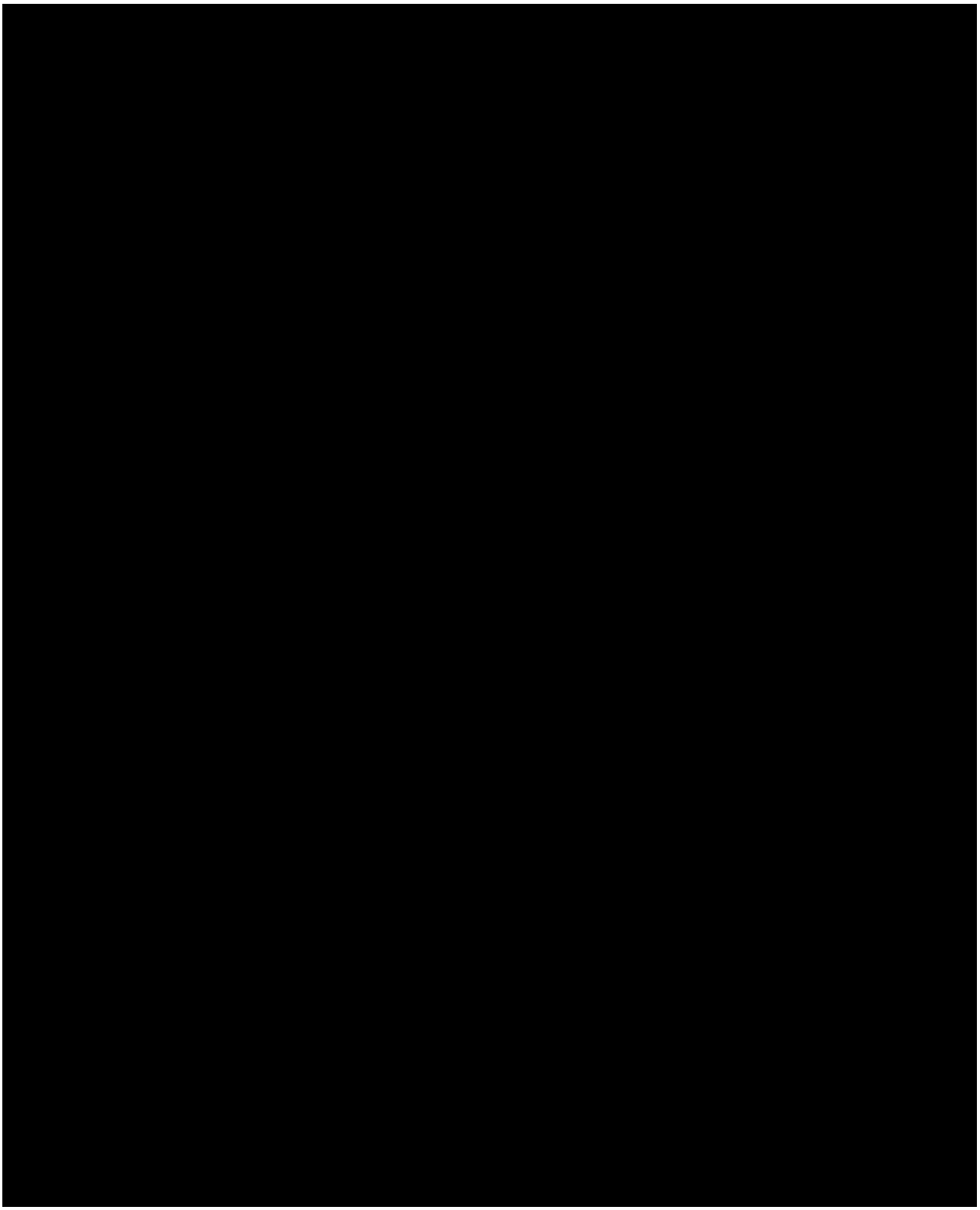


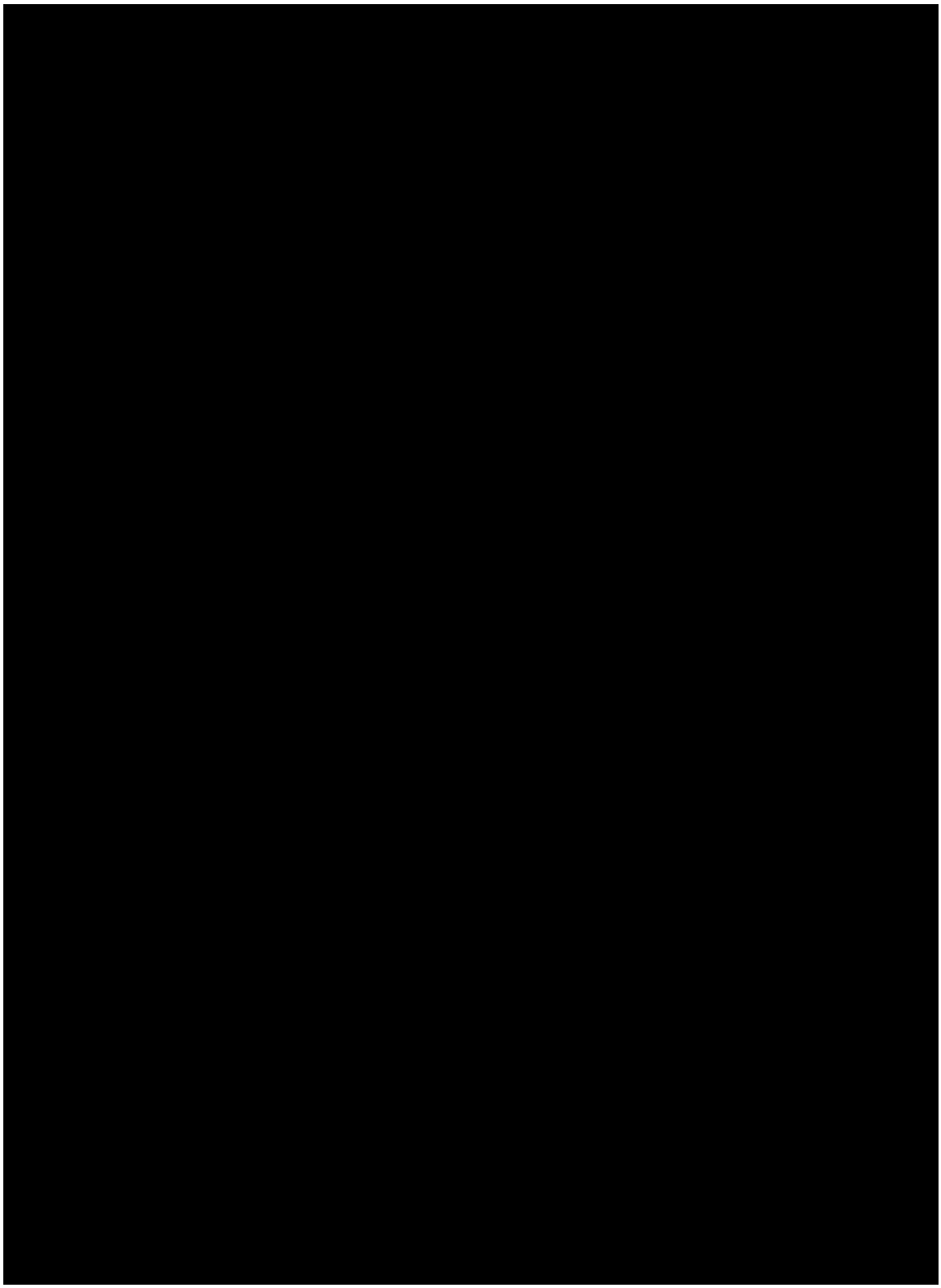


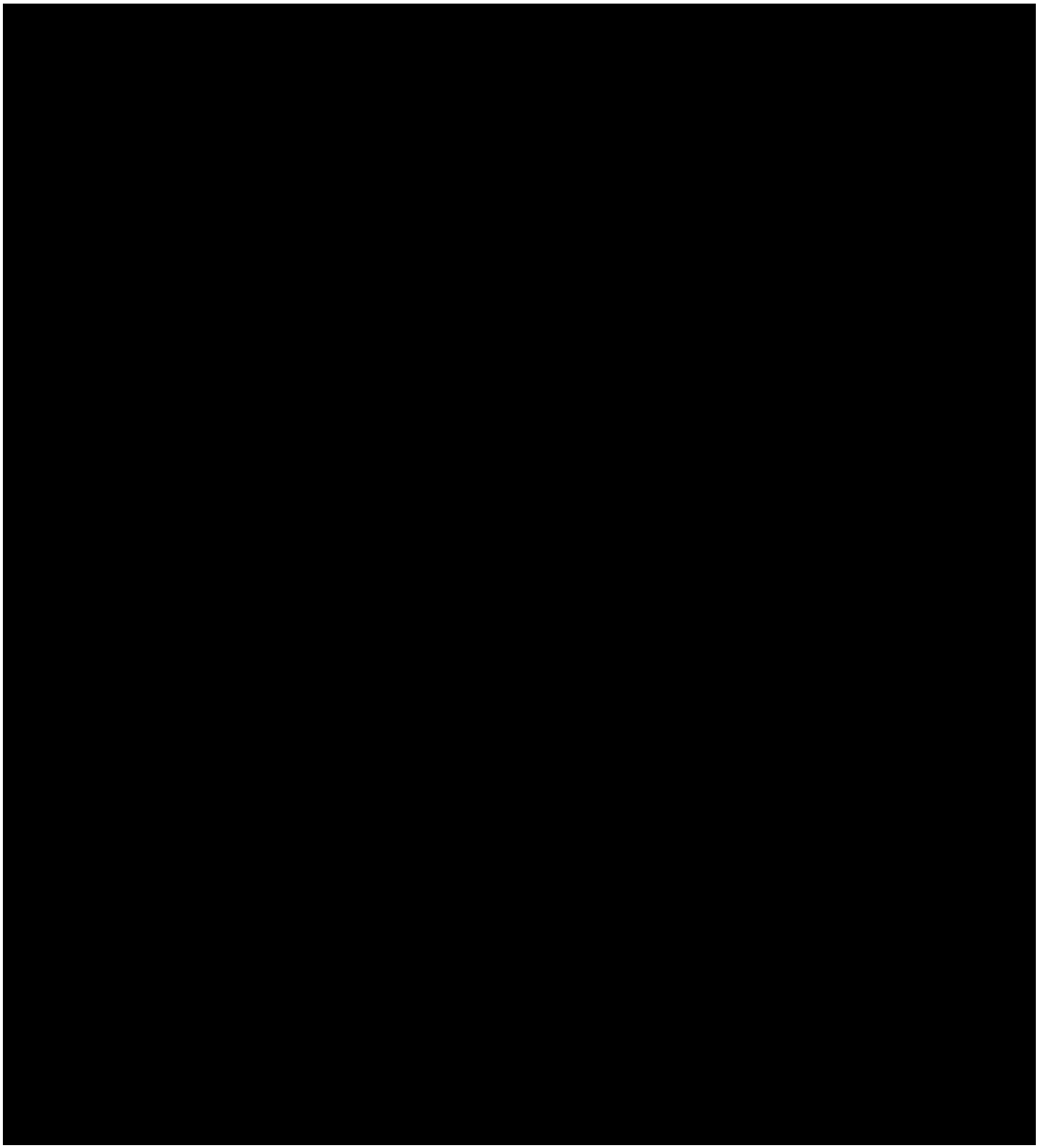


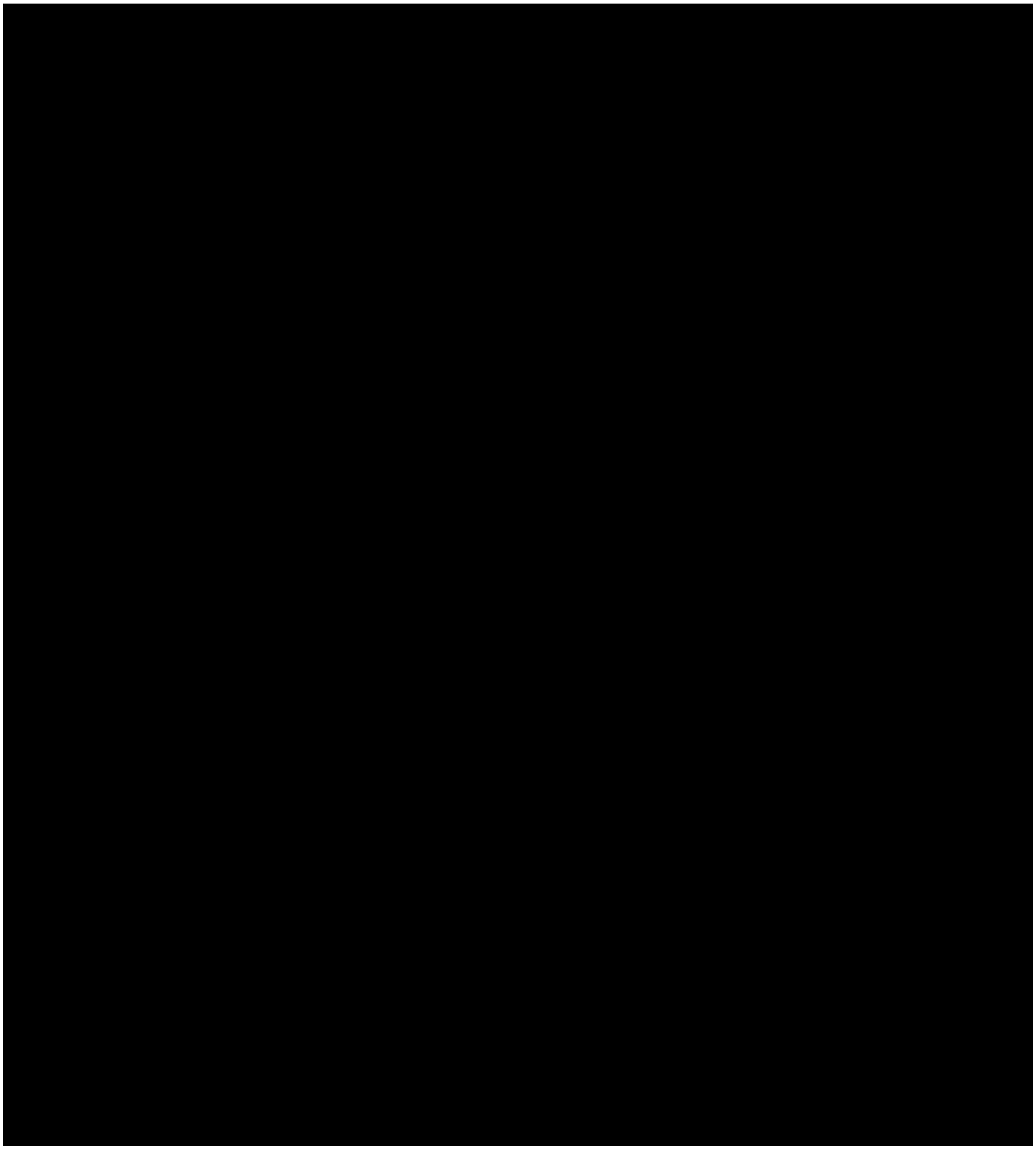

260)
261)
266)
268)
268)
268)
269)
272)
272)
272)
273)
273)
273)
280)
281)
281)
284)
284)
284)
284)
285)
285)
285)
288)
288)
289)
289)











TEMA 7

Triángulos y congruencia

CAPÍTULO 3

3.1 Triángulos congruentes 300

3.2 Postulados sobre la congruencia 306

3.3 Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia 312

3.4 Pruebas: uso de definiciones 316

3.5 Pruebas: uso de los postulados y definiciones 320

3.6 Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos 326

3.7 Pruebas: Solape de triángulos 332

3.8 Pruebas: cadenas de congruencias 336

Conceptos importantes 338

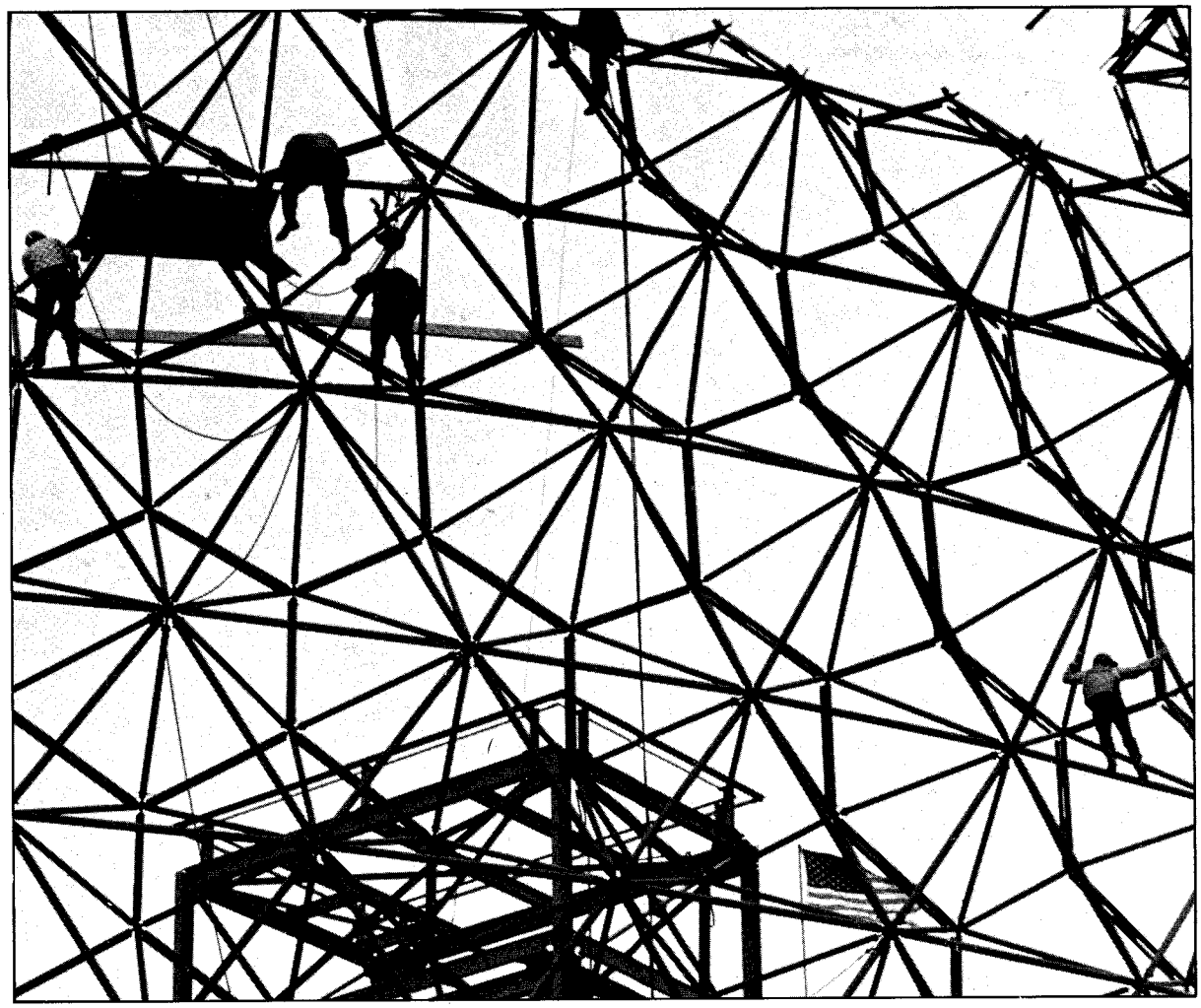
Resumen 339

Examen 340

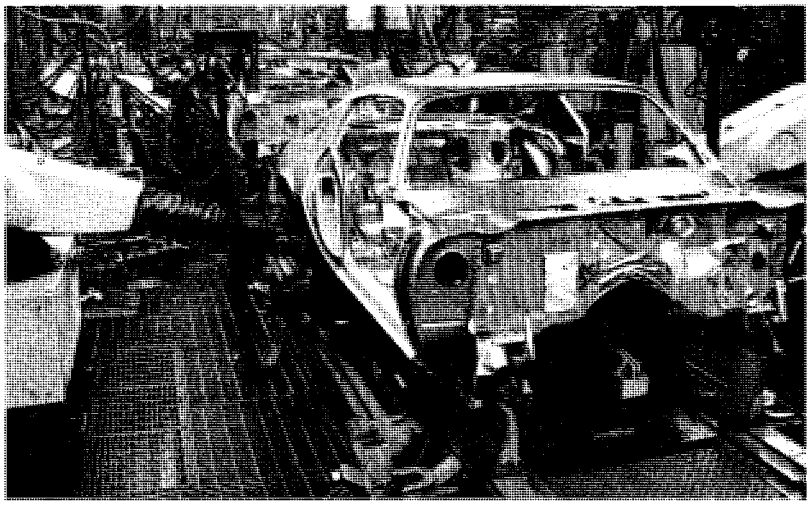
Resumen global (Caps. 1 a 3) 341

La geometría en nuestro mundo
Arquitectura: domos geodésicos 342

Triángulos y congruencia



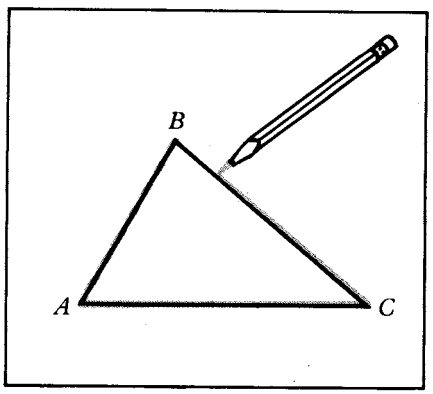
3.1 Triángulos congruentes



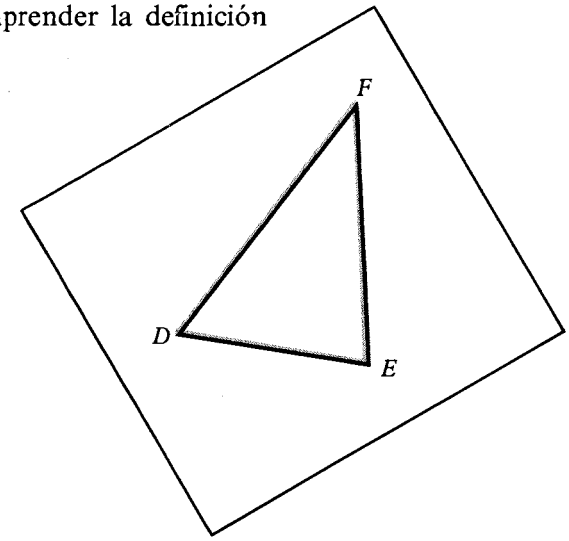
Los automóviles se fabrican utilizando la producción en cadena. Los componentes producidos deben ser de idéntico tamaño y forma para poderlos emplear en cualquier automóvil de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos. En geometría, a las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se les llama *congruentes.*

En geometría, se requiere una definición apropiada para decidir cuándo dos figuras, como $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, son congruentes.

Puede hacerse una prueba con papel vegetal para mostrar que $\triangle ABC$ probablemente es congruente con $\triangle DEF$ (a partir de las ilustraciones). Esta prueba puede ayudar a comprender la definición usual de congruencia.

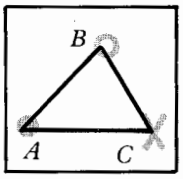


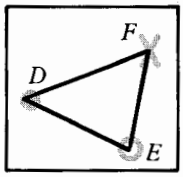
Dibújese $\triangle ABC$.



Si puede mover el papel para que el triángulo trazado coincida con $\triangle DEF$, los triángulos probablemente sean congruentes.

Considérese de nuevo la prueba del dibujo. Si se marca cada vértice con un símbolo especial, se observa que los vértices de los dos triángulos se corresponden como se muestra en la figura. También se determina la correspondencia de ángulos.





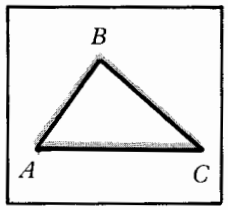
$A \leftrightarrow D$
$B \leftrightarrow E$
$C \leftrightarrow F$

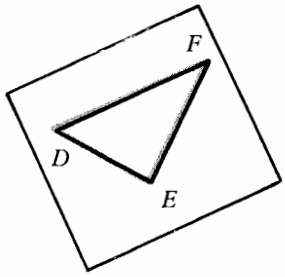
correspondencia entre vértices

$\angle A \leftrightarrow \angle D$
$\angle B \leftrightarrow \angle E$
$\angle C \leftrightarrow \angle F$

correspondencia entre ángulos

Si se marca cada lado con un signo especial, se observa que los lados se corresponden como se muestra en la figura.





En esta prueba de dibujo, se observa que:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\quad \angle A \cong \angle D$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\quad \angle B \cong \angle E$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ $\quad \angle C \cong \angle F$

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$
$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$
$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$

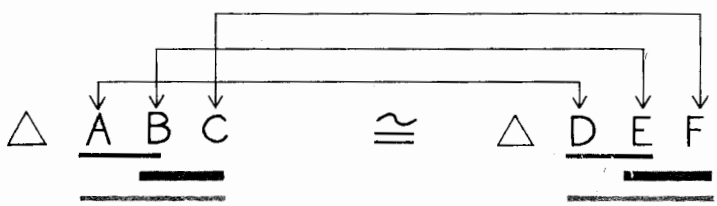
correspondencia entre lados

Siempre que pueda hacerse coincidir un triángulo con otro de manera que las partes comparadas sean *congruentes*, se da una clase especial de correspondencia llamada *congruencia*. Para indicar esta congruencia, se escribe: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Definición 3.1

Dos **triángulos son congruentes** si hay una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes. Obsérvese que la congruencia se puede definir de manera similar para otras figuras.

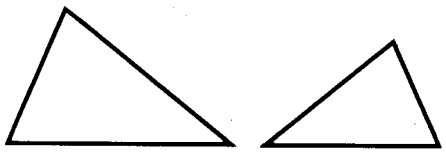
El diagrama muestra cómo esta proposición sobre los triángulos congruentes proporciona información específica sobre las partes que se corresponden (ángulos y lados).

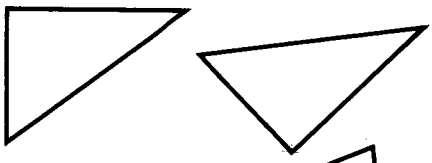


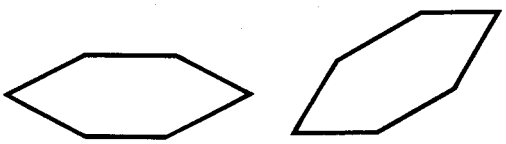
EJERCICIOS

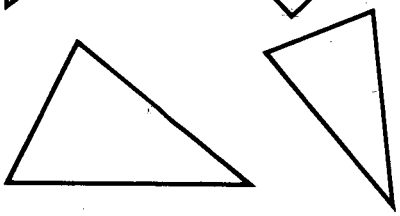
A.

¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?
(Puede emplearse papel vegetal.)

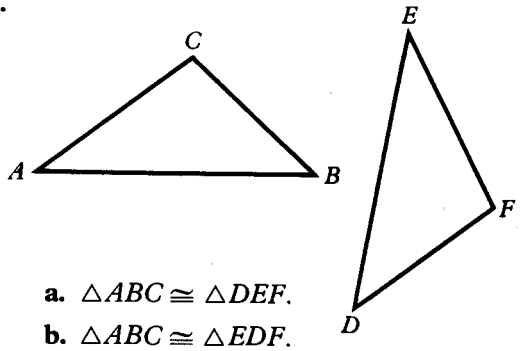
1. 

2. 

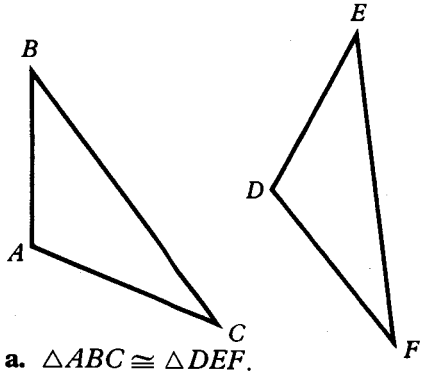
3. 

4. 

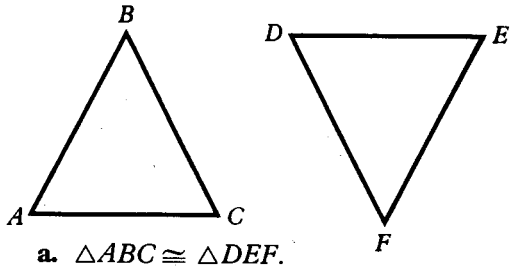
En los ejercicios 5 a 8, selecciónese la proposición correcta.
(Empléese papel vegetal si es necesario.)

5. 

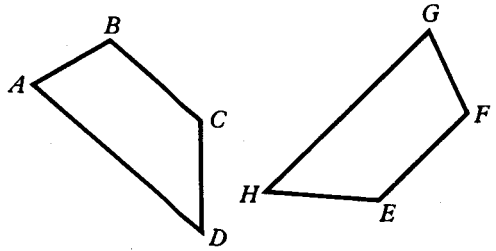
a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
b. $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.
c. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

6. 

a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
b. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$.
c. $\triangle ABC \cong \triangle FED$.

7. 

a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
b. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.
c. $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

8. 

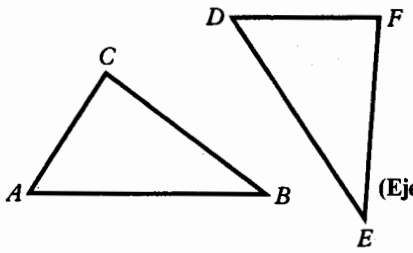
a. $ABCD \cong EFGH$.
b. $ABCD \cong FGHE$.
c. $ABCD \cong GHEF$.
d. $ABCD \cong GFEH$.

9. Dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, selecciónese la proposición falsa en cada parte.

a. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, $\angle C \cong \angle F$.

b. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

c. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, $\angle C \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.



(Ejercicio 9)

10. Dado que $\triangle UVW \cong \triangle XYZ$, complétense las congruencias para los seis pares de partes congruentes correspondientes.

a. $\angle U \cong$ ____?____.

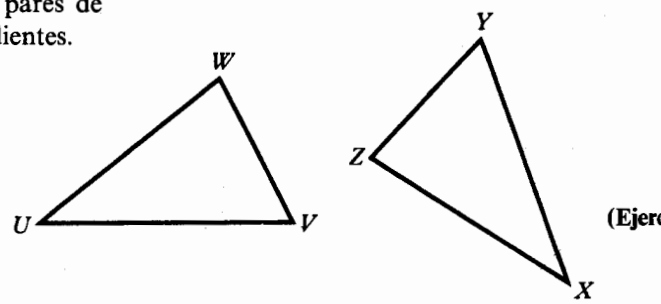
b. $\angle V \cong$ ____?____.

c. $\angle W \cong$ ____?____.

d. $\overline{UV} \cong$ ____?____.

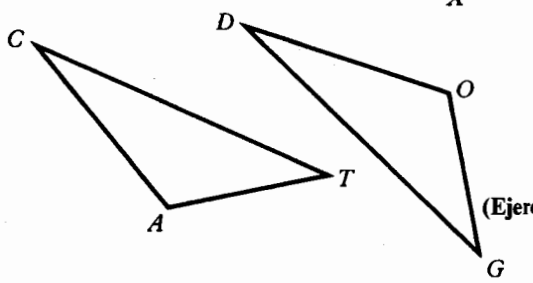
e. $\overline{UW} \cong$ ____?____.

f. $\overline{VW} \cong$ ____?____.



(Ejercicio 10)

11. Dado que $\triangle CAT \cong \triangle DOG$, formúlense las congruencias para los seis pares de partes congruentes correspondientes.

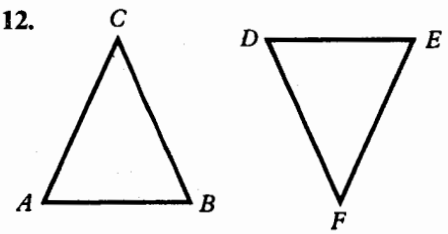


(Ejercicio 11)

B.

En los ejercicios 12 y 13 hay dos proposiciones de congruencia correctas. Encuéntrense estas proposiciones.

12.



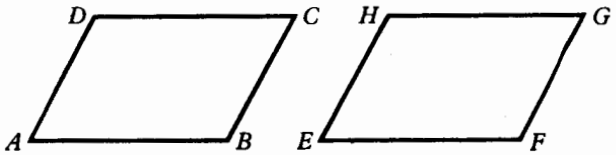
a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

b. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

c. $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

d. $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

13.



a. $ABCD \cong EFGH$.

b. $ABCD \cong FGHE$.

c. $ABCD \cong GHEF$.

d. $ABCD \cong FEHG$.

14. Dado que $\triangle PRS \cong \triangle JKL$, formúlense tres proposiciones de congruencia sobre los ángulos y otras tres sobre los lados de los triángulos.

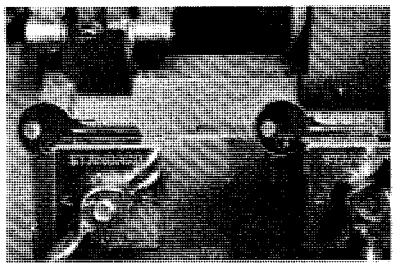
15. Dadas seis proposiciones de congruencia, complétense correctamente las proposiciones sobre los triángulos congruentes.

$\angle A \cong \angle B$ $\quad$ $\overline{AP} \cong \overline{BT}$
$\angle T \cong \angle P$ $\quad$ $\overline{AR} \cong \overline{BJ}$
$\angle R \cong \angle J$ $\quad$ $\overline{PR} \cong \overline{TJ}$
$\triangle \underline{?}\,\underline{?}\,\underline{?} \cong \triangle \underline{?}\,\underline{?}\,\underline{?}$

16. Dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, dos de las siguientes proposiciones de congruencia entre triángulos también son verdaderas. ¿Cuáles son?

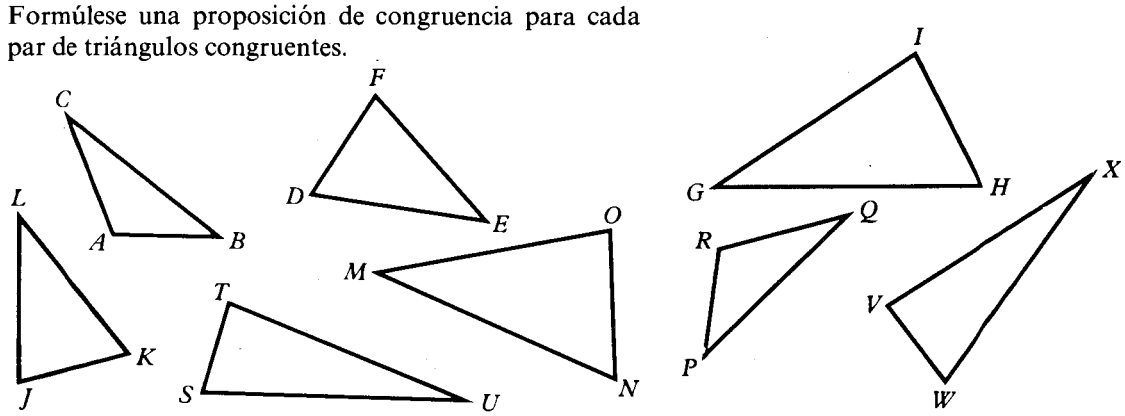
a. $\triangle BCA \cong \triangle EFD$. **b.** $\triangle ACB \cong \triangle EFD$.

c. $\triangle CBA \cong \triangle FDE$. **d.** $\triangle CAB \cong \triangle FDE$.



17. Cuando un cerrajero hace una llave nueva, tres puntos arbitrarios, A, B y C, de la superficie de la llave dada se corresponden con tres puntos, A', B' y C' de la llave nueva. ¿Qué relación hay entre $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?

18. Formúlese una proposición de congruencia para cada par de triángulos congruentes.



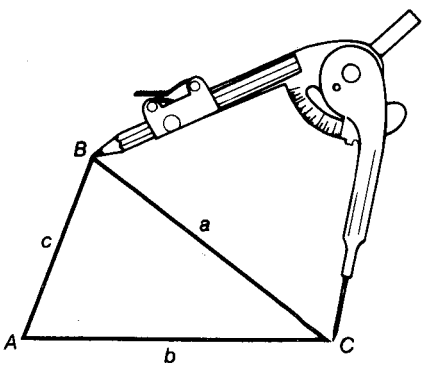
ACTIVIDADES

Cada triángulo, como $\triangle ABC$, tiene seis partes. Hay tres lados (a, b y c) y tres ángulos ($\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$).

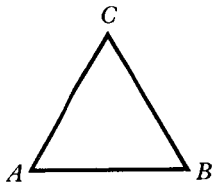
1. Supóngase que sólo se permite abrir el compás a las longitudes de los tres lados cuando es necesario. Constrúyase un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

2. Supóngase que sólo se permite abrir el compás a la longitud del lado c, a la del lado b, y para copiar $\angle A$. Dibújese un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

3. ¿Qué otras combinaciones de tres de seis partes permiten dibujar un triángulo congruente con $\triangle ABC$?



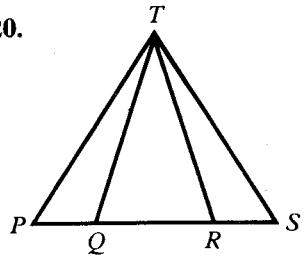
19. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, puede escribirse $\triangle ABC \cong \triangle BCA$. Además de ésta, hay otras cinco proposiciones de congruencia. Formúlense.



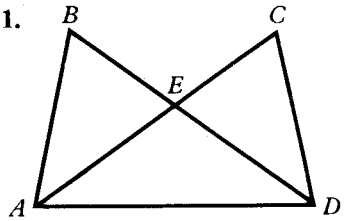
C.

Cada una de las figuras siguientes contiene uno o más pares de triángulos congruentes. En ocasiones, los triángulos se «solapan» unos a otros. Formúlese una proposición correcta de congruencia para cada par que se encuentre en una figura.

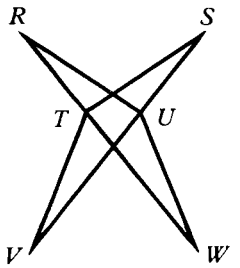
20.



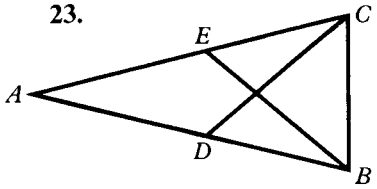
21.



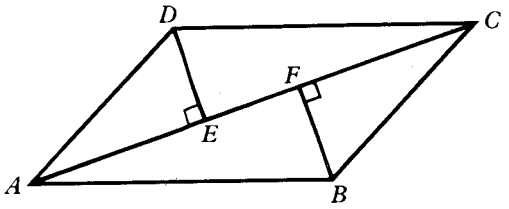
22.



23.

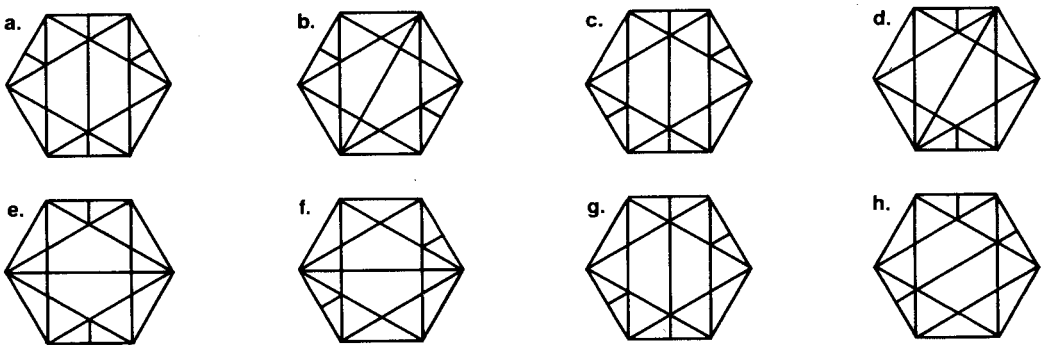


24.



SOLUCION DE PROBLEMAS

1. ¿Qué pares de figuras idénticas hay aquí?

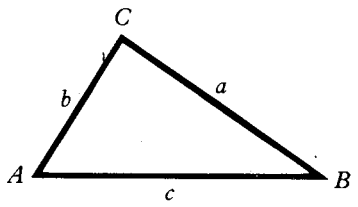


2. Dibújese la figura **a** y márquense los puntos donde se intersecan los segmentos. Encuéntrense seis pares de triángulos congruentes (cada uno de ellos con triángulos de diferentes tamaños y formas) y formúlense las proposiciones de congruencia correctas.

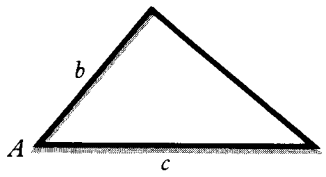
3.2 Postulados sobre la congruencia

Supóngase que un alfombrista necesita reparar una alfombra con un retazo triangular. No es probable que se midan los tres lados y los tres ángulos para cortar la pieza. Sólo se necesitan algunas de esas medidas. En esta sección se analizarán cuántas y qué combinaciones de las seis partes de un triángulo (lados a, b, c, y ángulos A, B, C) se necesitan para determinar un triángulo con tamaño y forma particulares.

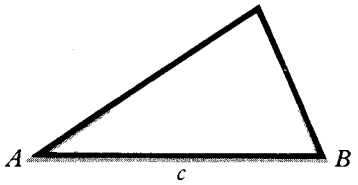
Primero se establecen algunos conceptos útiles para trabajar con triángulos congruentes.



Un ángulo y el lado opuesto a éste se marcan con la misma letra; el ángulo con letra mayúscula, y el ángulo, con minúscula.

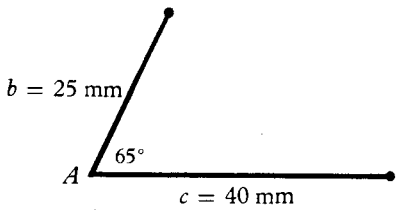


Dos lados comprenden un ángulo si el vértice del ángulo es un extremo de ambos lados.

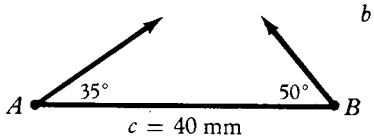


Dos ángulos comprenden un lado si los extremos del lado son vértices de los dos ángulos.

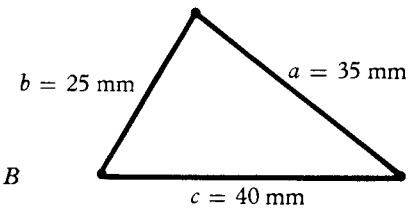
Si se construye un triángulo, dadas tres de las seis partes, se encuentra que el tamaño y la forma del triángulo están completamente determinados dada la información siguiente:



1. Dos lados y el ángulo comprendido.

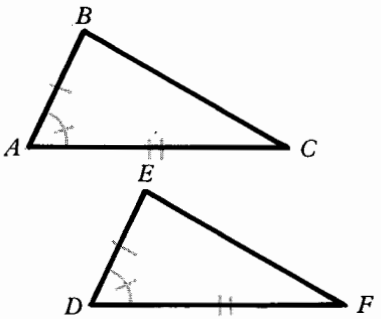


2. Dos ángulos y el lado comprendido.



3. Tres lados.

De lo anterior se obtienen los tres postulados siguientes sobre congruencia.

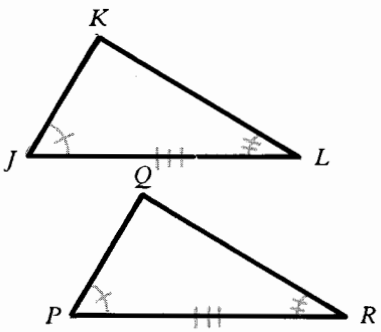


Las marcas sobre el triángulo muestran cuáles son los ángulos y lados congruentes.

Se considera que sólo puede resultar un triángulo si se dan dos lados y el ángulo comprendido, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia LAL

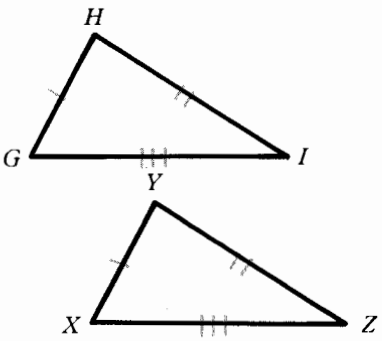
Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Se cree que sólo puede resultar un triángulo si están dados dos ángulos y el lado comprendido, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia ALA

Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



Se cree que sólo puede resultar un triángulo si se dan tres lados, así que se acepta este postulado.

Postulado de la congruencia LLL

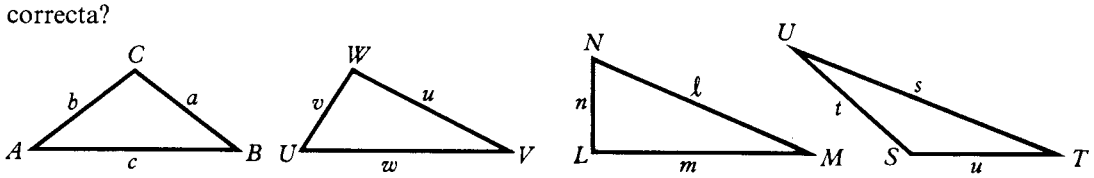
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

La definición de triángulos congruentes muestra que deben coincidir seis pares de partes. Pero estos tres postulados sugieren que en ocasiones sólo es necesario verificar tres de estos pares para estar seguros de que hay congruencia. Estos postulados se emplearán para demostrar otros teoremas sobre triángulos.

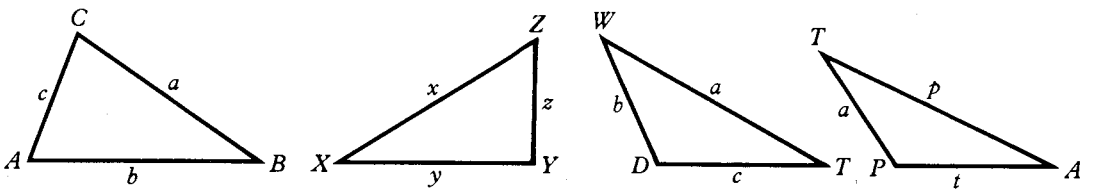
EJERCICIOS

A.

1. ¿Cuál de estos triángulos no se denominó en forma correcta?



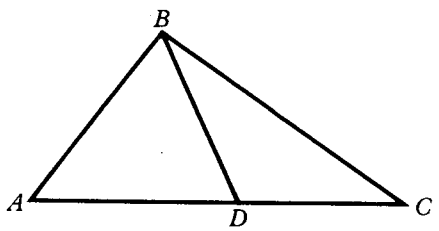
2. ¿Cuál de estos triángulos se denominó en forma correcta?



3. Dibújese un triángulo y márquense sus ángulos y lados de acuerdo con el método estándar.

Establézcase el ángulo (o lado) comprendido en cada par de lados (o ángulos).

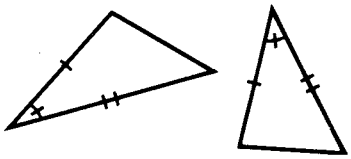
4. $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
5. $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$.
6. $\angle A$ y $\angle C$.
7. $\angle ABD$ y $\angle ADB$.
8. $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$.
9. $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$.
10. $\angle ABC$ y $\angle C$.



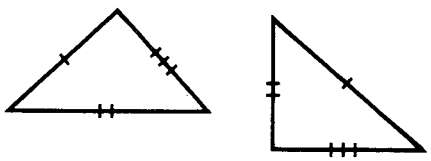
(Ejercicios 4-10)

¿Por cuál de los tres postulados de la congruencia (LAL, ALA, LLL) son congruentes estos tres pares de triángulos? (Acéptese que la congruencia está indicada por las marcas, aunque es posible que los triángulos no parezcan congruentes.)

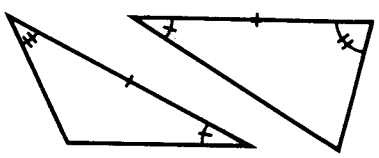
11.



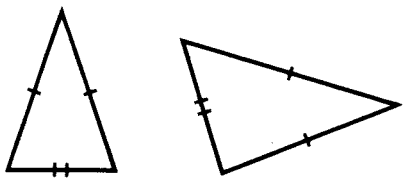
12.



13.

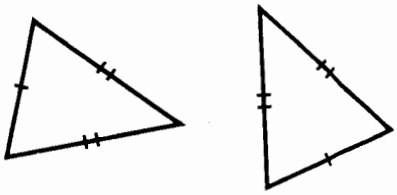


14.

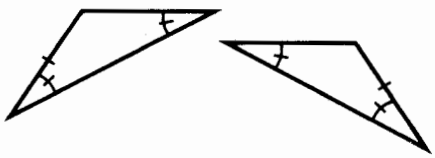


En los ejercicios 15 a 22, se marcaron las partes congruentes de los triángulos. Determínese si hay suficiente información como para decidir si los triángulos son congruentes por los postulados LAL, ALA o LLL. Si son congruentes, formúlese el postulado.

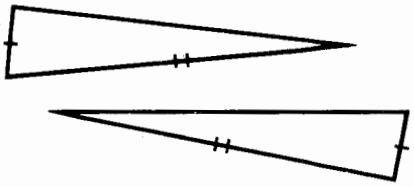
15.



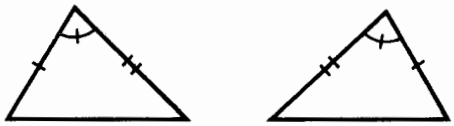
16.



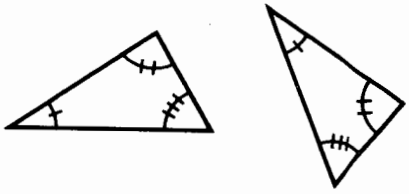
17.



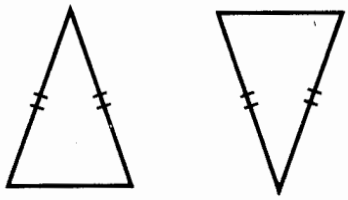
18.



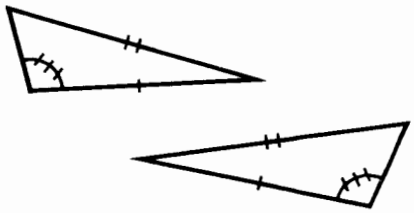
19.



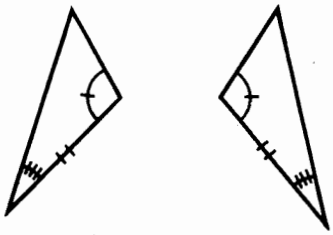
20.



21.



22.



B.

En los ejercicios 23 a 27, determínese si los triángulos son congruentes. Si lo son, indíquese qué postulado (LAL, ALA, LLL) puede usarse para verificarlo.

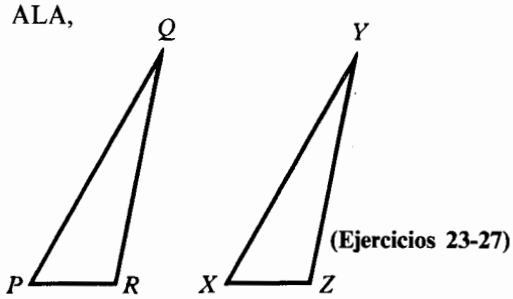
23. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$, $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$.

24. Dado: $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$, $\overline{RQ} \cong \overline{ZY}$, $\angle R \cong \angle Z$.

25. Dado: $\angle P \cong \angle X$, $\angle R \cong \angle Z$, $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$.

26. Dado: $\angle Q \cong \angle Y$, $\angle R \cong \angle Z$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$.

27. Dado: $\angle P \cong \angle X$, $\angle Q \cong \angle Y$, $\angle R \cong \angle Z$.

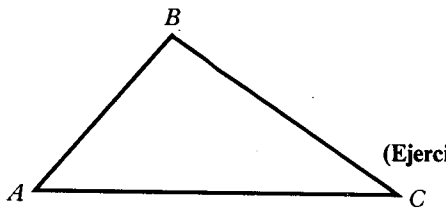


(Ejercicios 23-27)

28. Empléese el postulado LLL para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

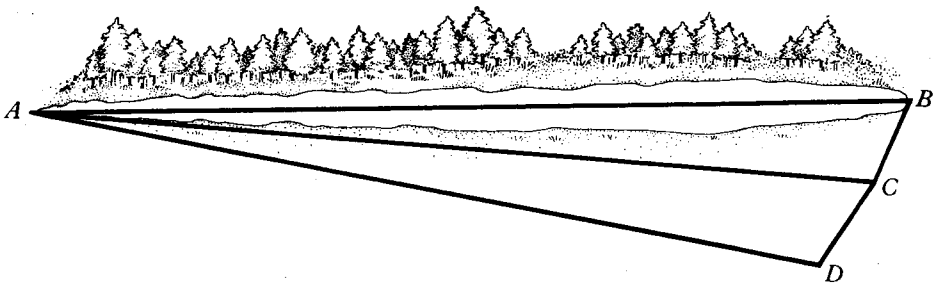
29. Empléese el postulado LAL para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.

30. Empléese el postulado ALA para construir un triángulo congruente con $\triangle ABC$.



(Ejercicios 28-30)

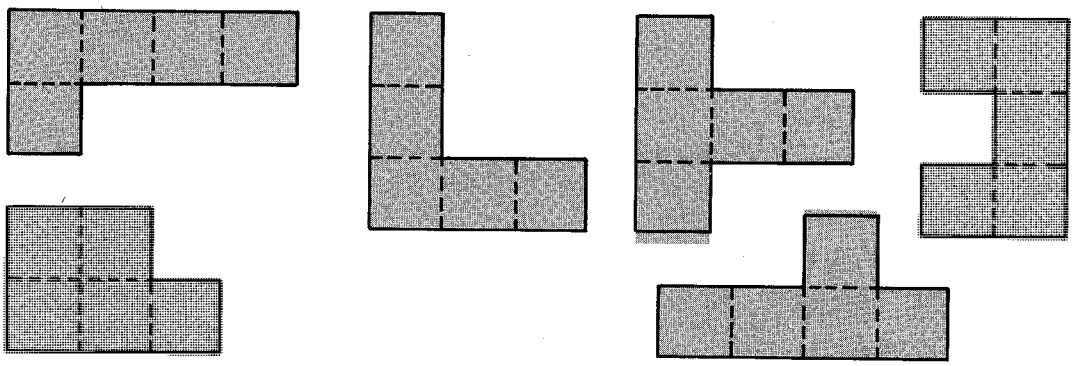
31. Un equipo de agrimensores desea encontrar la distancia AB a través de un lago. Un método requiere la construcción de un par de triángulos congruentes. Los agrimensores seleccionan un punto cualquiera C, miden $\angle ACB$ y ubican un punto D de manera que $\angle ACD \cong \angle ACB$ y $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. ¿Por qué son congruentes $\angle ACD$ y $\angle ACB$? ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida?



ACTIVIDADES

Háganse copias con cartulina (por lo menos tres veces mayores) de los seis «pentaminós» que se muestran.

Un «pentaminó» es un polígono que coincide con cinco cuadros de un tablero de ajedrez.

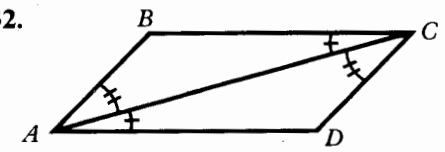


Colóquense los «pentaminós» de manera que se forme un par de rectángulos de idéntico tamaño y forma.

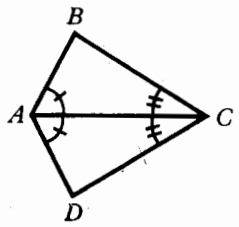
C.

En los ejercicios 32 a 37, formúlese un postulado de congruencia para cada par de triángulos congruentes. Dígase, además, si los triángulos son congruentes por ALA, LAL o LLL. (*Nota:* empléese el concepto de que tanto un segmento como un ángulo son congruentes consigo mismos.)

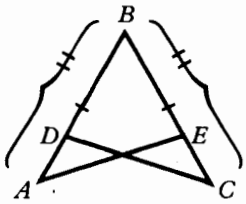
32.



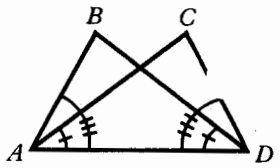
33.



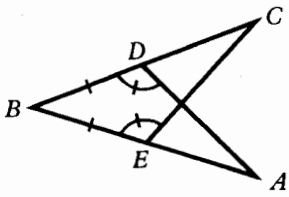
34.



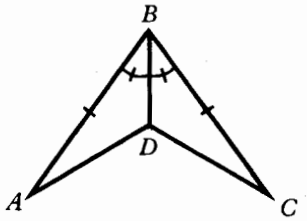
35.



36.

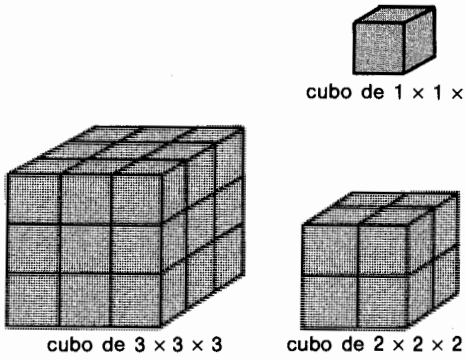


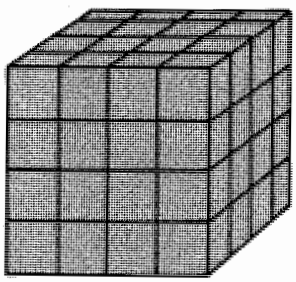
37.



SOLUCION DE PROBLEMAS

¿De cuántas maneras puede colocarse un cubo de 3 × 3 × 3 en un cubo de 4 × 4 × 4? ¿Cuántas posiciones de 2 × 2 × 2 o de 1 × 1 × 1 son posibles? Complétese la tabla.





tamaño del cubo	número de posiciones en un cubo de 4 × 4 × 4

3.3 Pruebas: uso de los postulados sobre la congruencia

Para probar que dos triángulos son congruentes, se empieza con la información dada y se emplean los *esquemas de razonamiento deductivo* para concluir que son realmente congruentes. La afirmación de la hipótesis es el esquema que se utiliza con mayor frecuencia, como se describe a continuación.

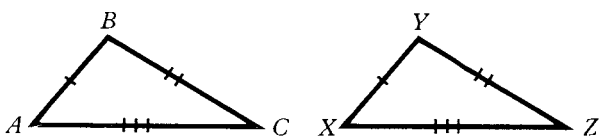
El postulado LLL tiene la forma general:

Si [los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo,] (p) entonces [los dos triángulos son congruentes] (q)

REPASO: La afirmación de la hipótesis es un esquema de razonamiento que se representa como sigue:

Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdad
y se afirme que p es verdad,
---
puede concluirse que q es verdad.

Ahora se presenta una aplicación específica de esta proposición:

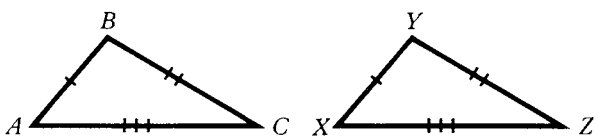


Se observa que todas las condiciones establecidas en p se satisfacen; esto es, p es verdadero. Con esto se *afirma la hipótesis.* Por tanto, puede concluirse: q es verdadero. Aplicando esto a este caso específico, $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Resulta útil organizar el pensamiento al formular la *prueba* anterior en dos columnas. La columna izquierda se usa para las proposiciones que llevan a la conclusión deseada. La columna de la derecha da las razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{XY}$
$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$
$\overline{AC} \cong \overline{XZ}$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

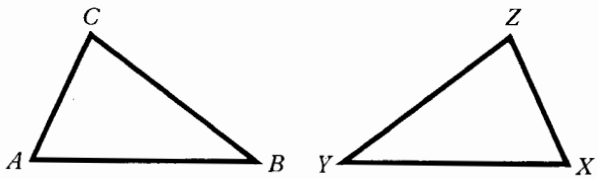


Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$.	2. Dado.
3. $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$.	3. Dado.
4. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.	4. Postulado de la congruencia LLL.

Ahora se presentan otros dos ejemplos de pruebas sencillas sobre la congruencia de dos triángulos. Obsérvese que se emplea la afirmación de la hipótesis.

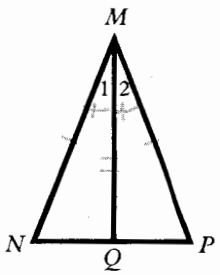
Ejemplo 1 **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{XY}$
$\angle A \cong \angle X$
$\angle B \cong \angle Y$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.



Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$.	1. Dado.
2. $\angle A \cong \angle X$.	2. Dado.
3. $\angle B \cong \angle Y$.	3. Dado.
4. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.	4. Postulado de la congruencia ALA.

Ejemplo 2 **Dado:** $\overline{MN} \cong \overline{MP}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle MNQ \cong \triangle MPQ$.



Prueba

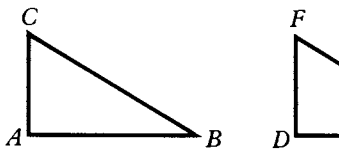
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MN} \cong \overline{MP}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Dado.
3. $\overline{MQ} \cong \overline{MQ}$.	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle MNQ \cong \triangle MPQ$.	4. Postulado de la congruencia LAL.

(*Nota:* Algunas veces, como en el tercer paso, hay un lado común a dos triángulos. El concepto de que «un segmento es congruente consigo mismo» puede usarse para obtener un segundo par de lados congruentes necesario para afirmar la hipótesis del postulado de la congruencia LAL. Este concepto se analizará más a fondo en el Cap. 4.)

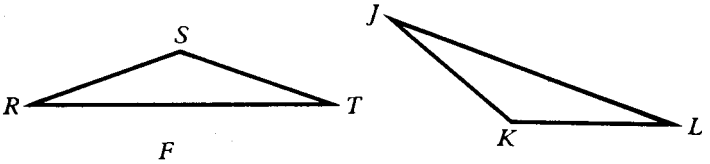
EJERCICIOS

A. Pruébese la congruencia de los siguientes triángulos formulándose una demostración a dos columnas. Elabórense las demostraciones de acuerdo con los ejemplos recién vistos.

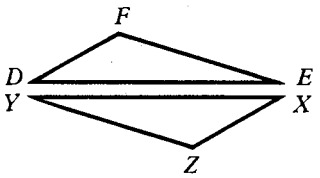
1. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\angle A \cong \angle D$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



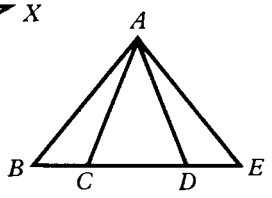
2. Dado: $\overline{RS} \cong \overline{KL}$
$\overline{ST} \cong \overline{JK}$
$\overline{RT} \cong \overline{JL}$.
Pruébese: $\triangle RST \cong \triangle LKJ$.



3. Dado: $\angle D \cong \angle X$
$\angle F \cong \angle Z$
$\overline{DF} \cong \overline{XZ}$.
Pruébese: $\triangle DEF \cong \triangle XYZ$.

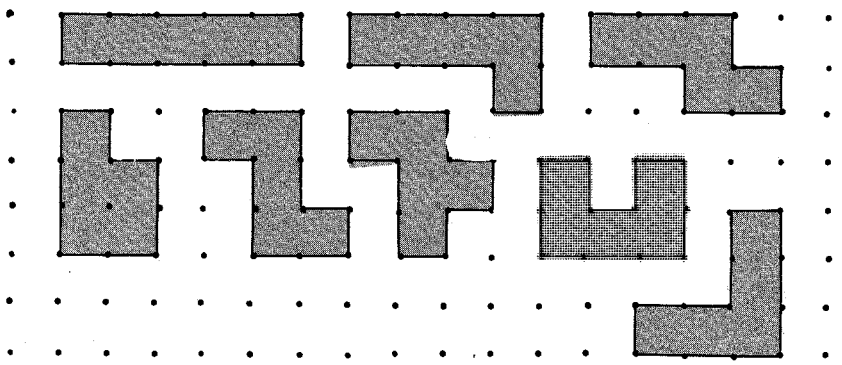


4. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AB} \cong \overline{AE}$
$\overline{BC} \cong \overline{DE}$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle AED$.

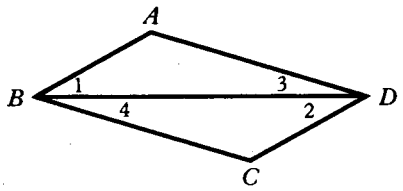


ACTIVIDADES

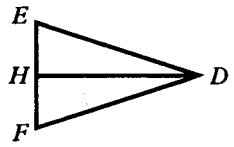
Háganse copias grandes de estos «pentaminós» (figuras de cinco cuadrados) y colóquense de manera que formen un par de rectángulos de idéntica forma y tamaño.



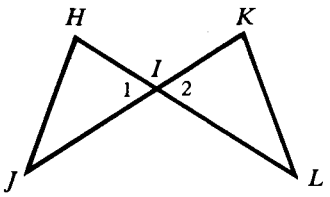
5. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



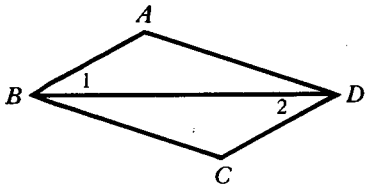
6. Dado: $\overline{DE} \cong \overline{DF}$
$\overline{EH} \cong \overline{HF}$.
Pruébese: $\triangle DHE \cong \triangle DHF$.



7. Dado: $\overline{HI} \cong \overline{KI}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{JI} \cong \overline{IL}$.
Pruébese: $\triangle HIJ \cong \triangle KIL$.



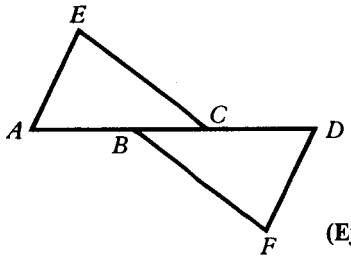
8. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



B.

9. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
$\angle A \cong \angle D$
$\angle ACE \cong \angle DBF$.
Pruébese: $\triangle ACE \cong \triangle DBF$.

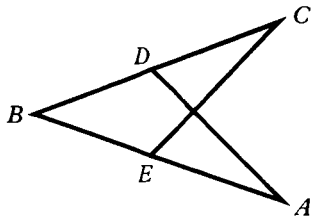
10. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{DF}$
$\angle A \cong \angle D$.
Pruébese: $\triangle CAE \cong \triangle BDF$.



(Ejercicios 9, 10)

11. Dado: $\angle A \cong \angle C$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $\triangle CBE \cong \triangle ABD$.

12. Dado: $\angle BDA \cong \angle BEC$
$\overline{BD} \cong \overline{BE}$.
Pruébese: $\triangle BDA \cong \triangle BEC$.



(Ejercicios 11, 12)

SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuáles de los siguientes modelos pueden plegarse de manera que formen un cubo doblando y pegando los bordes?

¿Cuántos modelos más de seis cuadros se pueden dibujar que al plegarlos formen un cubo?

3.4 Pruebas: uso de definiciones

REPASO: Dos rectas son **perpendiculares** si se intersecan para formar ángulos rectos congruentes.

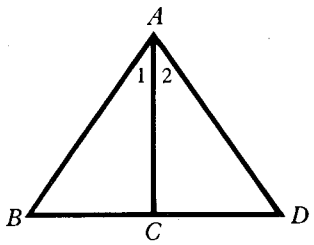
La anterior definición de las rectas perpendiculares y las definiciones de bisectriz del ángulo, punto medio, bisectriz del segmento (Sec. 1.5) y bisectriz perpendicular (Sec. 1.6), se utilizan con frecuencia en las demostraciones.

Considérese el siguiente ejemplo de *afirmación de la hipótesis* (Sec. 2.6).

$p \rightarrow q$: Si un rayo biseca a un ángulo, entonces los dos ángulos que se forman son congruentes.

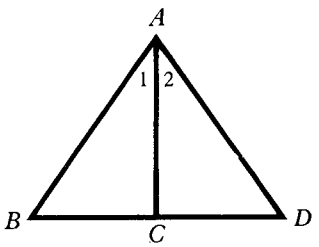
p: $\overrightarrow{AC}$ biseca a $\angle BAD$.

Por tanto,
se concluye que q: $\angle 1 \cong \angle 2$.



Esta demostración se muestra a continuación con un diseño de dos columnas.

Dado: $\overrightarrow{AC}$ biseca a $\angle BAD$.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.



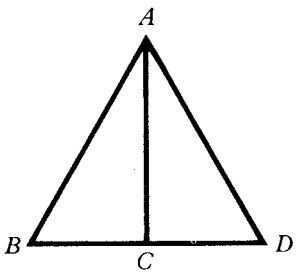
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overrightarrow{AC}$ biseca a $\angle BAD$.	**1.** Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	**2.** Definición de la bisectriz del ángulo.

Las pruebas siguientes muestran el empleo de las definiciones del punto medio, la bisectriz y las rectas perpendiculares. Estúdiese cada prueba.

Ejemplo 1

Dado: C es el punto medio de $\overline{BD}$.
Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

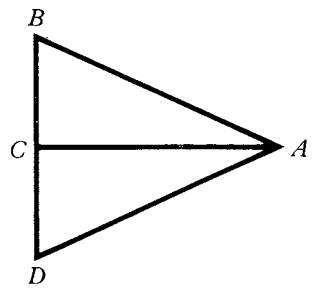


Prueba

Afirmaciones	Razones
1. C es el punto medio de $\overline{BD}$.	**1.** Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	**2.** Definición del punto medio.

Ejemplo 2

Dado: $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{BD}$.
Pruébese: C es el punto medio de $\overline{BD}$.

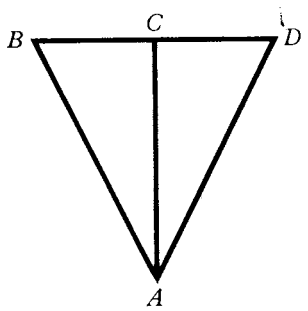


Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{BD}$.	**1.** Dado.
2. C es el punto medio de $\overline{BD}$.	**2.** Definición de la bisectriz perpendicular.

Ejemplo 3

Dado: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
Pruébese: $\angle ACD \cong \angle ACB$.



Prueba

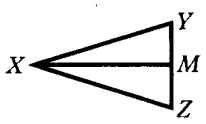
Afirmarciones	Razones
1. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.	**1.** Dado.
2. $\angle ACD \cong \angle ACB$.	**2.** Definición de las rectas perpendiculares.

EJERCICIOS

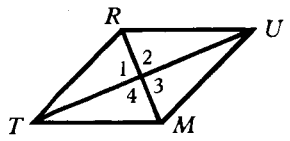
A.

En los ejercicios 1 a 8, empléese alguna de las definiciones presentadas en esta sección para sacar una conclusión de los datos dados.

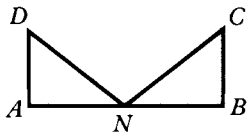
1. Dado: $\overline{XM}$ biseca a $\angle ZXY$.



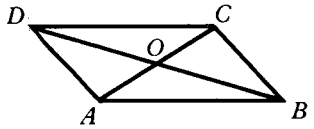
2. Dado: $\overline{RM} \perp \overline{TU}$.



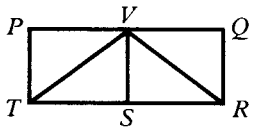
3. Dado: N es el punto medio de $\overline{AB}$.



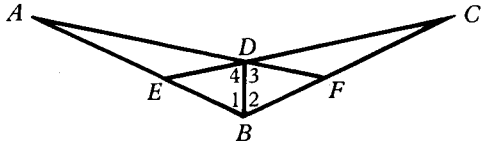
4. Dado: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan entre sí.



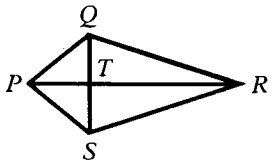
5. Dado: $\overline{SV}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{PQ}$.



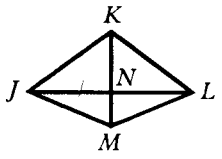
6. Dado: $\overline{DB}$ biseca a $\angle EDF$.



7. Dado: T es el punto medio de $\overline{QS}$.

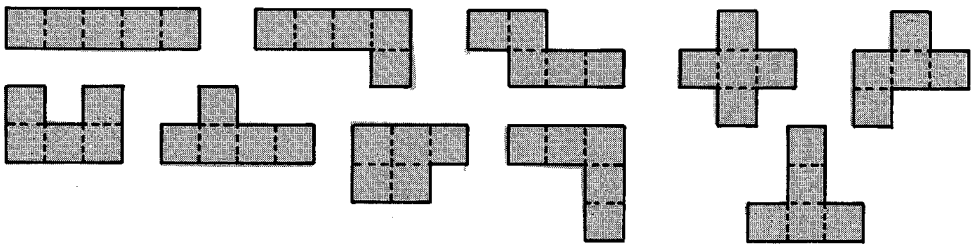


8. Dado: $\overline{KM}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{JL}$.



ACTIVIDADES

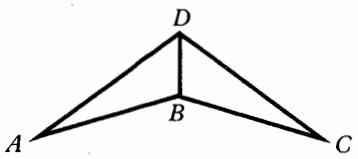
Cópiense en grande estos diez «pentaminós» y júntense para formar un par de cuadrados de idéntica forma y tamaño.



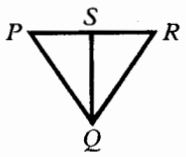
B.

Formúlese una demostración a dos columnas para los ejercicios 9 a 14.

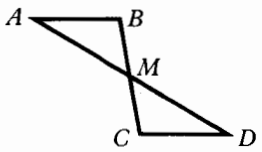
9. Dado: BD biseca a $\angle ADC$.
Pruébese: $\angle ADB \cong \angle BDC$.



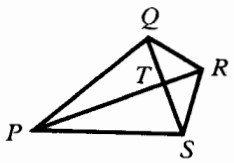
10. Dado: $\overline{QS}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{PR}$.
Pruébese: S es el punto medio de $\overline{PR}$.



11. Dado: M es el punto medio de $\overline{AD}$.
Pruébese: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$.

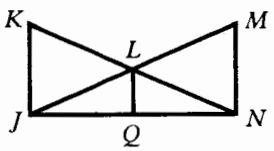


12. Dado: $\overline{PR} \perp \overline{QS}$.
Pruébese: $\angle PTQ \cong \angle PTS$.

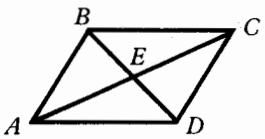


C.

13. Dado: $\overline{LQ}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{JN}$.
Pruébese: $\overline{JQ} \cong \overline{QN}$.



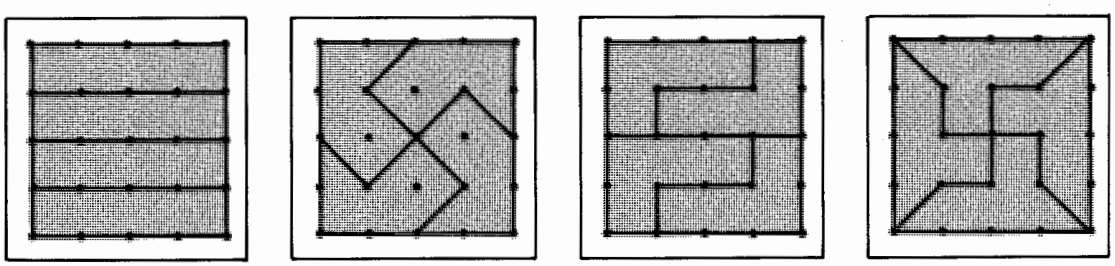
14. Dado: $\overline{BD}$ biseca a $\overline{AC}$.
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{EC}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

En estos dibujos se muestran cuatro formas diferentes de dividir un cuadro en cuatro partes idénticas.

¿Qué otras formas se pueden encontrar? Muéstrense por lo menos otras cinco en un papel punteado.

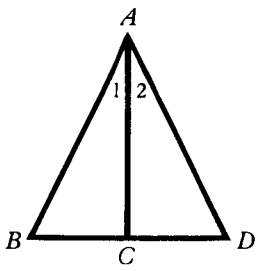


3.5 Pruebas: uso de postulados y definiciones

© 1980 United Feature Syndicate, Inc.

Las definiciones de bisectriz del ángulo, bisectriz del segmento, bisectriz perpendicular y punto medio pueden usarse, junto con los postulados sobre la congruencia, para probar que dos triángulos son congruentes.

Para deducir la prueba de que dos triángulos son congruentes, suele ser útil analizar la situación empezando por lo que se va a probar y hacer el desarrollo hacia atrás. Estúdiese el siguiente ejemplo.



Problema:

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC}$ biseca $\angle BAD$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

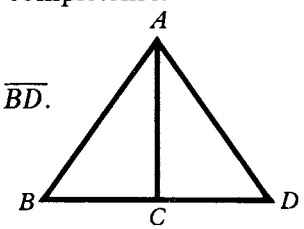
Análisis (cómo se podría deducir la forma de resolver el problema): «Se quiere probar que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Podría hacerse por medio de los postulados de la congruencia LLL, LAL o ALA, pero ¿cuál de ellos? Por la información dada se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. Si pudiera probarse que $\angle 1 \cong \angle 2$ y que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, podría emplearse el postulado LAL. Pero $\overline{AC}$ biseca a $\angle BAD$, así que $\angle 1 \cong \angle 2$. Además, un segmento es congruente consigo mismo. Sí, puede hacerse.»

Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. $\overline{AC}$ biseca a $\angle BAD$.	2. Dado.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	5. Postulado de la congruencia LAL.

Estúdiese el *análisis* de las pruebas siguientes y complétense.

Ejemplo 1 **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.
C es el punto medio de $\overline{BD}$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

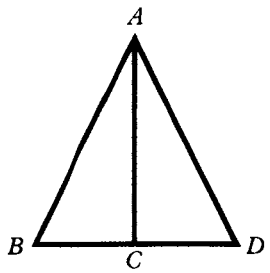


Análisis: «¿Cuál de los postulados de congruencia se puede utilizar para esto, ALA, LAL o LLL? Se puede probar que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, si se puede demostrar que tres lados de $\triangle ABC$ son respectivamente congruentes con los tres lados de $\triangle ADC$. Por los datos, se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, porque un segmento es congruente consigo mismo. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ si C es el punto medio de $\overline{BD}$. Al serlo (por los datos), ya se puede formular la prueba.»

Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. C es el punto medio de $\overline{BD}$.	2. Dado.
3. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	5. ¿Por qué?

Ejemplo 2 **Dado:** $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{BD}$.
Pruébese: $\triangle ACB \cong \triangle ACD$



Análisis: «Se puede probar que $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ con uno de los postulados de la congruencia. Se intenta con el LAL. Se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. Como $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{BC}$, $\angle ACB \cong \angle ACD$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Ahora ya se puede formular la prueba.»

Prueba

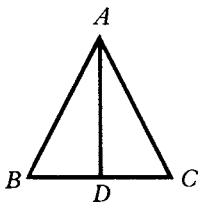
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC}$ biseca a $\overline{BD}$.	1. Dado.
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	2. Definición de la bisectriz de un segmento.
3. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.	3. Dado.
4. $\angle ACB \cong \angle ACD$.	4. ¿Por qué?
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$.	5. ¿Por qué?
6. $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.	6. Postulado de la congruencia LAL.

EJERCICIOS

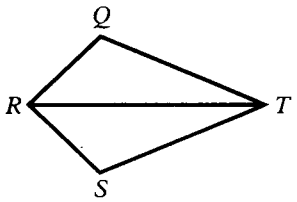
A.

En los ejercicios 1 a 4, analícese la situación e indíquese cuál de los tres postulados sobre la congruencia (LLL, LAL o ALA) podría usarse para probar que los triángulos son congruentes.

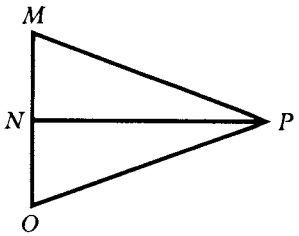
1. Dado: $\overline{AD}$ biseca a $\overline{BC}$
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



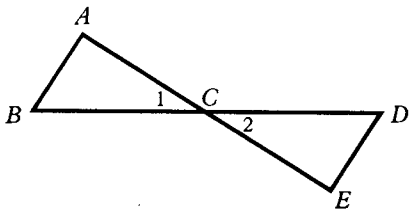
2. Dado: $\overline{RT}$ biseca a $\angle QRS$
$\overline{RT}$ biseca $\angle QTS$.
Pruébese: $\triangle RTQ \cong \triangle RTS$.



3. Dado: $\overline{NP} \perp \overline{MO}$
$\overline{NP}$ biseca $\angle MPO$.
Pruébese: $\triangle MNP \cong \triangle ONP$.

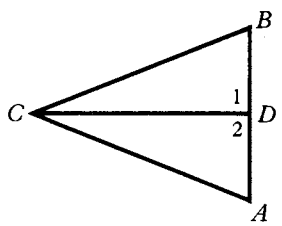


4. Dado: $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se bisecan
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



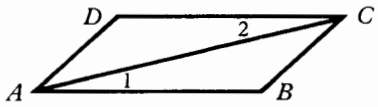
En los ejercicios 5 a 7, formúlense las razones o proposiciones que faltan.

5. Dado: $\overline{AD} \cong \overline{DB}$
$\overline{AB} \perp \overline{DC}$.
Pruébese: $\triangle DAC \cong \triangle DBC$.



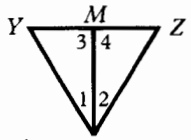
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AD} \cong \overline{DB}$.	1. Dado.
2. $\overline{AB} \perp \overline{DC}$.	2. ?
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. ?
4. ?	4. Un segmento es congruente consigo mismo.
5. $\triangle DAC \cong \triangle DBC$.	5. ?

6. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Dado.
3. ?	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.	4. ?

7. Dado: $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$
$\overline{XM}$ biseca a $\angle YXZ$.
Pruébese: $\triangle XYM \cong \triangle XZM$.

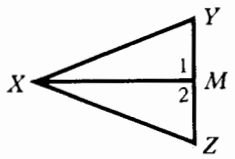


Afirmaciones	Razones
1. $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$.	1. Dado.
2. ?	2. Definición de las rectas perpendiculares.
3. $\overline{XM}$ biseca a $\angle YXZ$.	3. ?
4. $\angle 1 \cong \angle 2$.	4. ?
5. $\overline{XM} \cong \overline{XM}$.	5. ?
6. $\triangle XYM \cong \triangle XZM$.	6. ?

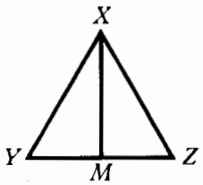
B.

En los ejercicios 8 a 17 pruébese que los triángulos son congruentes.

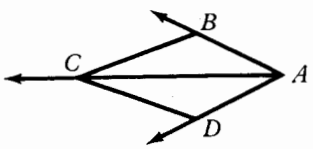
8. Dado: $\overline{XM}$ biseca a $\angle YXZ$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle XMY \cong \triangle XMZ$.



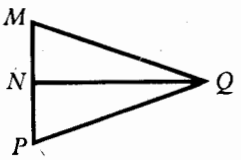
9. Dado: $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$
$\overline{YM} \cong \overline{MZ}$.
Pruébese: $\triangle XYM \cong \triangle XZM$.



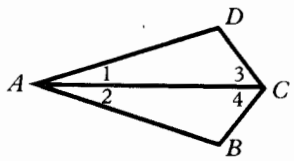
10. Dado: $\overline{AC}$ es la bisectriz de $\angle BAD$
$\overline{AB} \cong \overline{AD}$.
Pruébese: $\triangle BAC \cong \triangle DAC$.



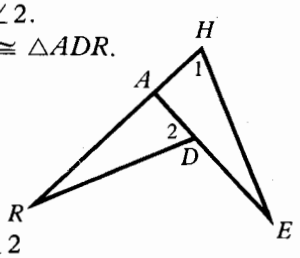
11. Dado: $\overline{QM} \cong \overline{QP}$
$\overline{QN}$ biseca a $\overline{MP}$.
Pruébese: $\triangle QNM \cong \triangle QNP$.



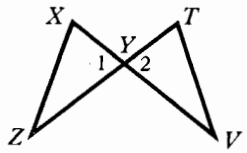
12. Dado: $\overline{AC}$ biseca a $\angle DAB$
$\overline{AC}$ biseca a $\angle DCB$.
Pruébese: $\triangle ACD \cong \triangle ACB$.



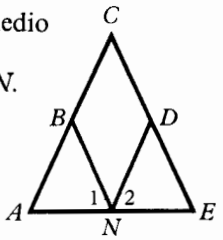
13. Dado: $\overline{HR} \perp \overline{AE}$
$\overline{AH} \cong \overline{AD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle AHE \cong \triangle ADR$.



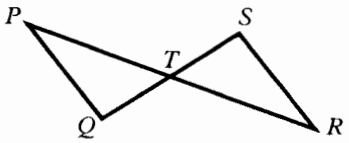
14. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{XY} \cong \overline{TY}$
$\overline{ZY} \cong \overline{VY}$.
Pruébese: $\triangle XYZ \cong \triangle TYV$.



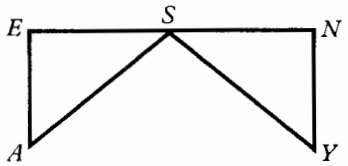
15. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle A \cong \angle E$
N es el punto medio de $\overline{AE}$.
Pruébese: $\triangle ABN \cong \triangle EDN$.



16. Dado: $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
$\overline{PR}$ biseca a $\overline{SQ}$
$\overline{SQ}$ biseca a $\overline{PR}$.
Pruébese: $\triangle PQT \cong \triangle RST$.

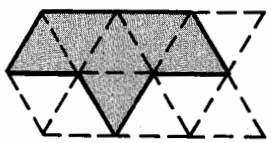


17. Dado: $\angle E \cong \angle N$
S biseca a $\overline{EN}$
$\overline{EA} \cong \overline{NY}$.
Pruébese: $\triangle EAS \cong \triangle NYS$.

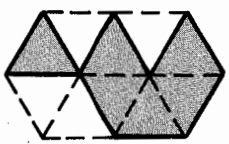


ACTIVIDADES

Un «hexadiamante» es un polígono formado con seis triángulos equiláteros.

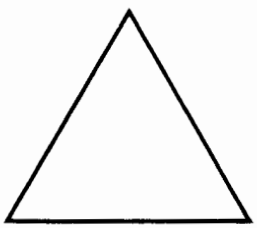


Este es un «hexadiamante»



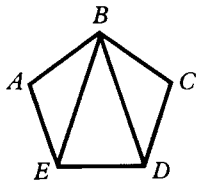
Este no es un «hexadiamante»

Dibújense y córtense seis copias de este triángulo equilátero en un trozo de cartulina. Experiméntese con estos seis triángulos para descubrir doce «hexadiamantes» de formas diferentes. Dibújense los doce polígonos.

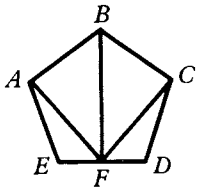


C.

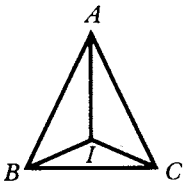
18. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\triangle AEB \cong \triangle CDB$.



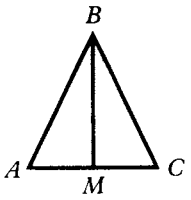
19. Dado: $\overline{BF}$ biseca a $\angle ABC$
$ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle CBF$.



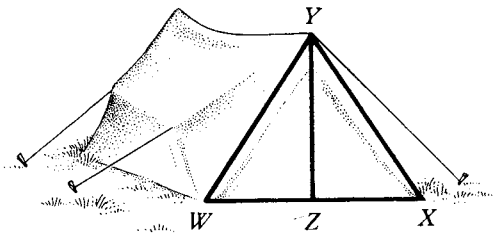
20. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{AI}$ biseca a $\angle BAC$.
Pruébese: $\triangle AIB \cong \triangle AIC$.



21. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
M es el punto medio de $\overline{AC}$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.



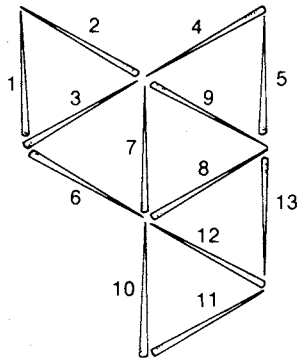
22. El poste $\overline{YZ}$ de una tienda de campaña es perpendicular al suelo. ¿Qué otras condiciones han de cumplirse para asegurar que los lados $\overline{YW}$ e $\overline{YX}$ son de igual longitud?



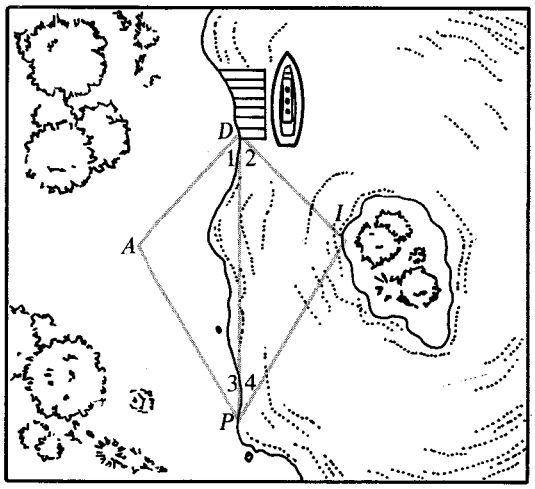
SOLUCION DE PROBLEMAS

Este dibujo muestra 13 palillos dispuestos para formar seis triángulos. ¿Qué tres palillos pueden quitarse para que queden tres triángulos?

Invéntese un problema con palillos similar a éste.



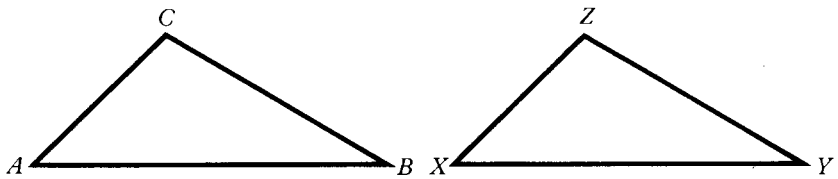
3.6 Prueba de la congruencia de ángulos y segmentos



Un ingenioso estudiante de geometría (que era un buen nadador, pero no *demasiado* bueno), usó este método para encontrar la distancia entre el muelle y la isla:

Elíjase un punto P en la orilla del río. Constrúyase $\angle 1 \cong \angle 2$ y hágase también que $\angle 3 \cong \angle 4$. Localícese visualmente el punto de intersección A de los lados de los ángulos 1 y 3. ¿Por qué la distancia del muelle a la isla (DI) es la misma que DA?

Para responder a esta pregunta, recuérdese la definición de triángulos congruentes (Sec. 3.1).



$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ significa que lo siguiente es verdadero:

$\overline{AB} \cong \overline{XY}$ $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ $\angle A \cong \angle X$ $\angle B \cong \angle Y$ $\angle C \cong \angle Z$.

Con frecuencia se prueba que un par de segmentos o ángulos son congruentes probando antes que un par de triángulos son congruentes. Luego se puede usar la definición de triángulos congruentes para concluir que las partes de los triángulos que se corresponden son congruentes.

En el problema del muelle y la isla, $\triangle DAP \cong \triangle DIP$ por el postulado de la congruencia ALA. Dado que $\overline{DA}$ y $\overline{DI}$ son partes correspondientes de estos triángulos, $\overline{DA} \cong \overline{DI}$.

Para probar la congruencia de ángulos o segmentos, a veces se puede:

1. seleccionar triángulos que contengan estos segmentos (o ángulos);
2. probar que los triángulos son congruentes;
3. concluir que las partes correspondientes deseadas de estos triángulos son congruentes.

Al formular pruebas, se da la siguiente razón para el tercer paso.

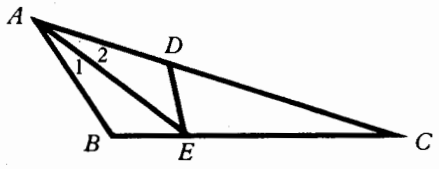
Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

Abreviado, esto es:

Partes correspondientes de $\triangle \cong$ son $\cong$, o **PCTCC**.

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1 **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.

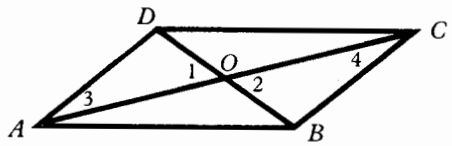


Análisis: «Se puede probar que $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ si es posible encontrar un par de triángulos congruentes que contengan estos segmentos. $\triangle ABE$ y $\triangle ADE$ parecen contenerlos. ¿Qué postulado de congruencia se puede usar para probar que son congruentes? Inténtese con LAL. Como se sabe que $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y que $\overline{AE} \cong \overline{AE}$, puede probarse que los triángulos son congruentes y concluir que $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.»

Prueba

Afirmarciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.	1. Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$.	2. Dado.
3. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$.	3. ¿Por qué?
4. $\triangle ABE \cong \triangle ADE$.	4. Postulado LAL.
5. $\overline{BE} \cong \overline{DE}$.	5. Partes correspondientes de $\triangle \cong$ son $\cong$.

Ejemplo 2 **Dado:** $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\angle 3 \cong \angle 4$.



Análisis: «$\angle 3$ y $\angle 4$ están en $\triangle AOD$ y $\triangle BOC$, respectivamente, y en $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$, respectivamente. Por la información dada, parece que se debe probar que $\triangle AOD$ es congruente con $\triangle COB$. (¿Por qué?) Entonces, puede concluirse que $\angle 3$ es congruente con $\angle 4$.»

Prueba

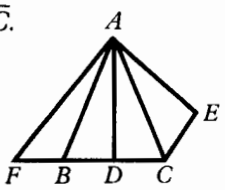
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.	1. Dado.
2. $\overline{AO} \cong \overline{CO}$; $\overline{OB} \cong \overline{OD}$.	2. Definición de la bisectriz del segmento.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. Dado.
4. $\triangle AOD \cong \triangle COB$.	4. Postulado LAL.
5. $\angle 3 \cong \angle 4$.	5. PCTCC.

EJERCICIOS

A.

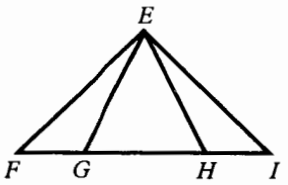
En los ejercicios 1 a 5, indíquese qué triángulos puede demostrarse que son congruentes para establecer el hecho indicado. (En algunos casos puede haber más de un par de triángulos correctos.)

1. Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



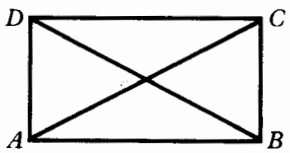
2. Pruébese: $\angle F \cong \angle I$.

3. Pruébese: $\overline{EG} \cong \overline{EH}$.

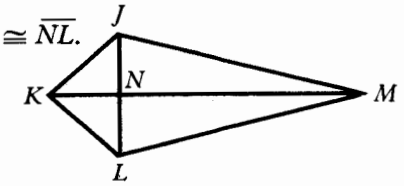


(Ejercicios 2,3)

4. Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

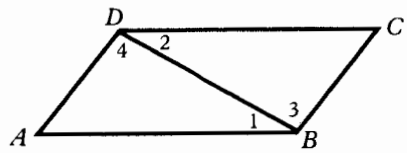


5. Pruébese: $\overline{JN} \cong \overline{NL}$.



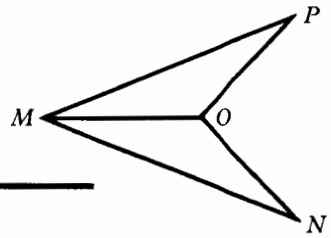
En los ejercicios 6 a 8, formúlense las proposiciones y razones que faltan.

6. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.



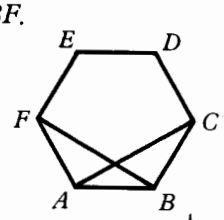
Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 2$.	1. ?
2. ?	2. Dado.
3. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$.	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle ADB \cong \triangle CBD$.	4. ?
5. $\angle A \cong \angle C$.	5. ?

7. Dado: $\overline{MN} \cong \overline{MP}$
$\overline{NO} \cong \overline{OP}$.
Pruébese: $\overline{MO}$ biseca $\angle NMP$.



Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MN} \cong \overline{MP}$; $\overline{NO} \cong \overline{OP}$.	1. ?
2. ?	2. ?
3. $\triangle MNO \cong \triangle MPO$.	3. ?
4. ?	4. PCTCC.
5. $\overline{MO}$ biseca a $\angle NMP$.	5. ?

8. Dado: $ABCDEF$ es un hexágono regular.
Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BF}$.

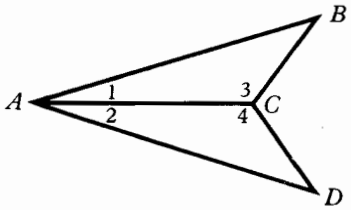


Afirmaciones	Razones
1. $ABCDEF$ es un hexágono regular.	1. Dado.
2. $\overline{AF} \cong \overline{BC}$.	2. ?
3. ?	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\angle FAB \cong \angle ABC$.	4. ?
5. $\triangle FAB \cong \triangle CBA$.	5. ?
6. ?	6. PCTCC.

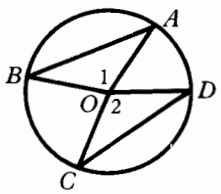
B.

En los ejercicios restantes, formúlense pruebas a dos columnas.

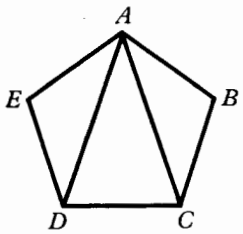
9. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



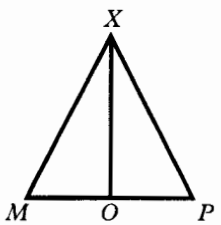
10. Dado: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ son congruentes
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



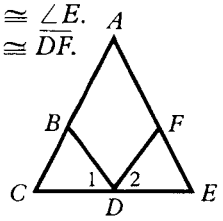
11. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\triangle ADC$ es isósceles.



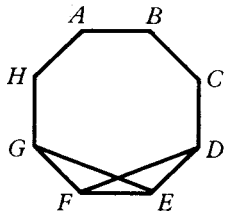
12. Dado: $\overline{XO}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{MP}$.
Pruébese: $\triangle XMP$ es isósceles.



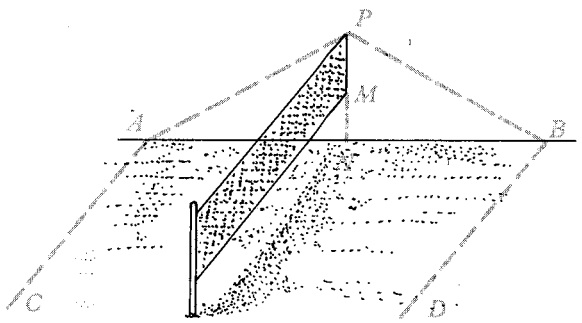
13. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
D biseca a $\overline{CE}$
$\angle C \cong \angle E$.
Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{DF}$.



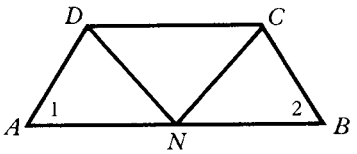
14. Dado: $ABCDEFGH$ es un octágono regular.
Pruébese: $\overline{DF} \cong \overline{GE}$



15. En un gimnasio, el extremo de una red de voleibol está sujeto a la pared con dos argollas en los puntos P y M. Cada punto del plano de la red está a una distancia igual de las dos líneas de base $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Por qué es $\overleftrightarrow{PM}$ perpendicular a $\overline{AB}$?



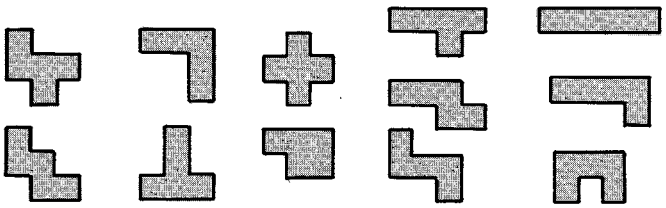
16. Dado: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
N es el punto medio de $\overline{AB}$.
Pruébese: $\triangle CND$ es isósceles.

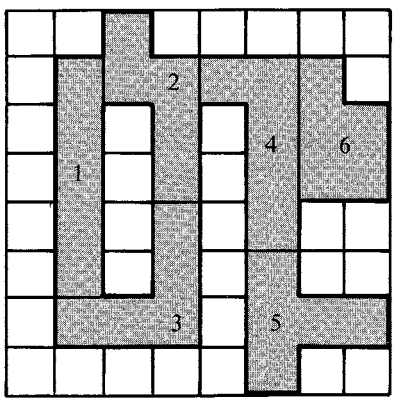


ACTIVIDADES

Háganse estos 12 «pentaminós» con cuadrados del tamaño de los de un tablero de ajedrez.

En esta figura, se dispusieron seis «pentaminós» de forma que ninguna de las piezas restantes se puede adaptar al tablero sin solape. Inténtese esto mismo con diferentes juegos de seis piezas.

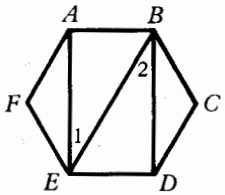




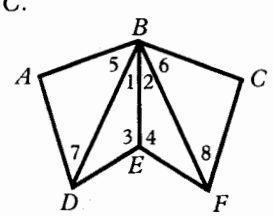
C.

En los ejercicios 17 a 20, puede ser necesario probar que hay más de un par de triángulos congruentes.

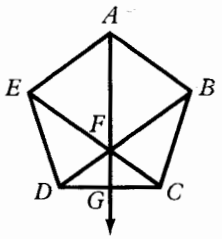
17. Dado: $ABCDEF$ es un hexágono regular.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.
(*Sugerencia:* Pruébese primero que $\overline{AE} \cong \overline{BD}$.)



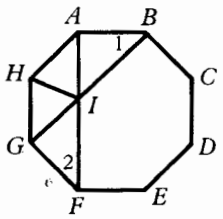
18. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
$\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle C$.



19. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular
$\overrightarrow{AG}$ biseca a $\angle EAB$ y es la bisectriz perpendicular de $\overline{DC}$.
Pruébese: $\triangle BCF \cong \triangle EDF$.

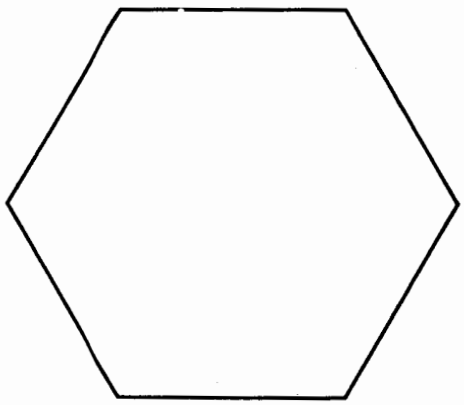


20. Dado: $ABCDEFGH$ es un octágono regular
$\overline{AF} \perp \overleftrightarrow{AB}$; $\overline{BG} \perp \overline{GF}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle AHI \cong \triangle GHI$.

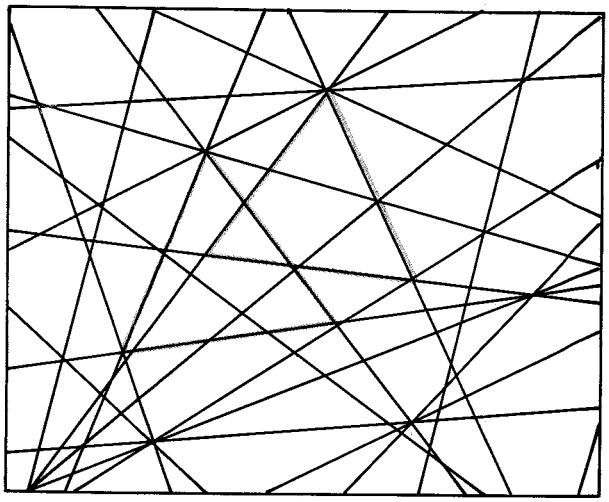


SOLUCION DE PROBLEMAS

Muéstrese cómo cortar un hexágono regular en 18 cometas congruentes. Una cometa es un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados adyacentes congruentes. (*Sugerencia:* Trácense todas las diagonales del hexágono y después trácense otros seis segmentos cortos colocados estratégicamente.)



3.7 Pruebas: Solape de triángulos



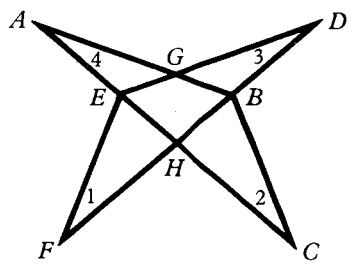
Un «rompecabezas» muy popular consiste en hallar un par de triángulos equiláteros congruentes en esta figura y en dibujarlos en un papel aparte. Resuélvase este problema.

En las pruebas, sucede con frecuencia que varios triángulos se solapan, lo cual hace difícil identificar a primera vista los triángulos que podrían ser más útiles para probar la congruencia. En ocasiones, es útil separar los triángulos mentalmente o dibujándolos, para ayudar a analizar la prueba, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1

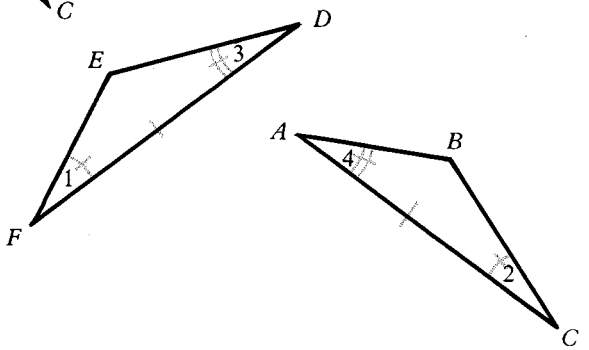
Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\angle 3 \cong \angle 4$.

Pruébese: $\overline{EF} \cong \overline{BC}$.



Análisis: «Es necesario escoger un par de triángulos que contengan $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$. ¿Qué sucede con $\triangle EFH$ y $\triangle BCH$? No se puede probar que son congruentes. Inténtese con $\triangle EFD$ y $\triangle BCA$. Estos dos triángulos son congruentes por el postulado ALA, y se puede concluir que $\overline{EF} \cong \overline{BC}$.»

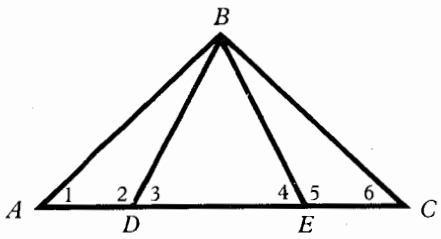
En los ejercicios se pedirá completar esta prueba.



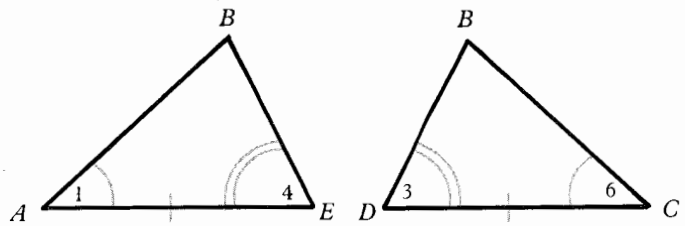
Ejemplo 2

Dado: $\angle 1 \cong \angle 6$.
$\angle 3 \cong \angle 4$.
$\overline{AE} \cong \overline{CD}$.

Pruébese: $\angle ABE \cong \angle CBD$.



Análisis: «Los triángulos solapados $\triangle ABE$ y $\triangle CBD$ contienen dos pares de ángulos congruentes. Los lados incluidos también son congruentes. Se puede usar el postulado ALA para probarlo.»

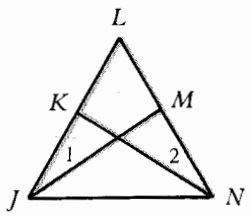


A veces es útil emplear lápices de colores para marcar los triángulos solapados. Estúdiese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Dado: $\triangle LJN$ es isósceles con $\overline{JL} \cong \overline{LN}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $\overline{LK} \cong \overline{LM}$.

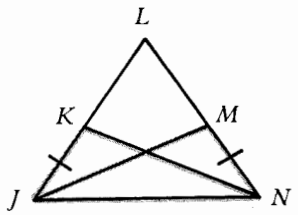


Análisis: «Se puede probar que $\overline{LK} \cong \overline{LM}$ si estos segmentos son partes correspondientes de los triángulos congruentes. Se intenta con $\triangle LKN$ y $\triangle LMJ$. Se sabe que $\angle 1 \cong \angle 2$ y que $\angle JLN$ es congruente consigo mismo. Se sabe que $\triangle JLN$ es isósceles. Así, los triángulos son congruentes por el postulado ALA. Puede probarse.»

Ejemplo 4

Dado: $\overline{JK} \cong \overline{NM}$
$\angle KJN \cong \angle MNJ$.

Pruébese: $\overline{KN} \cong \overline{MJ}$.



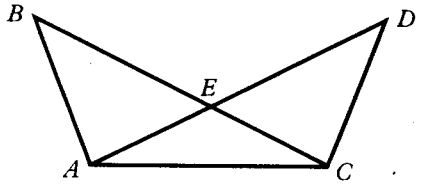
Análisis: «$\overline{KN}$ y $\overline{MJ}$ son partes correspondientes de $\triangle LKN$ y LMJ, como en el ejemplo anterior. Pero la información dada es parte de $\triangle KJN$ y de $\triangle MNJ$. Como $\overline{JN}$ es congruente consigo mismo, puede probarse por LAL que $\triangle KJN \cong \triangle MNJ$.»

EJERCICIOS

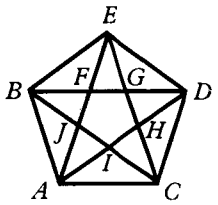
A.

En los ejercicios 1 y 2, cítense todos los pares de triángulos (solapados y no solapados) que parezcan congruentes. Empléense los vértices A y B en un triángulo, y los C y D, en otro.

1.



2.



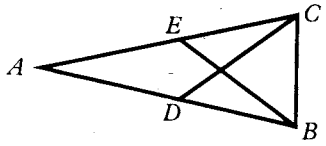
B.

3. Formúlese una prueba completa a dos columnas para el ejemplo 1.

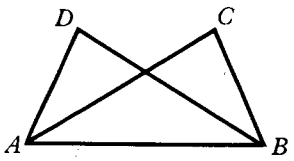
4. Formúlese una prueba completa a dos columnas para el ejemplo 3.

Formúlese una prueba completa a dos columnas para los ejercicios 5 a 10.

5. Dado: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$
$\angle ABC \cong \angle ACB$.
Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.



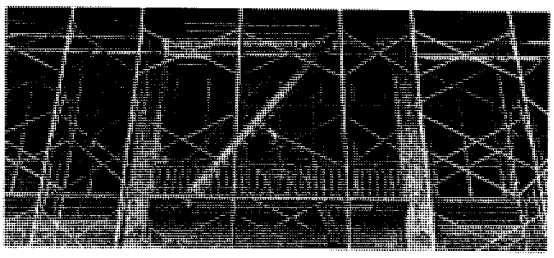
6. Dado: $\angle DAB \cong \angle CBA$
$\angle DBA \cong \angle CAB$.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

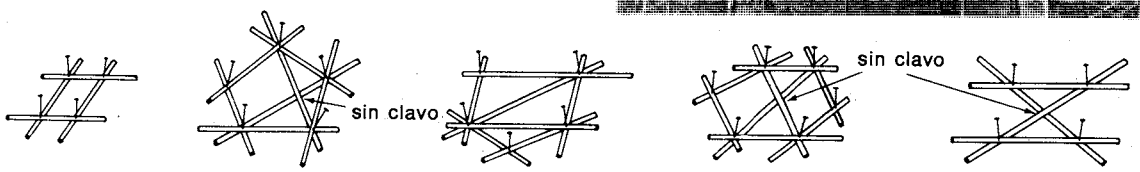


ACTIVIDADES

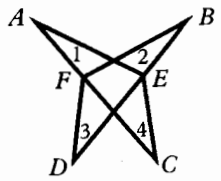
Los triángulos se utilizan mucho en los andamiajes porque son figuras rígidas. Tres varillas unidas con clavos mantendrán su forma aunque se las cambie de lugar.

¿Cuáles de estas estructuras son rígidas? Constrúyanse modelos para comprobar las respuestas.

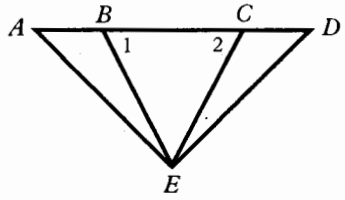




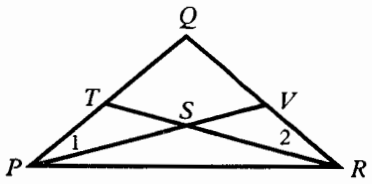
7. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{BF}$.



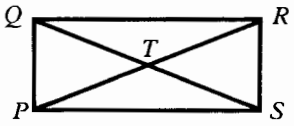
8. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{BE} \cong \overline{EC}$
$\angle AEC \cong \angle BED$.
Pruébese: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$.



9. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$
$\overline{PV} \cong \overline{TR}$.
Pruébese: $\overline{QT} \cong \overline{QV}$.

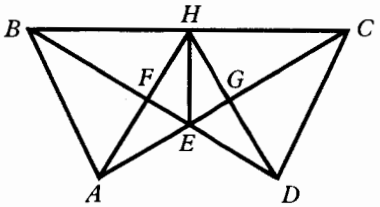


10. Dado: $PQRS$ con $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\angle RQP$ y $\angle QRS$ son ángulos rectos.
Pruébese: $\overline{QS} \cong \overline{RP}$
(es decir, las diagonales son congruentes).

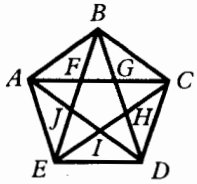


C.

11. Dado: $\overline{HF} \perp \overline{BD}$, $\overline{HG} \perp \overline{AC}$
$\overline{HF} \cong \overline{HG}$.
Pruébese: $\overline{AG} \cong \overline{DF}$.

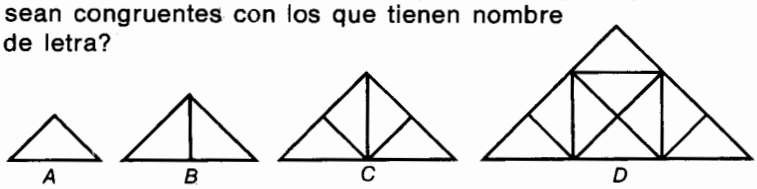


12. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{EB}$.

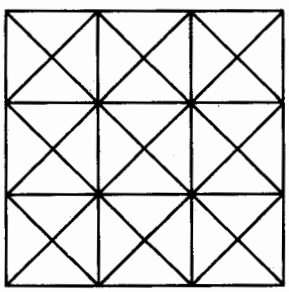


SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántos triángulos diferentes hay en esta figura que sean congruentes con los que tienen nombre de letra?



Si se observan otros tipos de triángulos en la figura, dibújense.

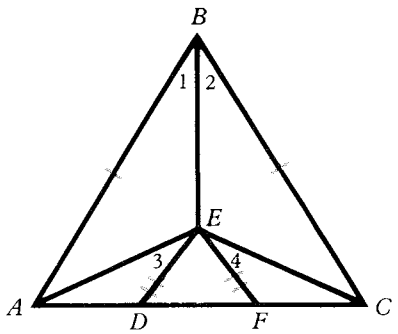


3.8 Pruebas: cadenas de congruencias

Para formular ciertas pruebas, ha de probarse antes la congruencia de un par de triángulos, a fin de obtener la información necesaria para probar que un segundo par de triángulos es congruente.

Estúdiese el ejemplo siguiente y expónganse los pasos omitidos.

Ejemplo **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{CB}$
$\overline{ED} \cong \overline{EF}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4.$
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{CF}.$



Análisis: «Podría probarse que $\overline{AD} \cong \overline{CF}$ si fuera posible probar que $\triangle AED \cong \triangle CEF$, pero no hay suficiente información para eso. Si se supiera que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$, podría probarse que los triángulos son congruentes por LAL. Pero $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ son partes correspondientes de $\triangle ABE$ y $\triangle CBE$, así que se puede probar que los triángulos son congruentes.»

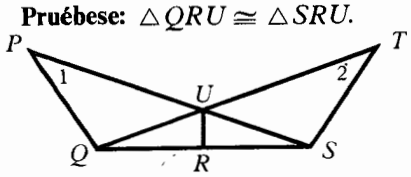
Prueba

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}.$	**1.** Dado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2.$	**2.** ¿Por qué?
3. $\overline{BE} \cong \overline{BE}.$	**3.** ¿Por qué?
4. $\triangle ABE \cong \triangle CBE.$	**4.** Postulado LAL.
5. $\overline{AE} \cong \overline{CE}.$	**5.** ¿Por qué?
6. $\angle 3 \cong \angle 4.$	**6.** Dado.
7. $\overline{DE} \cong \overline{FE}.$	**7.** Dado.
8. $\triangle AED \cong \triangle CEF.$	**8.** ¿Por qué?
9. $\overline{AD} \cong \overline{CF}.$	**9.** PCTCC.

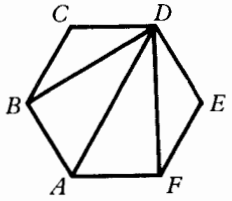
Obsérvese que los pasos 1 a 4 prueban la congruencia de un par de triángulos. Los pasos 5 a 8 emplean la primera congruencia para probar la de un segundo par de triángulos.

EJERCICIOS

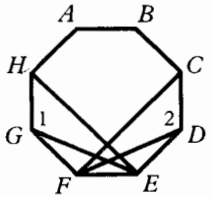
1. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{UR}$ biseca $\overline{QS}$
$\overline{PU} \cong \overline{TU}$, $\angle PUQ \cong \angle TUS$
Pruébese: $\triangle QRU \cong \triangle SRU$.



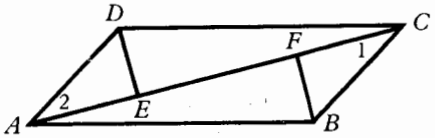
2. Dado: $ABCDEF$ es un hexágono regular.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle AFD$.



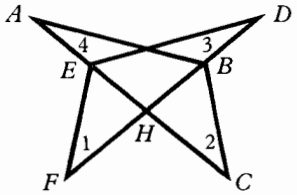
3. Dado: $ABCDEFGH$ es un octágono regular
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{CF} \cong \overline{HE}$.



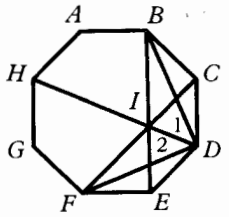
4. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle AED \cong \angle CFB$
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



5. Dado: $\overline{EH} \cong \overline{BH}$
$\overline{AH} \cong \overline{DH}$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{EF} \cong \overline{BC}$.

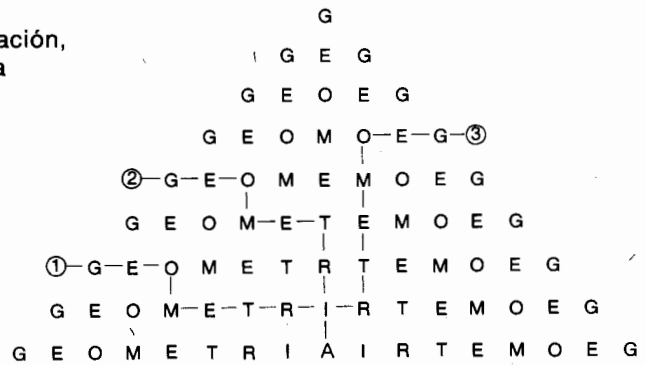


6. Dado: $ABCDEFGH$ es un octágono regular. $\overline{DH}$ biseca a $\angle CDE$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle BCI \cong \triangle FEI$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

En el diseño que se muestra a continuación, ¿cuántas veces puede leerse la palabra «Geometría»? Se indican tres formas.



(*Sugerencia:* ¿De cuántas formas pueden leerse palabras de dos, tres y cuatro letras en un diseño similar? Búsquese un esquema.)

Capítulo 3 Conceptos importantes

Términos

Triángulos congruentes (pág. 301)

Postulados

Postulado de la congruencia LAL. Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Postulado de la congruencia ALA. Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Postulado de la congruencia LLL. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

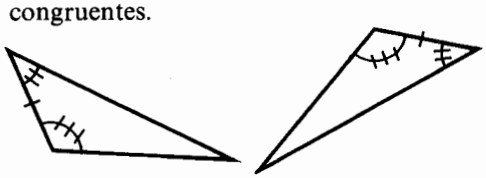
Proposiciones

Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

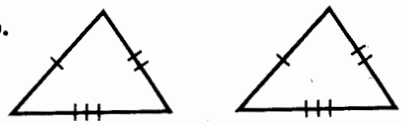
Capítulo 3 Resumen

1. Dado $\triangle BAC \cong \triangle QRP$, identifíquense los lados y ángulos correspondientes.
2. En los siguientes casos, dígase qué postulado sobre la congruencia puede emplearse para demostrar que los triángulos son congruentes.

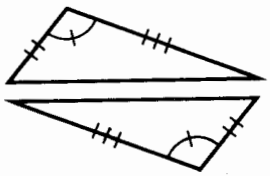
a.



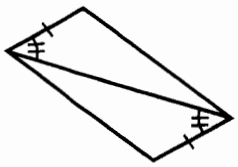
b.



c.

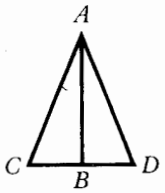


d.

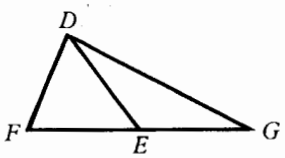


3. En cada uno de los casos siguientes, sáquese una conclusión basada en los datos proporcionados.

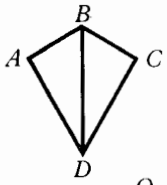
a. Dado: $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{CD}$.



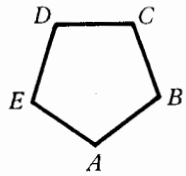
b. Dado: E es el punto medio de $\overline{FG}$.



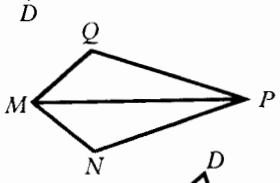
c. Dado: $\overline{BD}$ biseca tanto a $\angle B$ como a $\angle D$.



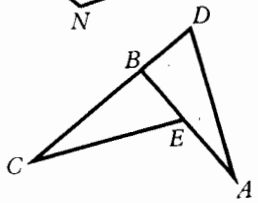
d. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.



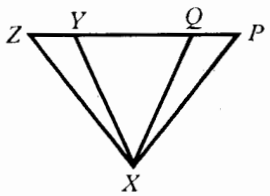
4. **Dado:** $\overline{MP}$ biseca a $\angle QMN$
   $\overline{MP}$ biseca a $\angle QPN$.
   Pruébese: **a.** $\triangle MQP \cong \triangle MNP$.
   b. $\angle Q \cong \angle N$.



5. **Dado:** $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
   $\overline{BE} \cong \overline{BD}$
   $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.
   Pruébese: $\overline{CE} \cong \overline{AD}$.



6. **Dado:** $\overline{ZQ} \cong \overline{PY}$
   $\angle Z \cong \angle P$
   $\overline{ZX} \cong \overline{PX}$.
   Pruébese: $\overline{XY} \cong \overline{XQ}$.



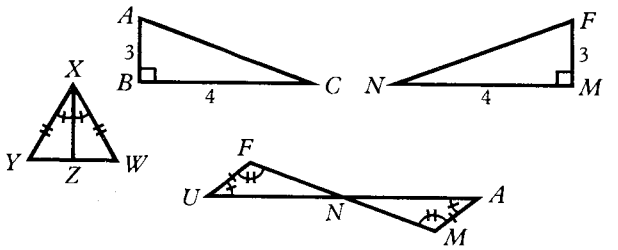
Capítulo 3 Examen

1. Utilícense las figuras para completar las proposiciones.

a. $\triangle ABC \cong$?

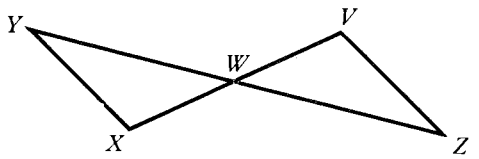
b. $\triangle XYZ \cong$?

c. $\triangle FUN \cong$?

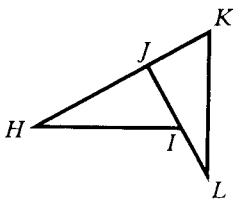


2. En los casos siguientes, sáquese una conclusión basada en los datos proporcionados.

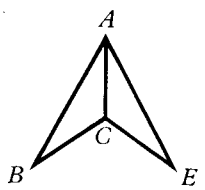
a. Dado: W es el punto medio de $\overline{YZ}$ y de $\overline{XV}$.



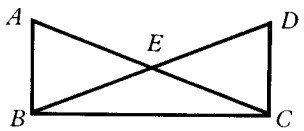
b. Dado: $\overline{JI} \perp \overline{HK}$.



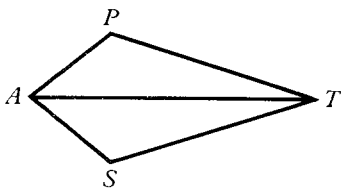
c. Dado: $\overline{AC}$ biseca a $\angle BAE$.



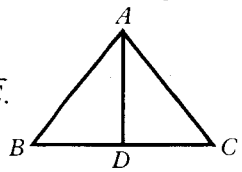
d. Dado: $\overline{AC}$ biseca a $\overline{BD}$
$\overline{BD}$ biseca a $\overline{AC}$.



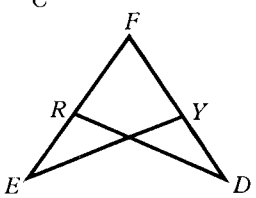
3. Dado: $\overline{PA} \cong \overline{SA}$
$\overline{PT} \cong \overline{TS}$.
Pruébese: **a.** $\triangle PAT \cong \triangle SAT$.
b. $\angle P \cong \angle S$.



4. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
D es el punto medio de $\overline{BC}$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



5. Dado: $\overline{FE} \cong \overline{FD}$
$\angle E \cong \angle D$.
Pruébese: $\overline{EY} \cong \overline{DR}$.



Resumen global (Caps. 1 a 3)

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
   a. Los postulados son proposiciones que deben demostrarse.
   b. Un rayo puede contener una recta.
   c. Los teoremas se prueban por razonamiento deductivo.

2. Dibújese un triángulo ABC de manera que $\angle B$ sea obtuso. Trácese una recta que pase por B y sea perpendicular a $\overline{AC}$.

En los ejercicios 3 y 4, clasifíquense los razonamientos en inductivos o deductivos.

3. $\angle 1$ y $\angle 2$ se denominan ángulos rectos.
   Los ángulos rectos son congruentes.
   $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes.

4. $ABCD$ es un cuadrado y tiene diagonales perpendiculares.
   $EFGH$ es un cuadrado y tiene diagonales perpendiculares.
   Todos los cuadrados tienen diagonales perpendiculares.

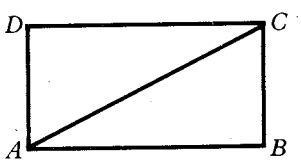
En los ejercicios 5 y 6, formúlese la conclusión correcta o escríbase «no hay conclusión posible».

5. Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ determinan un plano.
   $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ determinan un plano.
   Por tanto, $\underline{?}$.

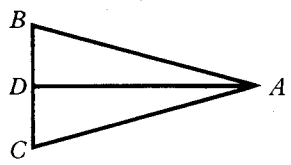
6. Si $ABCD$ es un cuadrado, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
   $ABCD$ es un cuadrado.
   Por tanto, $\underline{?}$.

7. Considérese la proposición:
   Si dos rectas son paralelas, entonces no son perpendiculares.
   a. Formúlese la recíproca de la proposición.
   b. Formúlese la inversa de la proposición.
   c. Formúlese la contrarrecíproca de la proposición.
   d. Dense contraejemplos para las proposiciones que no son verdaderas.

8. **Dado:** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.
   Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



9. **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$.
   Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

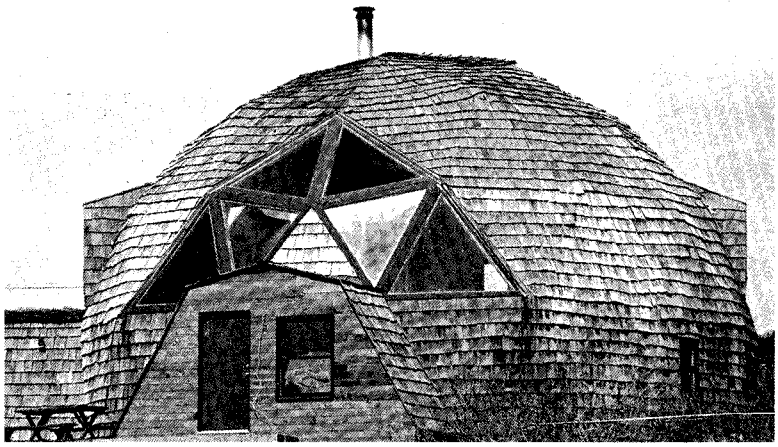


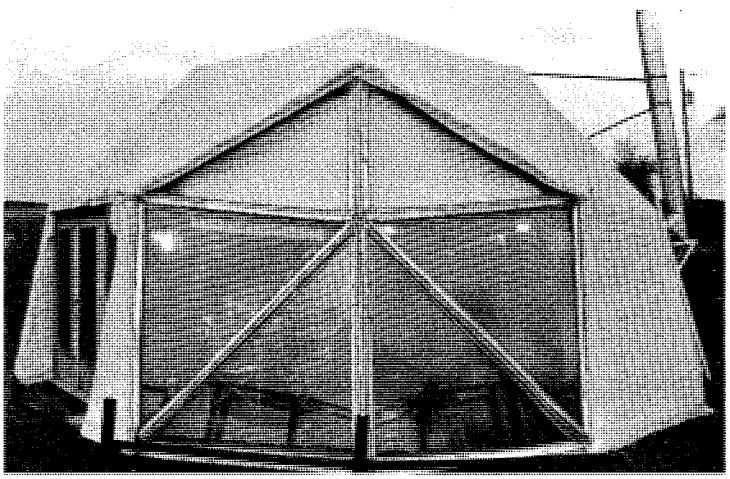
LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Arquitectura: domos geodésicos

Los domos geodésicos fueron introducidos por R. Buckminster Fuller. Sus planos para una clase de domo, llamado *domo solar,* pueden encontrarse en la revista *Popular Science* de mayo de 1966.

Se han construido domos de diferentes tamaños y formas con muy diversos materiales. Se utilizan domos como invernaderos, cubiertas de piscinas e, incluso, viviendas. En las fotografías se muestra una vivienda domo de Colorado, y un domo que puede habilitarse como tienda de campaña.





Los domos geodésicos se hacen lo más parecidos posible a porciones de esferas. Dos de las razones son que la esfera encierra el mayor volumen con la menor superficie, y que es la figura más resistente.

Un tipo estándar de domo se basa en un sólido llamado *icosaedro.* Elabórese un modelo de icosaedro con cartulina o con palillos e hilo y un patrón de 20 triángulos equiláteros.

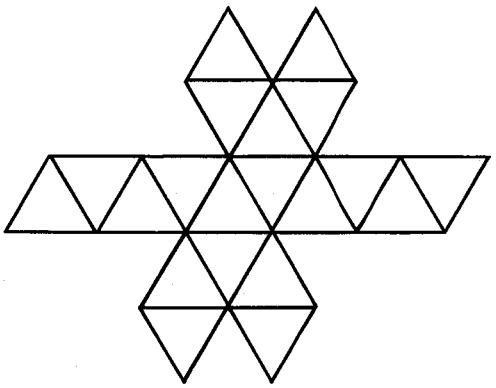
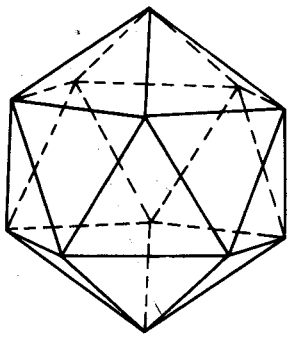


Fig. 1 Patrón para un icosaedro



icosaedro

Si se quitan los cinco triángulos de la base, resulta una estructura de domo.

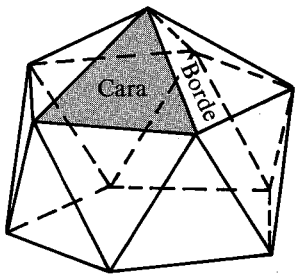


Figura 2

En una estructura de domo real, cada uno de los triángulos equiláteros de la figura 2 se divide en triángulos más pequeños, como se muestra en la figura 3. Para que la forma del domo sea más parecida a una esfera, las piezas utilizadas para formar los triángulos se hacen de diferentes longitudes. Las piezas del tipo *C* son ligeramente más largas que las del tipo *B*, y éstas son un poco más largas que las del tipo *A*.

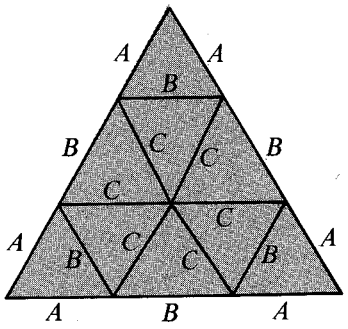


Fig. 3 Cara de un icosaedro dividida en 9 triángulos.

1. ¿Cuántas piezas de los tipos *A*, *B* y *C* se necesitan para completar el domo de la figura 2?
2. ¿Cuántos triángulos de lados *A*, *A*, *B* y *B*, *C*, *C* hay en este domo?

TEMA 8

Prueba de teoremas mediante propiedades básicas

CAPÍTULO 4

4.1 Pasos para la prueba de un teorema 346

4.2 Uso de la propiedad de suma y resta de iguales 354

4.3 Prueba de teoremas: uso de suplementos y complementos 360

4.4 Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales 366

4.5 Prueba de teoremas: uso de ángulos exteriores 370

4.6 Uso de la prueba indirecta 374

Conceptos importantes 380

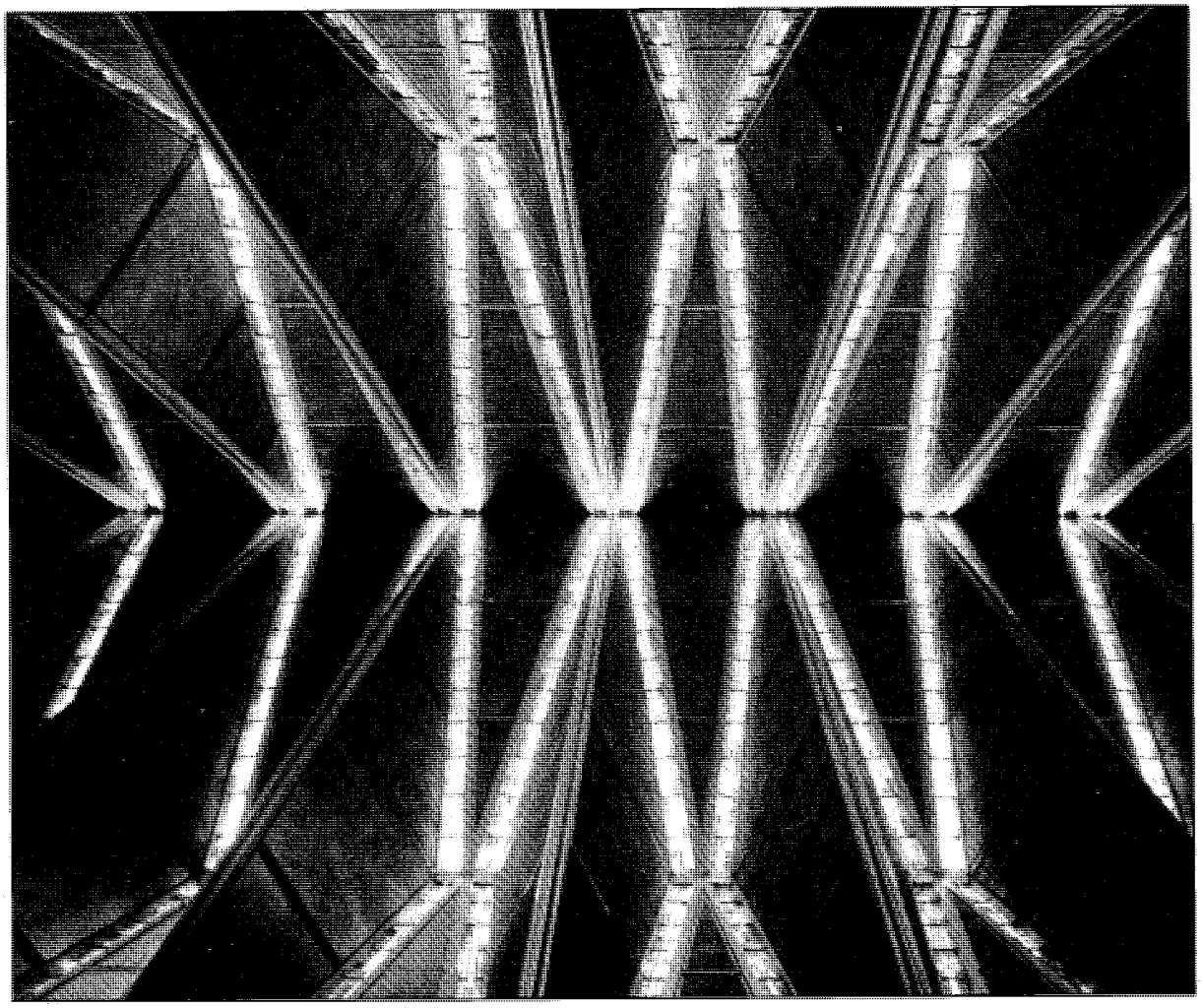
Resumen 381

Examen 382

Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-I 383

Prueba de teoremas mediante propiedades básicas



4.1 Pasos para la prueba de un teorema

© 1958 United Feature Syndicate, Inc.

En el capítulo 2, se dijo que un teorema es una generalización que puede probarse con definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo.

En el capítulo 3, se usó el razonamiento deductivo para formular pruebas sobre triángulos congruentes.

En esta sección, se empezará usando este proceso de razonamiento para probar teoremas.

El proceso de seis pasos para probar un teorema se ilustrará en esta sección con diversos ejemplos. El primer teorema está basado en las propiedades de los números resumidas antes.

Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva también son válidas para congruencias entre segmentos y ángulos, como se resume en la tabla siguiente.
Obsérvese la semejanza entre la propiedad reflexiva y la proposición «los perros son perros».

REPASO: Algunas propiedades de los números. Para cualquier número, a, b y c:

1. $a = a$ (propiedad reflexiva).
2. Si $a = b$, entonces $b = a$ (propiedad simétrica).
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ (propiedad transitiva).

Pasos para la prueba de un teorema

Paso 1 Si el teorema no tiene la forma si-entonces, debe ponerse en esta forma.

Paso 2 Dibújese y rotúlese un diagrama para mostrar las condiciones del teorema.

Paso 3 Escríbase lo dado a partir de la hipótesis (parte «si») de la proposición si-entonces.

Paso 4 Escríbase la prueba a partir de la conclusión (parte «entonces») de la proposición.

Paso 5 Analícese lo que se va a probar e idéese un plan.

Paso 6 Formúlese la prueba dando como razones definiciones, postulados o teoremas ya probados.

	Reflexiva	Simétrica	Transitiva
Congruencia entre ángulos	$\angle A \cong \angle A$	Si $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$.	Si $\angle A \cong \angle B$, y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$.
Congruencia entre segmentos	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.	Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

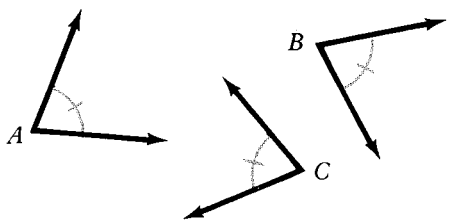
En realidad, esta tabla resume seis generalizaciones. Una de ellas se propone y prueba a continuación. Obsérvense los seis pasos para la prueba de un teorema.

Cuando $\angle A$ es congruente con $\angle B$ y $\angle B$ es congruente con $\angle C$, también es verdadero que $\angle A$ es congruente con $\angle C$.

PRUEBA

Paso 1 Si $\angle A$ es congruente con $\angle B$ y $\angle B$ es congruente con $\angle C$, entonces $\angle A$ es congruente con $\angle C$.

Paso 2



Paso 3 **Dado:** $\angle A \cong \angle B$.
$\angle B \cong \angle C$.

Paso 4 **Pruébese:** $\angle A \cong \angle C$.

Paso 5 Idéese un plan.

Si se consideran los datos como proposiciones sobre medición de ángulos, entonces se puede usar la propiedad transitiva de los números. Y por la definición de los ángulos congruentes se sabe que éstos tienen igual medida.

Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle B$.	**1.** Dado.
2. $m\angle A = m\angle B$.	**2.** Definición de ángulos congruentes.
3. $\angle B \cong \angle C$.	**3.** Dado.
4. $m\angle B = m\angle C$.	**4.** ¿Por qué?
5. $m\angle A = m\angle C$.	**5.** Propiedad transitiva de los números.
6. $\angle A \cong \angle C$.	**6.** ¿Por qué?

Podría formularse una prueba similar para las otras cinco proposiciones resumidas en la tabla. Combinando todas estas proposiciones, se establece el teorema siguiente.

Teorema 4.1 Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva son aplicables a la congruencia de ángulos y segmentos.

Los dos teoremas siguientes complementan la ilustración del proceso de seis pasos para la prueba de un teorema.

Teorema: Si los puntos A, B, C y D están sobre una recta de manera que B es el punto medio de $\overline{AC}$ y C es el punto medio de $\overline{BD}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PRUEBA

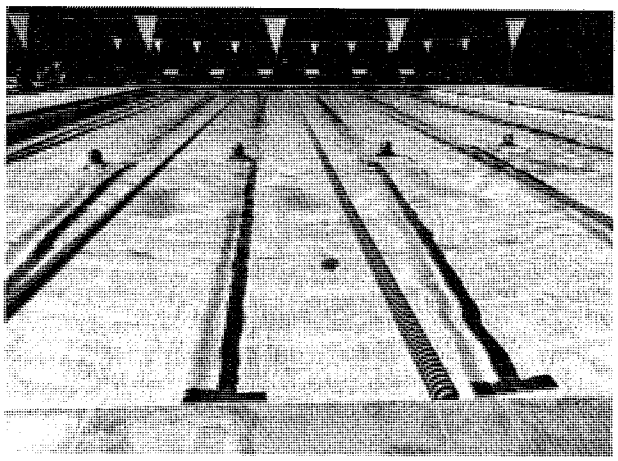
Paso 1 El primer paso está contenido en la proposición del teorema.

Paso 2

Paso 3 **Dado:** B es el punto medio de $\overline{AC}$
C es el punto medio de $\overline{BD}$.

Paso 4 **Pruébese:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Paso 5 Idéese un plan.
Se interpretará cada una de las proposiciones de los datos como una proposición sobre la congruencia de segmentos. Luego se utilizará el hecho de que la congruencia de segmentos satisface la propiedad transitiva.



Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. B es el punto medio de $\overline{AC}$.	**1.** Dado.
2. C es el punto medio de $\overline{BD}$.	**2.** ¿Por qué?
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.	**3.** Definición de punto medio.
4. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.	**4.** ¿Por qué?
5. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	**5.** Propiedad transitiva (Teorema 4.1).

En el paso 5, la razón es un teorema ya demostrado. Hasta aquí, se utilizaron los postulados, definiciones y datos como razones en las pruebas. La prueba anterior muestra que los teoremas ya probados también son una parte importante en el proceso del razonamiento deductivo.

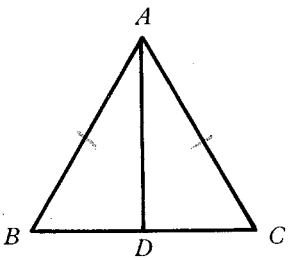
Cuando se diseña un plan para una prueba, han de revisarse las definiciones, postulados y teoremas ya probados.

Teorema 4.2 En un triángulo isósceles, el segmento que va del ángulo del vértice al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes.

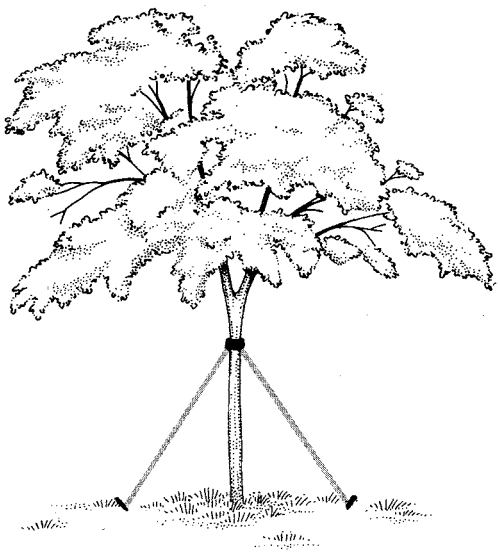
La proposición de este teorema es compleja suficiente como para ilustrar la importancia de los pasos 1 y 2 de este proceso de seis pasos.

PRUEBA

Paso 1 Si $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, y si D es el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



Paso 2



Paso 3 **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
D es el punto medio de $\overline{BC}$.

Paso 4 **Pruébese:** $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Paso 5 Idéese un plan.
Se usará la información proporcionada, la definición de punto medio y la propiedad reflexiva de la congruencia de un segmento junto con el postulado de la congruencia LLL.

Paso 6

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	1. Dado.
2. D es el punto medio de $\overline{BC}$.	2. Dado.
3. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.	3. Definición de punto medio.
4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	4. Propiedad reflexiva de la congruencia de un segmento (Teorema 4.1).
5. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.	5. Postulado de la congruencia LLL.

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 3, se presenta un teorema de la forma si-entonces. Hágase un dibujo y establézcanse los datos y la prueba usando el dibujo y sus nombres. *No se probará ningún teorema.*

1. Teorema. Si $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles, entonces $\triangle ABC$ tiene un par de ángulos congruentes.
2. Teorema. Si los puntos X, Y y Z son puntos medios de los lados de un triángulo $\triangle ABC$, entonces los segmentos $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ e $\overline{YZ}$ dividen $\triangle ABC$ en cuatro triángulos congruentes.
3. Teorema. Si X e Y son los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces XY es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

En los ejercicios 4 a 7, formúlese de nuevo el teorema en la forma si-entonces, dibújese un diagrama y establézcanse los datos y la prueba. *No se intentará probar los teoremas.*

4. Un triángulo equilátero es un triángulo isósceles.
5. Dos rectas intersecantes forman dos pares de ángulos congruentes.
6. Dos rectas intersecantes que no sean perpendiculares forman un par de ángulos obtusos.
7. La bisectriz de un ángulo del vértice de un triángulo equilátero es una bisectriz perpendicular de un lado.

Indíquese la propiedad de la congruencia entre ángulos o segmentos (reflexiva, simétrica o transitiva) ilustrada por cada una de las siguientes proposiciones.

8. Si dos segmentos son congruentes, la proposición de congruencia puede escribirse empezando por cualquiera de los dos segmentos.
9. Todo segmento es congruente consigo mismo.
10. Si un primer ángulo es congruente con otro y éste es congruente con un tercero, entonces el primer ángulo es congruente con el tercero.

En los ejercicios 11 a 14, empléense los datos y la prueba para hacer un dibujo. Luego formúlese un teorema general. *No se probará ninguno de estos teoremas.*

11. **Dado:** $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Pruébese: $\angle B \cong \angle C$.

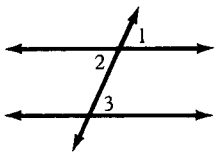
12. **Dado:** $\triangle ABC$ con $\angle B \cong \angle C$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

13. **Dado:** $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero.
Pruébese: $\angle A \cong \angle B \cong$ C.

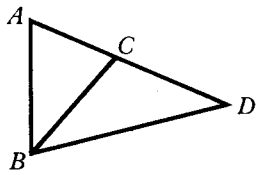
14. **Dado:** $\triangle ABC$ con $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero.

B.

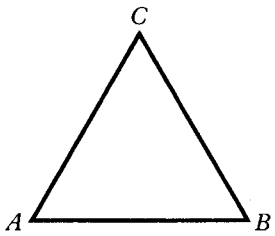
15. Si $\angle 1 \cong \angle 2$, y $\angle 2 \cong \angle 3$, ¿por qué $\angle 1 \cong \angle 3$?



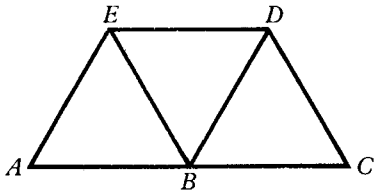
16. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, ¿por qué $\overline{AB} \cong \overline{CD}$?



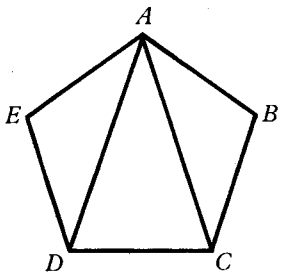
17. Si $AB = BC$ y $BC = AC$, ¿por qué se sabe que $\triangle ABC$ es equilátero?

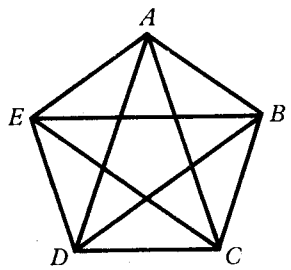


18. Si $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ y $\overline{ED} \cong \overline{BC}$, ¿por qué se sabe que B es el punto medio de $\overline{AC}$?

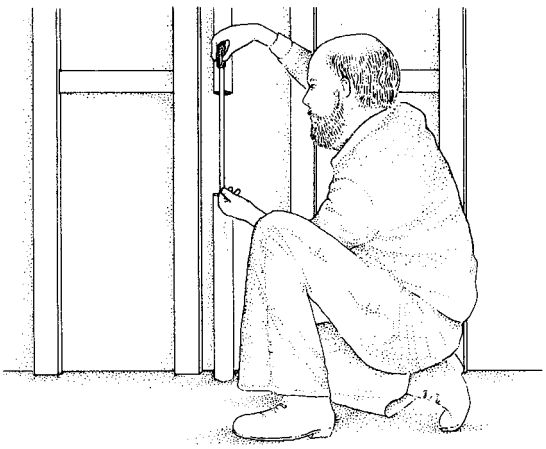


19. En un pentágono regular, dos diagonales del mismo vértice son congruentes. Por ejemplo, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ en la primera figura. Empléese este hecho con una propiedad transitiva para explicar por qué $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son congruentes en la segunda figura.





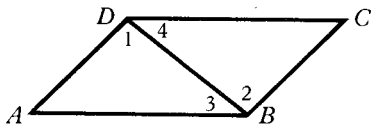
20. Un plomero está midiendo la longitud de $\overline{AB}$ para cortar un trozo de tubo de la longitud correcta. El tubo cortado se llama $\overline{CD}$. ¿Cómo demuestra la propiedad transitiva que el tubo $\overline{CD}$ se ajustará al espacio $\overline{AB}$? (*Sugerencia:* la medida es una parte importante del razonamiento.)



C.

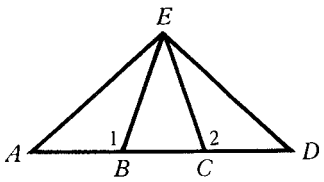
Formúlese una prueba completa a dos columnas para los ejercicios 21 y 22. Cada prueba requiere el uso de alguna de las propiedades de congruencia entre segmentos o ángulos especificadas en el teorema 4.1.

21.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

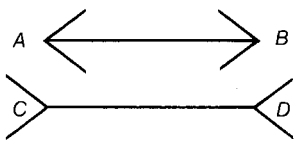
22.



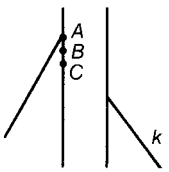
Dado: $\overline{BE} \cong \overline{CE}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
B es el punto medio de $\overline{AC}$
C es el punto medio de $\overline{BD}$.
Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle DCE$.

ACTIVIDADES

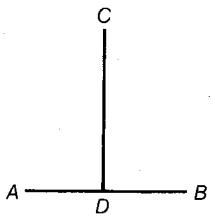
Estas «ilusiones ópticas» muestran por qué es más fiable el razonamiento lógico que la información visual. Respóndase a las preguntas y después compruébese midiendo.



a. ¿Qué distancia es más larga, A a B o C a D?



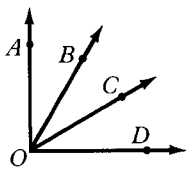
b. Si se prolonga la recta k, ¿llegará al punto A, al B, al C o a ninguno de ellos?



c. ¿Qué segmento tiene mayor longitud, $\overline{AB}$ o $\overline{CD}$?

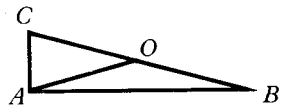
Créese una ilusión óptica propia.

23.



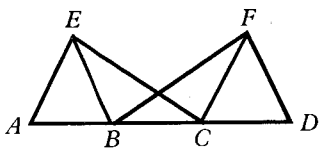
Dado: $\overrightarrow{OB}$ biseca a $\angle AOC$
$\overrightarrow{OC}$ biseca a $\angle BOD$.
Pruébese: $\angle AOB \cong \angle COD$.

24.



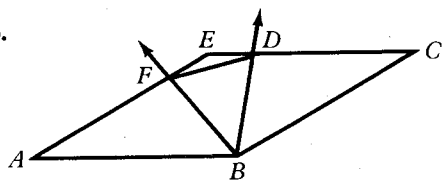
Dado: O es el punto medio de $\overline{BC}$
$\triangle AOB$ es isósceles con
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$.
Pruébese: $\triangle AOC$ es isósceles.

25.



Dado: $\triangle ACE \cong \triangle DBF$
B es el punto medio de $\overline{AC}$
C es el punto medio de $\overline{BD}$.
Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.

26.

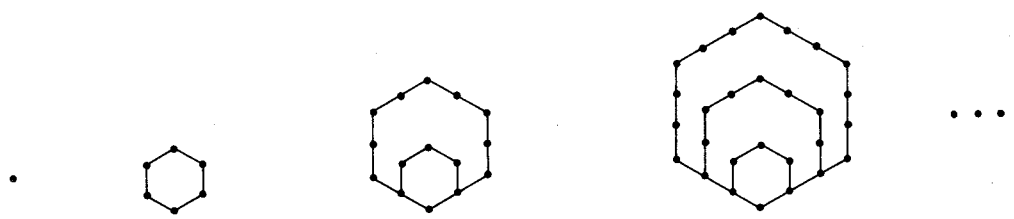


Dado: $ABCE$ tiene $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\triangle BDF$ es isósceles con
$\overline{BF} \cong \overline{BD}$
$\overrightarrow{BF}$ biseca a $\angle ABD$ y
$\overrightarrow{BD}$ biseca a $\angle CBF$.
Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle CBD$.

27. Pruébese: que la congruencia de triángulos satisface la propiedad transitiva.

28. Pruébese: que todos los ángulos rectos son congruentes.

SOLUCION DE PROBLEMAS



Las figuras muestran los cuatro primeros números hexagonales.

a. Dense los 2 números hexagonales siguientes. Muéstrense los patrones de puntos.

b. ¿Proporciona la fórmula $n(2n-1)$ el n-ésimo hexagonal?

4.2 Uso de la propiedad de suma y resta de iguales

Las propiedades de los números que se muestran a la derecha, son un repaso de álgebra.

Estas propiedades se usan en pruebas que contienen longitudes de segmentos y medidas de ángulos. Los dos teoremas que se presentan en esta sección ilustran el uso de estas propiedades.

En pruebas posteriores del libro, se usarán a menudo los teoremas, en lugar de las propiedades de los números.

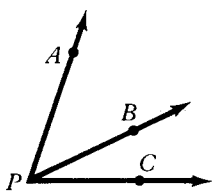
REPASO: Algunas propiedades de los números.

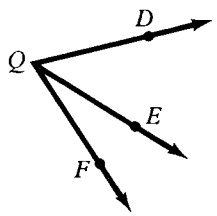
Suma de iguales: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
Resta de iguales: Si $a = b$, $c = d$, y $a > c$, entonces $a - c = b - d$.
Multiplicación de iguales: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$.
Principio de la sustitución: Si $a = b$, entonces a puede sustituirse por b en cualquier ecuación o desigualdad.

Teorema 4.3 **Suma de ángulos iguales.** Si $m\angle APB = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, $\overrightarrow{PB}$ está entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, y $\overrightarrow{QE}$ está entre $\overrightarrow{QD}$ y $\overrightarrow{QF}$, entonces $m\angle APC = m\angle DQF$.

PRUEBA

Dado: $m\angle APB = m\angle DQE$
$m\angle BPC = m\angle EQF$.
Pruébese: $m\angle APC = m\angle DQF$.



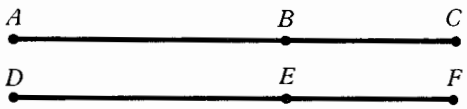


Afirmaciones	Razones
1. $m\angle APB = m\angle DQF$.	1. Dado.
2. $m\angle BPC = m\angle EQF$.	2. Dado.
3. $m\angle APB + m\angle BPC = m\angle DQE + m\angle EQF$.	3. Propiedad de la suma de iguales.
4. $m\angle APB + m\angle BPC = m\angle APC$.	4. Definición de «entre» para rayos.
5. $m\angle DQE + m\angle EQF = m\angle DQF$.	5. ¿Por qué?
6. $m\angle APC = m\angle DQF$.	6. Principio de la sustitución.

Por lo general, la información sobre qué rayos están entre otros, no se presenta en los datos; puede tomarse de las figuras. Esto mismo también es verdad para los puntos, como ilustra el siguiente teorema.

Teorema 4.4 **Resta de segmentos iguales.** Si $AC = DF$, $BC = EF$, B está entre A y C, y E está entre D y F, entonces $AB = DE$.

Dado: $AC = DF$
$BC = EF$.
Pruébese: $AB = DE$.



Afirmaciones	Razones
1. $AC = DF$.	1. Dado.
2. $BC = EF$.	2. Dado.
3. $AC = AB + BC$.	3. Definición de «entre» para puntos.
4. $DF = DE + EF$.	4. ¿Por qué?
5. $AB + BC = DE + EF$.	5. Principio de la sustitución.
6. $AB + BC - BC = DE + EF - EF$.	6. Propiedad de resta de iguales.
7. $AB + BC - BC = AB$.	7. Propiedades de álgebra.
8. $DE + EF - EF = DE$.	8. ¿Por qué?
9. $AB = DE$.	9. Principio de la sustitución.

Los dos teoremas siguientes se formulan sin demostración.

Teorema 4.5 **Suma de segmentos iguales.** Si $AB = DE$, $BC = EF$, B está entre A y C, y E está entre D y F, entonces $AC = DF$.

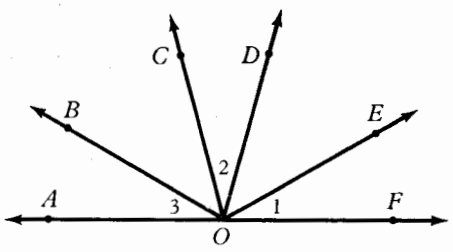
Teorema 4.6 **Resta de ángulos iguales.** Si $m\angle APC = m\angle DQF$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, $\overrightarrow{PB}$ está entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, y $\overrightarrow{QE}$ está entre $\overrightarrow{QD}$ y $\overrightarrow{QF}$, entonces $m\angle APB = m\angle DQE$.

EJERCICIOS

A.

Indíquese si las conclusiones de los ejercicios 1 a 6 están justificadas por la propiedad transitiva de la igualdad, el teorema de la suma de ángulos iguales o el teorema de la resta de ángulos iguales.

1. Si $m\angle 1 = m\angle 2$, y $m\angle 2 = m\angle 3$, entonces $m\angle 1 = m\angle 3$.
2. Si $m\angle COD = m\angle EOF$, entonces $m\angle COE = m\angle DOF$.
3. Si $m\angle BOD = m\angle COE$, entonces $m\angle BOC = m\angle DOE$.
4. Si $m\angle AOC = m\angle DOF$ y $m\angle 1 = m\angle 3$, entonces $m\angle BOC = m\angle DOE$.
5. Si $m\angle AOC = m\angle BOD$ y $m\angle BOD = m\angle DOE$, entonces $m\angle AOC = m\angle DOE$.
6. Si $m\angle AOD = m\angle FOC$ y $m\angle BOD = m\angle EOC$, entonces $m\angle AOB = m\angle FOE$.



(Ejercicios 1-6)

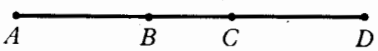
En los ejercicios 7 a 10, formúlese una propiedad, un teorema o una combinación de ambos que justifique las proposiciones dadas.

7. Si $BD = CE$, entonces $BC = DE$.
8. Si $AC = DF$, entonces $AD = CF$.
9. Si $BE = DF$, y $DF = AC$, entonces $CE = AB$.
10. Si $AB = EF$ y $BC = DE$, entonces $AD = CF$.

(Ejercicios 7-10)

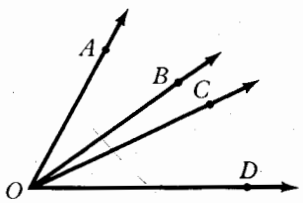
En los ejercicios 11 a 14, proporciónense todas las razones que faltan en las demostraciones.

11. **Dado:** $AB = CD$.
Pruébese: $AC = BD$.



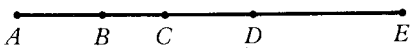
Afirmaciones	Razones
1. $AB = CD$.	1. Dado.
2. $BC = BC$.	2. ?
3. $AC = BD$.	3. ?

12. **Dado:** $m\angle AOC = m\angle BOD$.
Pruébese: $m\angle AOB = m\angle COD$.



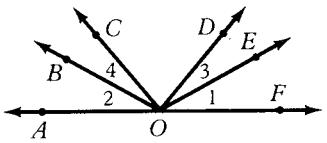
Afirmaciones	Razones
1. $m\angle AOC = m\angle BOD$.	1. Dado.
2. $m\angle BOC = m\angle BOC$.	2. ?
3. $m\angle AOB = m\angle COD$.	3. ?

13. Dado: $AB = CD$
$BD = DE.$
Pruébese: $AC = DE.$



Afirmaciones	Razones
1. $AB = CD.$	1. Dado.
2. $BD = DE.$	2. Dado.
3. $BC = BC.$	3. ?
4. $AC = BD.$	4. ?
5. $AC = DE.$	5. ?

14. Dado: $m\angle AOD = m\angle FOC$
$m\angle 3 = m\angle 4.$
Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2.$



Afirmaciones	Razones
1. $m\angle AOD = m\angle FOC.$	1. ?
2. $m\angle COD = m\angle COD.$	2. ?
3. $m\angle AOC = m\angle FOD.$	3. ?
4. $m\angle 3 = m\angle 4.$	4. ?
5. $m\angle 2 = m\angle 1.$	5. ?

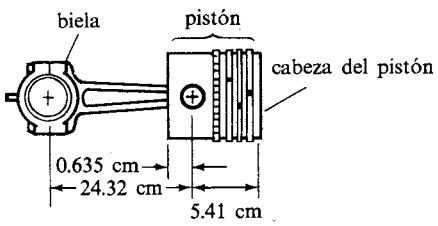
B.

15. Considérese el diagrama que aparece abajo.

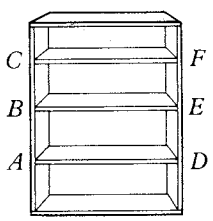
a. ¿Cuál es la distancia entre el centro de la biela y la cabeza del pistón?

b. ¿Cuál es la longitud del pistón?

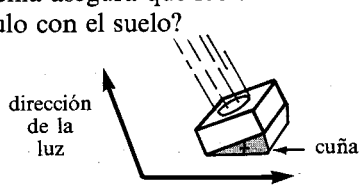
c. ¿Qué teoremas o postulados apoyan sus respuestas?

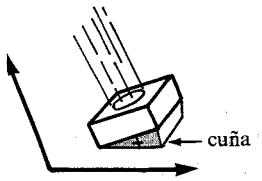


16. En una librería se quieren montar soportes de estantes. Si se colocan de manera que $AB = DE$ y $BC = EF$, ¿qué teorema se usará para llegar a la conclusión de que el primero y tercer estantes están a la misma distancia de ambos extremos?



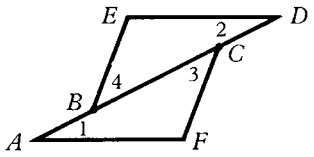
17. Dos focos para exterior idénticos se colocan dentro de una caja. Debajo de las cajas se colocan dos cuñas idénticas. ¿Qué teorema asegura que los dos haces de luz formarán el mismo ángulo con el suelo?



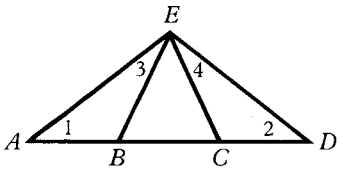


En los ejercicios 18 à 27, formúlese una demostración completa a dos columnas.

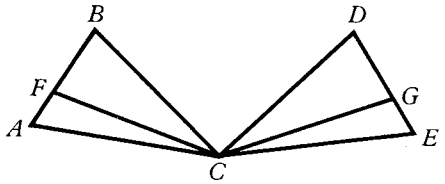
18. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\triangle ACF \cong \triangle DBE$.



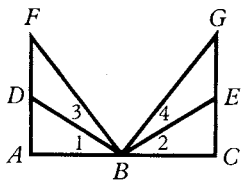
19. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



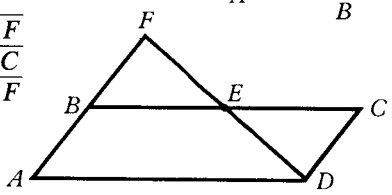
20. Dado: $\triangle BFC \cong \triangle DGC$
$\triangle ABC \cong \triangle EDC$.
Pruébese: $\triangle AFC \cong \triangle EGC$.



21. Dado: B es el punto medio de $\overline{AC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$
$\overline{FB} \cong \overline{GB}$.
Pruébese: $\overline{FD} \cong \overline{GE}$.



22. Dado: B es el punto medio de $\overline{AF}$
E es el punto medio de $\overline{BC}$
E es el punto medio de $\overline{DF}$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle BEF \cong \triangle CED$.



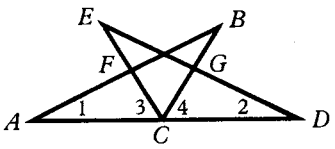
ACTIVIDADES

Un conjunto de puntos que satisface una sola condición dada se llama lugar geométrico, **locus**. El locus de puntos equidistantes de los extremos de una recta de segmento es la bisectriz perpendicular del segmento.

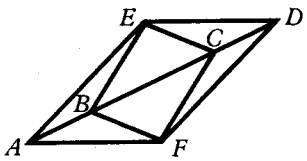
Se puede demostrar que esto es cierto observando la figura trazada por un «punto móvil». Constrúyase un juego especial de 20 tarjetas (8 cm × 13 cm), únanse con un clip y recórranse con un dedo para ver el «punto móvil». Para ver la bisectriz perpendicular puede usarse un juego de tarjetas como el que se muestra a continuación.

C.

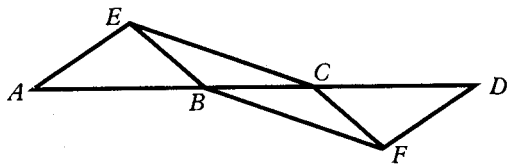
23. Dado: C es el punto medio de $\overline{AD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\triangle ECG \cong \triangle BCF$.



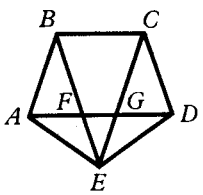
24. Dado: $\triangle AEC \cong \triangle DFB$.
Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle DCE$.



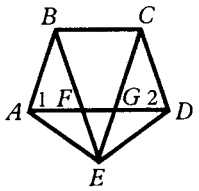
25. Dado: $\triangle AEC \cong \triangle DFB$.
Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.



26. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular
$\overline{FE} \cong \overline{GE}$.
Pruébese: $\triangle ABF \cong \triangle DCG$.

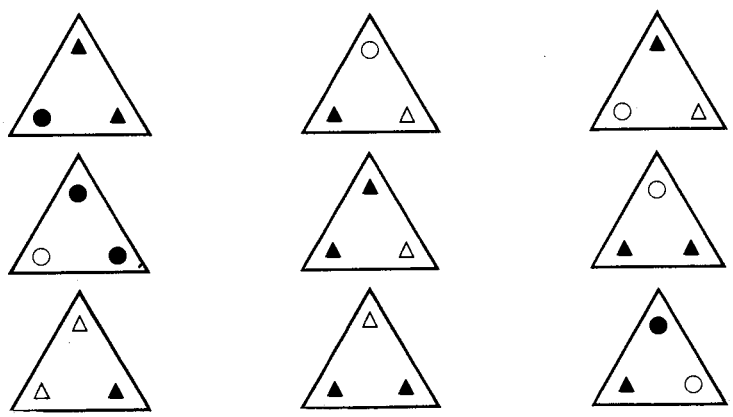


27. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle FGE$ es isósceles.

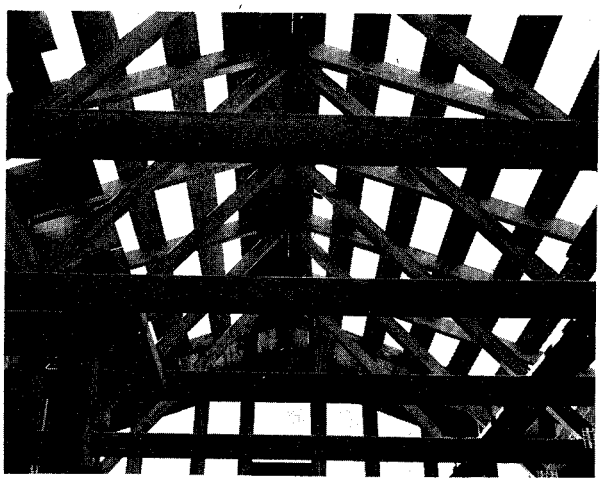


SOLUCION DE PROBLEMAS

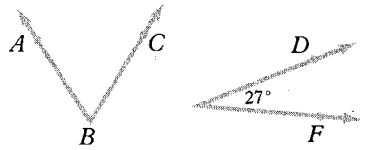
Colóquense estos nueve triángulos para formar uno solo, de manera que los vértices que se toquen tengan el mismo símbolo.



4.3 Prueba de teoremas: uso de suplementos y complementos



Con frecuencia, en el mundo físico, los ángulos se presentan en parejas cuya suma de medidas es de 180° o 90°. Este tipo de parejas se estudian en esta sección.

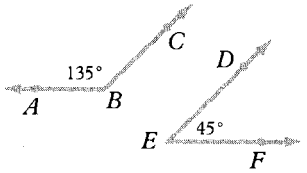


La suma de las medidas de $\angle ABC$ y $\angle DEF$ es 90°.

$\angle ABC$ es complementario de $\angle DEF$.
$\angle DEF$ es complementario de $\angle ABC$.

Definición 4.1

Angulos complementarios son dos ángulos cuyas medidas suman 90°.



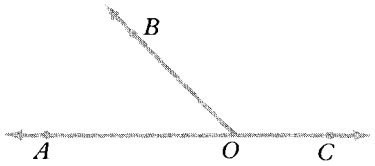
La suma de las medidas de $\angle ABC$ y $\angle DEF$ es 180°.

$\angle ABC$ es suplementario de $\angle DEF$.
$\angle DEF$ es suplementario de $\angle ABC$.

Definición 4.2

Angulos suplementarios son dos ángulos cuyas medidas suman 180°.

Algunos pares de ángulos que suman 180° tienen un vértice común, un lado común y ningún punto interior común, y se denominan *par lineal.* Búsquese un par lineal de ángulos en la fotografía.



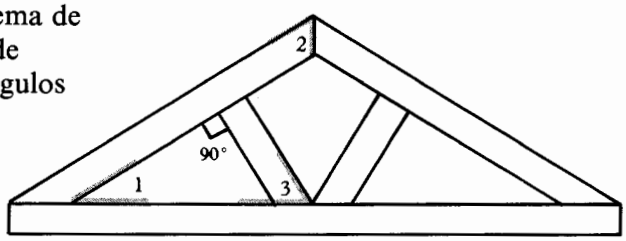
$\angle AOB$ y $\angle BOC$ tienen un lado común, $\overrightarrow{OB}$. La unión de los otros dos lados, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$, es una recta.

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son un par lineal de ángulos.

Definición 4.3

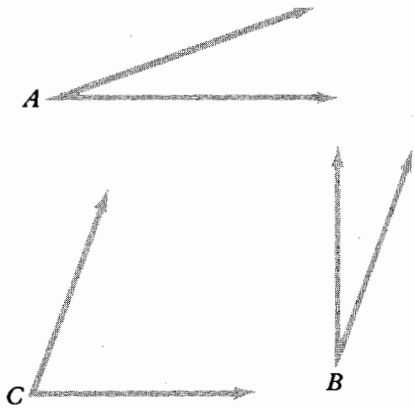
Un **par lineal de ángulos** es un par de ángulos con un lado común tal que la unión de los otros dos lados es una recta.

La estructura que sostiene el tejado de una casa con frecuencia se ensambla por separado. Esta estructura se llama sistema de tijerillas de tejados. Una de las tareas de un ingeniero es identificar todos los ángulos de la misma medida en este sistema de tijerillas, para poder cortar al mismo tiempo todas las estructuras con ángulos congruentes.



El teorema que se presenta en esta sección proporciona información útil para determinar el tamaño de los ángulos.

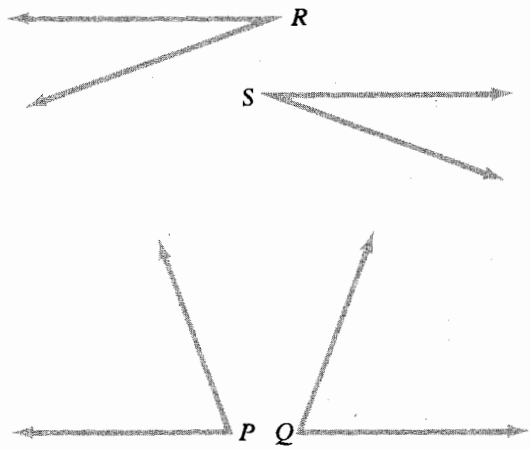
Empléese un transportador para responder a las preguntas sobre los complementos.



¿Es $\angle A$ complementario de $\angle C$?

¿Es $\angle B$ complementario de $\angle C$?

¿Qué comparación existe entre $m\angle A$ y $m\angle B$?



¿Es $\angle P$ complementario de $\angle R$?

¿Es $\angle Q$ complementario de $\angle S$?

¿Qué comparación existe entre $m\angle P$ y $m\angle Q$?

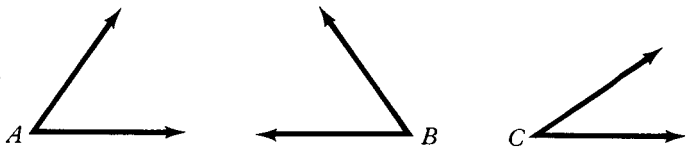
Se podía haber dicho que $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes, y que $\angle P$ y $\angle Q$ son congruentes. El teorema 4.7 resume las dos situaciones analizadas.

Teorema 4.7 **Teorema de los complementos congruentes.** Dos ángulos que son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes), son congruentes.

Se probará la primera parte del teorema de complementos congruentes. La segunda parte, se completará como ejercicio.

PRUEBA

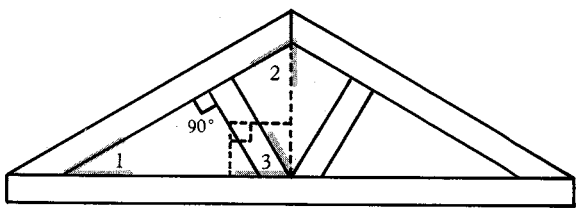
Dado: $\angle A$ es complementario de $\angle C$
$\angle B$ es complementario de $\angle C$.
Pruébese: $\angle A \cong \angle B$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle A$ es complementario de $\angle C$.	1. Dado.
2. $m\angle A + m\angle C = 90$.	2. Definición de ángulos complementarios.
3. $\angle B$ es complementario de $\angle C$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle B + m\angle C = 90$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle C$.	5. Principio de la sustitución.
6. $m\angle A = m\angle B$.	6. Propiedad de la resta de iguales.
7. $\angle A \cong \angle B$.	7. Definición de ángulos congruentes.

APLICACION

En un triángulo con un ángulo de 90°, la suma de los otros dos ángulos también es 90°. En consecuencia, en este sistema de tijerillas de tejado, $\angle 2$ y $\angle 3$ son complementos de $\angle 1$. Por el teorema 4.7, puede concluirse que $\angle 2$ y $\angle 3$ tienen la misma medida.



Teorema 4.8 Teorema de los suplementos congruentes. Dos ángulos que son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.

Parece razonable que dos ángulos que forman un par lineal deban ser suplementarios. Este hecho se acepta como verdad y se denomina «postulado del par lineal».

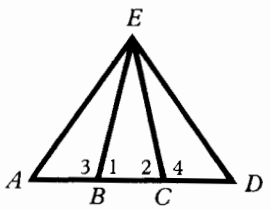
Postulado del par lineal

Si dos ángulos forman un par lineal, los ángulos son suplementarios.

Estúdiese cada paso de las pruebas siguientes y formúlense las razones omitidas.

Ejemplo 1

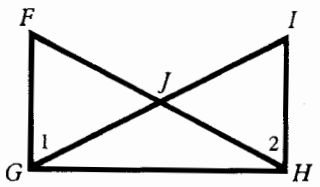
Dado: $\angle A \cong \angle D$
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$.	1. Dado.
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	2. ¿Por qué?
3. $\angle 1 \cong \angle 2$.	3. ¿Por qué?
4. $\angle 1$ y $\angle 3$ son suplementarios.	4. Postulado del par lineal.
5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son suplementarios.	5. ¿Por qué?
6. $\angle 3 \cong \angle 4$.	6. Teorema de los suplementos congruentes.
7. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$.	7. ¿Por qué?
8. $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.	8. PCTCC.

Ejemplo 2

Dado: $\angle FGH$ y $\angle IHG$ son ángulos rectos
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle IHG \cong \triangle FGH$.

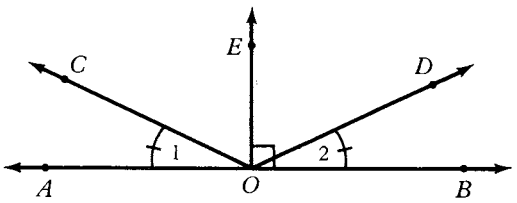


Afirmaciones	Razones
1. $\angle FGH$ y $\angle IHG$ son ángulos rectos.	1. Dado.
2. $\angle FGH \cong \angle IHG$.	2. Todos los ángulos rectos son congruentes.
3. $m\angle FGH = m\angle IHG = 90$.	3. ¿Por qué?
4. $\angle 1 \cong \angle 2$.	4. Dado.
5. $\angle 1$ y $\angle IGH$ son complementarios.	5. Definición de complementos.
6. $\angle 2$ y $\angle FGH$ son complementarios.	6. ¿Por qué?
7. $\angle IGH \cong \angle FHG$.	7. Teorema de los complementos congruentes.
8. $\overline{GH} \cong \overline{HG}$.	8. Propiedad reflexiva (segmentos).
9. $\triangle IHG \cong \triangle FGH$.	9. ¿Por qué?

EJERCICIOS

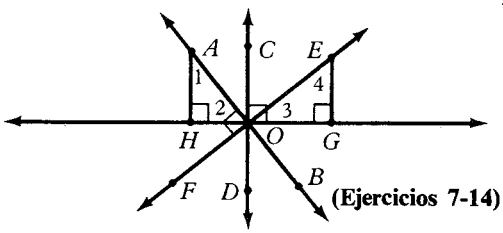
A.

1. Cítese un suplemento de $\angle 1$.
2. Cítese un suplemento de $\angle COB$.
3. Cítese un complemento de $\angle COE$.
4. Cítese un complemento de $\angle 2$.
5. ¿Por qué $\angle COE$ y $\angle DOE$ son congruentes?
6. ¿Por qué $\angle COB$ y $\angle AOD$ son congruentes?
7. Cítense dos ángulos que sean suplementos de $\angle COE$.
8. Cítense dos ángulos que sean complementos de $\angle 3$.
9. Cítense dos ángulos que sean complementos de $\angle HOF$.
10. ¿Por qué $\angle COE$ y $\angle BOG$ son congruentes?
11. ¿Por qué $\angle AOH$ y $\angle COE$ son congruentes?
12. ¿Por qué $\angle AOG$ y $\angle EOD$ son congruentes?
13. ¿Por qué $\angle 3$ y $\angle AOC$ son congruentes?
14. ¿Por qué $\angle 3$ y $\angle AOD$ son suplementos?



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OE}$
$\angle 1 \cong \angle 2$

(Ejercicios 1-6)



(Ejercicios 7-14)

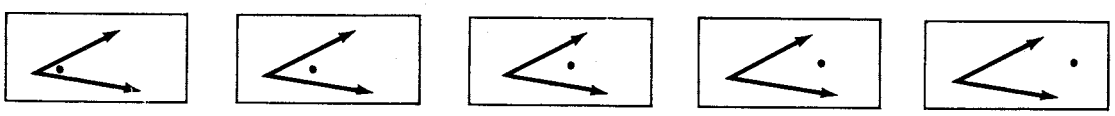
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{HG}$
$\overline{AH} \perp \overline{HG}$, $\overline{EG} \perp \overline{HG}$

B.

15. Si $m\angle A = x$, entonces el complemento de $\angle A$ mide $\underline{?}$.
16. Si $m\angle B = x$, entonces el suplemento de $\angle B$ mide $\underline{?}$.
17. Dos ángulos son suplementarios. La medida de uno de ellos es cuatro veces la medida del otro. Encuéntrense las medidas de los dos ángulos.
18. Dos ángulos son suplementarios. La medida de uno es 20° menos que tres veces la medida del otro. Encuéntrense las medidas de los dos ángulos.

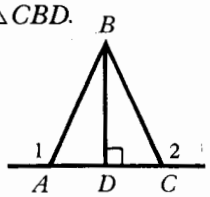
ACTIVIDADES

Elabórese un juego de 20 tarjetas como las que se muestran a continuación, únanse con un clip y recórranse con un dedo para mostrar que el lugar geométrico de puntos equidistantes de los dos lados de un ángulo es la bisectriz del ángulo.

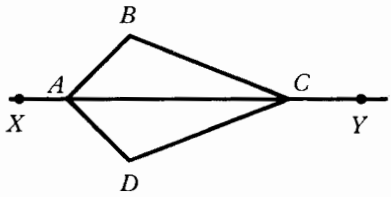


Empléense los teoremas 4.7 y 4.8 en los ejercicios 19 a 22.

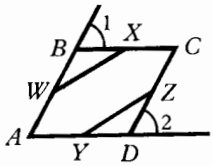
19. Dado: $\overline{AD} \cong \overline{CD}$
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



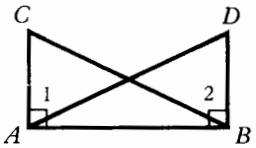
20. Dado: $\angle BAX \cong \angle DAX$
$\angle BCY \cong \angle DCY$.
Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.



21. Dado: $ABCD$ es un cuadrilátero con todos los lados de la misma longitud
$\angle 1 \cong \angle 2$
W, X, Y, Z son puntos medios de los lados.
Pruébese: $\triangle BWX \cong \triangle DZY$.

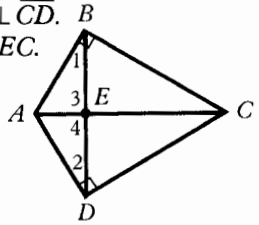


22. Dado: $\overline{AC} \perp \overline{AB}$, $\overline{BD} \perp \overline{AB}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

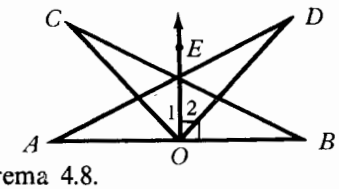


C.

23. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$
$\overline{BE} \cong \overline{DE}$
$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle BEC \cong \triangle DEC$.



24. Dado: $\overline{AB} \perp \overrightarrow{OE}$, O es el punto medio de $\overline{AB}$
$\angle A \cong \angle B$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

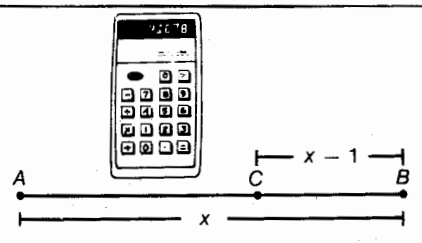


25. Pruébese: la segunda parte del teorema 4.7.

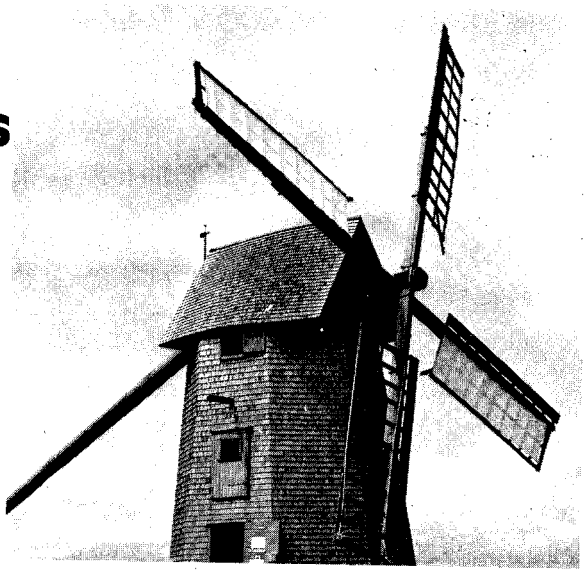
26. Pruébese: el teorema 4.8.

SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Con una calculadora y el método de «conjetura y prueba», encuéntrense dos decimales «x» e «y» tales que $x - y = 1$ y $x \cdot y = 1$.
2. Si $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, esta línea se divide en una proporción especial llamada «sección áurea». Muéstrese que AB es igual al número x del primer problema.

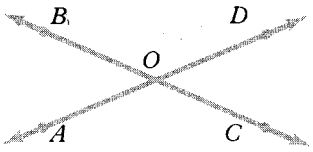


4.4 Prueba de teoremas: uso de ángulos verticales



En esta sección se estudiarán pares de ángulos formados por un par de rectas que se intersecan.

El molino de viento de la fotografía proporciona muchos ejemplos de ángulos formados por rectas intersecantes. Además de varios pares lineales de ángulos, hay varios pares de ángulos que se entrecruzan. Los teoremas de esta sección tratan de las relaciones entre los ángulos formados por rectas intersecantes.

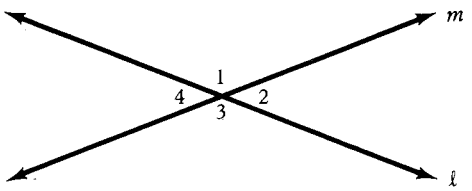


$\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ se intersecan en O. $\angle AOB$ y $\angle COD$ son ángulos verticales.

Definición 4.4

Los **ángulos verticales** son dos ángulos formados por dos rectas que se intersecan, pero que no son un par lineal de ángulos.

¿Es posible convencer a alguien de que estas cinco proposiciones sobre los ángulos formados por las rectas ℓ y m son verdaderas?



1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.

2. $\angle 3$ y $\angle 2$ son suplementarios.

3. $\angle 1$ y $\angle 3$ son congruentes.

4. $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios.

5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son congruentes.

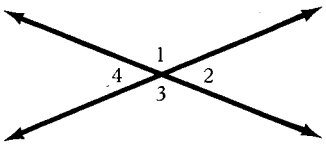
Estas cinco proposiciones conducen al siguiente teorema.

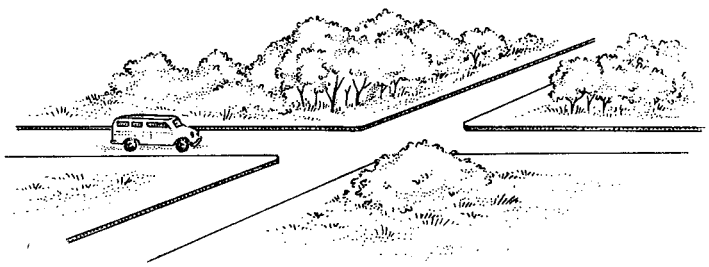
Teorema 4.9 **Teorema de los ángulos verticales.** Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.

PRUEBA

Paso 1 Este paso se incluye en la proposición del teorema.

Paso 2





Paso 3 Dado: Dos pares de ángulos verticales,
$\angle 1$ y $\angle 3$
$\angle 2$ y $\angle 4$.

Paso 4 Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 3$, y
$\angle 2 \cong \angle 4$.

Paso 5 «Se probará que $\angle 1 \cong \angle 3$, utilizando el hecho de que $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal, y de que $\angle 2$ y $\angle 3$ forman un par lineal. Entonces se usará el postulado del par lineal y el teorema de los suplementos congruentes.

La prueba de que $\angle 2 \cong \angle 4$ será idéntica, por lo que no se repetirá.»

Paso 6

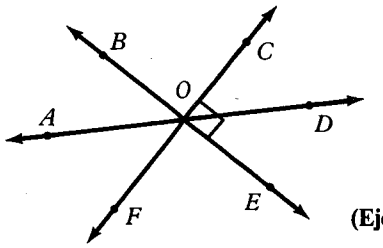
Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.	**1.** Dado.
2. $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal.	**2.** Definición del par lineal.
3. $\angle 1$ es suplementario de $\angle 2$.	**3.** Postulado del par lineal
4. $\angle 3$ y $\angle 2$ forman un par lineal.	**4.** ¿Por qué?
5. $\angle 3$ es suplementario de $\angle 2$.	**5.** ¿Por qué?
6. $\angle 1 \cong \angle 3$.	**6.** Teorema de los suplementos congruentes.

El siguiente teorema también se refiere a los pares lineales de ángulos.

Teorema 4.10 Si un ángulo de un par lineal es un ángulo recto, entonces el otro también es un ángulo recto.

EJERCICIOS

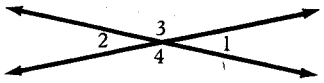
A.



(Ejercicios 1-4)

1. Cítense dos pares de ángulos rectos que sean ángulos verticales.
2. Cítese un par de ángulos agudos que sean ángulos verticales.
3. Cítese un par de ángulos obtusos que sean ángulos verticales.
4. Cítense seis pares de ángulos congruentes.

Si $m\angle 2 = 35$, encuéntrense las medidas de los ángulos de los ejercicios 5 a 8.

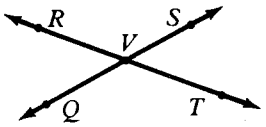


(Ejercicios 5-8)

5. $m\angle 3 = \underline{?}$.
6. $m\angle 1 = \underline{?}$.
7. $m\angle 4 = \underline{?}$.
8. $m\angle 1 + m\angle 4 = \underline{?}$.

Con la información de los ejercicios 9 a 11, encuéntrense las medidas de los ángulos.

9. $m\angle RVQ = 4x$
   $m\angle SVT = 2x + 20$
   $m\angle RVQ = \underline{?}$.
10. $m\angle QVT = 5x$
    $m\angle RVS = 8x - 45$
    $m\angle RVS = \underline{?}$.
11. $m\angle RVQ = 2x + 30$
    $m\angle SVT = 3x + 20$
    $m\angle SVT = \underline{?}$.

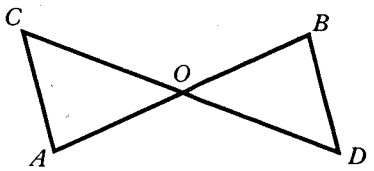


(Ejercicios 9-11)

B.

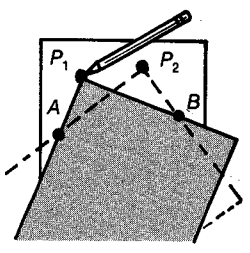
Para los ejercicios siguientes, formúlense demostraciones a dos columnas. Con frecuencia podrá utilizarse el teorema 4.9.

12. **Dado:** $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en O
    $\overline{AO} \cong \overline{OB}$
    $\angle A \cong \angle B$.
    Pruébese: $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.



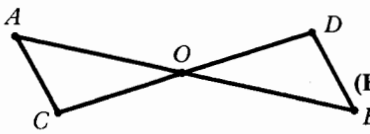
ACTIVIDADES

Márquense dos puntos A y B en un papel y colóquese encima otra hoja de papel, como se muestra en la figura, de manera que un lado de la hoja esté sobre A, y el otro, sobre B. Márquese un punto rojo P_1. Repítase esto con el papel en otra posición y márquese P_2. Prosígase hasta marcar 20 puntos diferentes. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, etcétera?



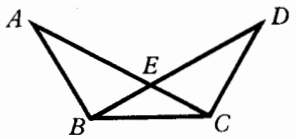
13. Dado: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en O
$\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD}$
$\angle C \cong \angle D$.
Pruébese: $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

14. Dado: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en sus puntos medios.
Pruébese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



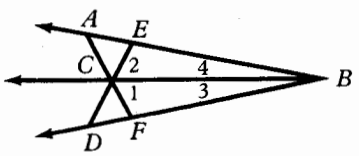
(Ejercicios 13, 14)

15. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$
$\overline{BE} \cong \overline{CE}$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

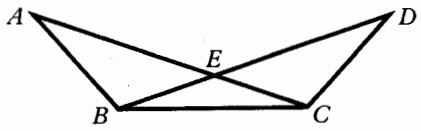


C.

16. Dado: $\overrightarrow{BC}$ biseca a $\angle ABD$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.



17. Dado: $\overline{AE} \cong \overline{DE}$
$\overline{BE} \cong \overline{CE}$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

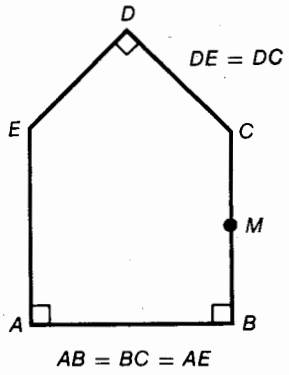


18. Pruébese: Si dos ángulos de un par lineal son congruentes, entonces son ángulos rectos.

19. Pruébese: Si un ángulo es congruente con su suplemento, entonces el ángulo es un ángulo recto.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase una tabla con la misma forma que se muestra en la figura. Se desea cortarla en tres partes que puedan colocarse para formar un cuadrado. ¿Cómo puede hacerse esto con dos cortes? (*Sugerencia:* empléese el punto medio M de $\overline{BC}$.)



4.5 Prueba de teoremas; uso de ángulos exteriores

REPASO: Algunas propiedades de la desigualdad de números reales

Definición de «mayor que»: $a > b$ significa que $a = b + c$ y c es un número positivo.

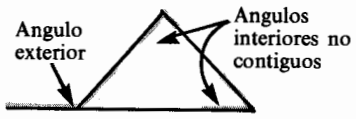
Propiedad transitiva: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Propiedad aditiva: Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Propiedad de multiplicación: Si $a > b$ y $c > 0$, $ac > bc$. Si $a > b$ y $c < 0$, $ac < bc$.

Propiedad de tricotomía: Para los números reales a y b, una, y sólo una, de las siguientes relaciones es verdadera: $a = b$, $a > b$, o $a < b$.

Las propiedades de los números que se acaban de definir, se usarán para probar el teorema de esta sección. Primero, se necesitan dos definiciones.

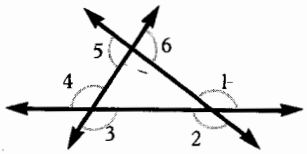


Definición 4.5

El **ángulo exterior** de un triángulo es el ángulo que forma un par lineal con uno de los ángulos del triángulo.

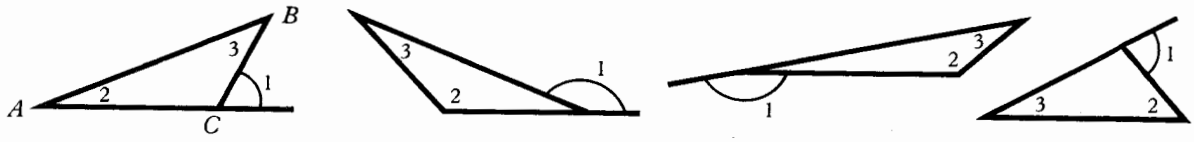
Definición 4.6

Los **ángulos interiores no contiguos** con respecto a un ángulo exterior son los dos ángulos que no son adyacentes al ángulo exterior.



Obsérvese que cada triángulo tiene seis ángulos exteriores, como se ilustra en la figura.

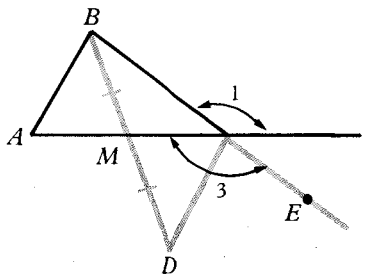
Trácese el ángulo exterior 1 y compárese con los ángulos interiores no contiguos de los triángulos siguientes.



Las comparaciones conducen al siguiente teorema:

Teorema 4.11 **Teorema del ángulo exterior.** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no contiguos.

PRUEBA



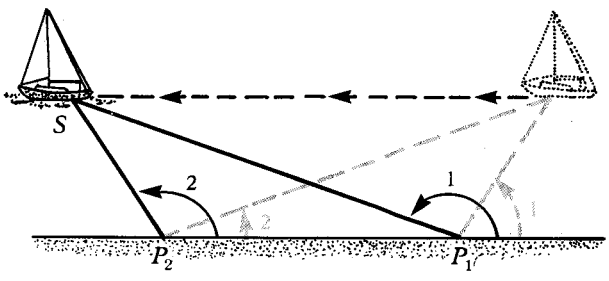
Dado: $\triangle ABC$ con ángulo exterior, $\angle 1$.
Pruébese: $m\angle 1 > m\angle 2$.

Plan: En esta etapa del estudio de la geometría, no se espera que el estudiante planee una prueba de este tipo.

Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ es un ángulo exterior de $\triangle ABC$.	**1.** Dado.
2. Sea M el punto medio de $\overline{AC}$.	**2.** Elección de M.
3. Sobre $\overleftrightarrow{BM}$, elíjase un punto D tal que $\overline{BM} \cong \overline{MD}$.	**3.** Postulado del punto y la recta, elección de D.
4. $\overline{AM} \cong \overline{MC}$.	**4.** Definición del punto medio.
5. $\angle BMA \cong \angle DMC$.	**5.** ¿Por qué?
6. $\triangle AMB \cong \triangle CMD$.	**6.** ¿Por qué?
7. $\angle MCD \cong \angle 2$.	**7.** PCTCC.
8. $m\angle MCD = m\angle 2$.	**8.** Definición de la congruencia de ángulos.
9. $m\angle MCD + m\angle DCE = m\angle 3$.	**9.** Definición de «entre» para los rayos.
10. $m\angle 2 + m\angle DEC = m\angle 3$.	**10.** Sustitución.
11. $m\angle 3 > m\angle 2$.	**11.** Definición de «mayor que».
12. $m\angle 1 = m\angle 3$.	**12.** ¿Por qué?
13. $m\angle 1 > m\angle 2$.	**13.** Sustitución.

APLICACION

Dos observadores, en los puntos P_1 y P_2, ven pasar un velero. Los ángulos que se producen entre su vista y la orilla del mar ($\angle 1$, $\angle 2$) están en constante cambio. $m\angle 1$ parece mayor que $m\angle 2$ en ambas posiciones del velero. ¿Será $m\angle 1$ siempre mayor que $m\angle 2$, mientras el velero se aleja por la línea de la costa?

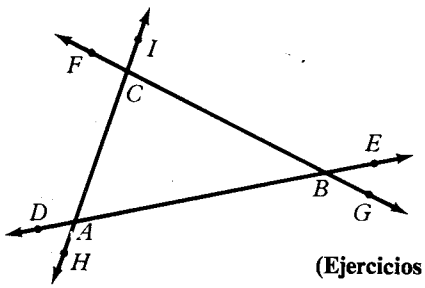


Respuesta. Por el teorema del ángulo exterior se sabe que $m\angle 1 > m\angle 2$, con independencia de la situación del barco. Por lo que, el ángulo que forman las líneas visuales de los observadores con la orilla, será siempre mayor para el observador del punto P_1.

EJERCICIOS

A.

1. Cítense los ángulos exteriores. ¿Cuántos ángulos exteriores en total tiene un triángulo?
2. Cítense los ángulos interiores no contiguos de $\angle DAC$.
3. Cítense los ángulos interiores no contiguos de $\angle HAB$.
4. $\angle ABC$ es el ángulo interior no contiguo de los ángulos exteriores $\underline{?}$ y $\underline{?}$.
5. ¿Es $\angle DAH$ un ángulo exterior? ¿Por qué?
6. ¿Cuál es la relación entre $\angle ICB$ y $\angle CBA$?
7. ¿Cuál es la relación entre $\angle ACB$ y $\angle FCI$?
8. ¿Cuál es la relación entre $\angle ABG$ y $\angle ABC$?

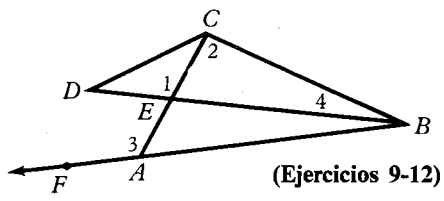


(Ejercicios 1-8)

B.

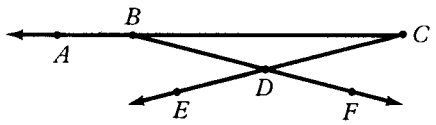
Explíquese por qué son verdaderas las proposiciones de los ejercicios 9 a 12.

9. $m\angle 1 > m\angle 2$.
10. $m\angle 3 > m\angle 1$.
11. $m\angle 3 > m\angle 4$.
12. $m\angle 3 > m\angle 2$.



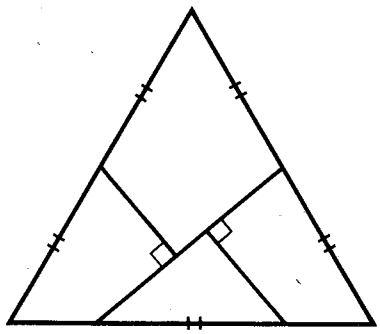
(Ejercicios 9-12)

13. Usese la figura para probar que $m\angle ABD > m\angle EDF$.



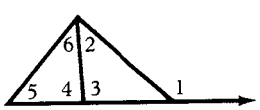
ACTIVIDADES

Dibújese y recórtese un triángulo equilátero como el de la figura y dispónganse las piezas para formar un cuadrado.

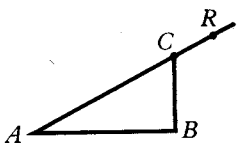


14. Usese la figura para probar que $m\angle 1 > m\angle 6$.

15. **Dado:** $\triangle ABC$ es un triángulo con un ángulo recto $\angle B$.
Pruébese: *$\angle RCB$ es un ángulo obtuso.*



(Ejercicio 14)



(Ejercicio 15)

C.

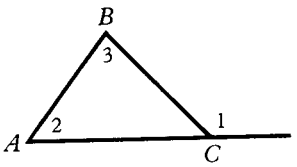
Con el teorema del ángulo exterior, pruébense los teoremas de los ejercicios 16 y 17.

16. Un triángulo con un ángulo recto tiene dos ángulos agudos.

17. Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.

18. Al principio de la sección 4.5 se proporciona una prueba de que $m\angle 1 > m\angle 2$. Empléese un método similar para probar que $m\angle 1 > m\angle 3$. (*Sugerencia:* empléese el punto medio de $\overline{BC}$.)

19. Pruébese que un triángulo no puede tener un ángulo recto y uno obtuso.

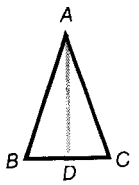


(Ejercicio 18)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Algunas veces se usan *líneas auxiliares* para ayudar a la solución de un problema. Pero hay que tener la seguridad de que las líneas empleadas existen. Considérese la siguiente prueba.

«Teorema»: Todo triángulo es isósceles.
Dado: $\triangle ABC$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.



Afirmaciones	Razones
1. Trácese una recta a través de A y D, el punto medio de $\overline{BC}$, que sea perpendicular a $\overline{BC}$.	1. Construcción de $\overline{AD}$.
2. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	2. Propiedad reflexiva de la congruencia.
3. $\overline{BD} \cong \overline{DC}$.	3. Definición de punto medio.
4. $\angle ADB \cong \angle ADC$.	4. Definición de las perpendiculares.
5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.	5. Postulado LAL.
6. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	6. Partes correspondientes.
7. $\triangle ABC$ es isósceles.	7. Definición de isósceles.

Explíquese cuál es el error de la prueba. Dibújese un contraejemplo para mostrar que la afirmación 1 describe una recta que no siempre existe.

4.6 Uso de la prueba indirecta

El método de la prueba directa usado hasta este momento, implica empezar con las condiciones dadas y con la deducción de que la conclusión es verdadera. La prueba indirecta se ilustra con lo que podría suceder en esta caricatura —si B.C. cooperase—. Supóngase que B.C. come la fruta pero no muere. Una prueba indirecta de que la fruta no es venenosa podría ser la siguiente:

Supóngase que la fruta es venenosa.
Si B.C. la come, morirá.
B.C. la comió, pero no murió.
Por tanto, la fruta no es venenosa.

Este método de prueba implica aceptar la negación de lo que se quiere probar. Por medio del razonamiento, se demuestra que esta aceptación conduce a una contradicción. Así, la proposición que se va a probar debe ser verdadera.

B.C. by permission of Johnny Hart and Field Enterprises, Inc.

A continuación se resumen los pasos para la prueba indirecta.

Pasos para probar un teorema mediante la prueba indirecta

Paso 1 Formúlense los datos y la prueba a partir de la hipótesis y la conclusión de una posición si-entonces.

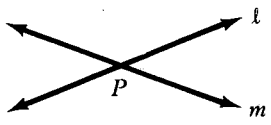
Paso 2 Supóngase la negación de la proposición contenida en la prueba. (Suposición de la prueba indirecta.)

Paso 3 Formúlense los pasos de la prueba para mostrar que la suposición lleva a la contradicción de un hecho conocido (teorema, definición, información proporcionada, etc.).

Paso 4 Concluyase que la suposición es falsa y que la proposición de la PRUEBA es verdadera.

Se ilustra la prueba indirecta probando dos teoremas.

Teorema: Si dos rectas se intersecan, la intersección es un punto.

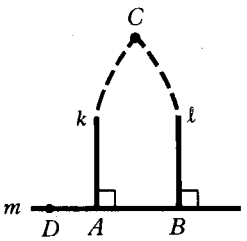


Dado: Las rectas ℓ y m se intersecan en el punto P.
Pruébese: P es el único punto de intersección. } **Paso 1**

Análisis: El paso 2 de una prueba indirecta es suponer la negación de la proposición de la prueba. La negación de «P es el único punto de intersección» es «P *no* es el punto de intersección». Esto significa que hay un segundo punto de intersección. Entonces, se muestra que tener estos dos puntos conduce a una contradicción del postulado.

	Afirmaciones	Razones
Paso 2	**1.** Supóngase que P no es el único punto de intersección de las rectas ℓ y m.	**1.** Suposición de la prueba indirecta.
Paso 3	**2.** Sea Q el segundo punto de intersección.	**2.** Replanteamiento de 1.
	3. ℓ contiene a P y a Q. m contiene a P y a Q.	**3.** Afirmaciones 1 y 2.
	4. P y Q están en dos rectas (contradicción del postulado del punto y la recta).	**4.** Replanteamiento de 3.
Paso 4	**5.** Por tanto, P es el único punto de intersección de ℓ y m.	**5.** Lógica de la prueba indirecta.

Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta, las dos rectas son paralelas.



Dado: $k \perp m$, $\ell \perp m$.
Pruébese: $k \parallel \ell$. } **Paso 1**

	Afirmaciones	Razones
Paso 2	**1.** Supóngase que $k \nparallel \ell$ (k no es paralela a ℓ).	**1.** Suposición de la prueba indirecta.
	2. k y ℓ se intersecan en el punto C.	**2.** Replanteamiento de 1.
Paso 3	**3.** Se forma $\triangle ABC$.	**3.** Definición de triángulo.
	4. $m\angle DAC > m\angle ABC$.	**4.** Teorema del ángulo externo.
	5. $k \perp m$, $\ell \perp m$.	**5.** Dado.
	6. $\angle DAC$ y $\angle ABC$ son ángulos rectos.	**6.** Definición de las perpendiculares.
	7. $m\angle DAC = m\angle ABC$ (contradicción de $m\angle DAC > m\angle ABC$).	**7.** Todos los ángulos rectos tienen la misma medida.
Paso 4	**8.** Por tanto, $k \parallel \ell$.	**8.** Lógica de la prueba indirecta.

EJERCICIOS

A.

Para las proposiciones de prueba de los ejercicios 1 a 10, formúlese la suposición de la prueba indirecta que se usaría para iniciar la prueba, junto con la segunda proposición que interpreta la suposición de la prueba indirecta.

Ejemplo: **Pruébese:** $\ell \parallel m$.
Suposición de la prueba indirecta: $\ell \nparallel m$.
Segunda proposición: Entonces, ℓ interseca a m.

1. **Pruébese:** $\ell \perp m$.
2. **Pruébese:** $\angle A$ es suplementario de $\angle B$.
3. **Pruébese:** Los lados adyacentes no son paralelos.
4. **Pruébese:** $\angle A$ no es un ángulo recto.
5. **Pruébese:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
6. **Pruébese:** $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.
7. **Pruébese:** $\angle A$ es un ángulo agudo.
8. **Pruébese:** Sólo hay una recta a través de P y paralela a m.
9. **Pruébese:** $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.
10. **Pruébese:** $\triangle ABC$ no es un triángulo equilátero.

¿Qué pares de proposiciones de los ejercicios 11 a 16 permitirán llegar a una contradicción en una prueba indirecta?

Ejemplos: $\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \text{ es más largo que } \overline{CD}, \text{ y} \\ \overline{CD} \text{ es más largo que } \overline{AB}.\end{array}\right\}$ forma una contradicción

$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ es equilátero y} \\ \triangle ABC \text{ es isósceles.}\end{array}\right\}$ no forma una contradicción

11. Las rectas p y q son paralelas y las rectas p y q no se intersecan.
12. $\angle A \cong \angle B$ y $m\angle A > m\angle B$.
13. $\ell \perp m$ y $\ell \not\perp m$ (*nota:* $\not\perp$ significa «no es perpendicular a»).
14. $\angle A$ y $\angle B$ forman un par lineal. $m\angle A < 90$ y $m\angle B < 90$.
15. $\angle A$ es un ángulo recto.
    $\angle A$ es un ángulo obtuso.
16. $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes.
    $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

En los ejercicios 17 y 18, selecciónese la proposición que está en contradicción con la proposición dada.

17. $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

a. $m\angle A + m\angle B = 180$.
b. $\angle A$ y $\angle B$ forman un par lineal.
c. $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.
d. $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos verticales.

18. Las rectas p y q no son paralelas

a. Las rectas p y q no tienen puntos en común.
b. Las rectas p y q se intersecan.
c. Las rectas p y q son la misma recta.
d. Las rectas p y q están en un plano y no tienen puntos en común.

Escríbase una proposición que contradiga las proposiciones de los ejercicios 19 a 23.

19. $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

20. Las rectas p y q se intersecan.

21. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

22. $ABCDE$ es un pentágono regular.

23. $m\angle A = 117$.

En los ejercicios 24 a 27, formúlese la suposición que se usaría en una prueba indirecta del teorema dado.

24. Si dos rectas no se intersecan, entonces no son perpendiculares.

25. Si $AB \neq CD$, entonces $AB + EF \neq CD + EF$.

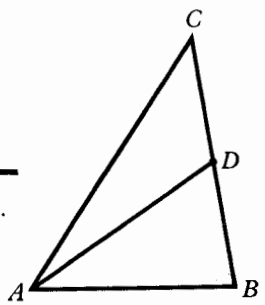
26. Si una figura es un triángulo, entonces la figura no puede contener dos ángulos rectos.

27. Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

B.

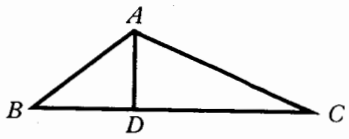
En los ejercicios 28 a 30 se inicia una prueba indirecta. Proporciónense las razones que faltan y continúese la prueba para llegar a una contradicción.

28. Dado: En $\triangle ABC$, $\overline{AC} \ncong \overline{AB}$
D es el punto medio de $\overline{BC}$.
Pruébese: $\overline{AD}$ no puede ser perpendicular a $\overline{BC}$.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. $\angle ADC \cong \angle ADB$.	2. ?
3. D es el punto medio de $\overline{BC}$.	3. Dado.
4. $\overline{CD} \cong \overline{BD}$.	4. ?
5. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	5. ?
6. $\triangle ADC \cong \triangle ADB$.	6. Postulado LAL.
7. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.	7. PCTCC.
8. ?	8. ?
9. ?	9. ?

29. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
$\overline{AB} \ncong \overline{AC}$.
Pruébese: $\overline{BD} \ncong \overline{DC}$.



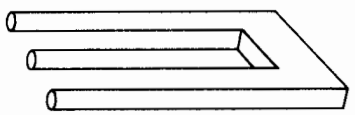
Afirmaciones	Razones
1. Supóngase $\overline{BD} \cong \overline{DC}$.	1. ?
2. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.	2. ?
3. $\angle BDA \cong \angle ADC$.	3. Definición de las perpendiculares.
4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.	4. ?
5. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.	5. ?
6. ?	6. ?
7. ?	7. ?
8. ?	8. ?

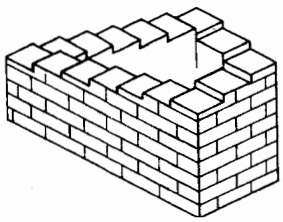
ACTIVIDADES

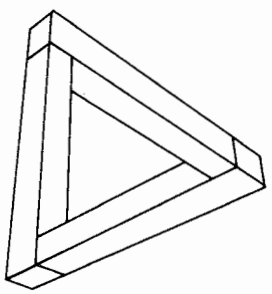
El objeto que se muestra a la derecha puede existir o no en el mundo real. Supóngase que puede (?).

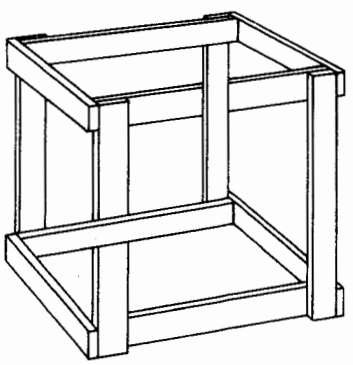
Continúese el argumento anterior con las otras figuras que se muestran a continuación y véase si se puede llegar a una contradicción de los hechos de la vida real.

Búsquense otras fotografías o dibujos de objetos, que como éstos, son contradictorios.

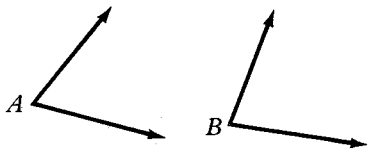








30. Dado: $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.
Pruébese: $\angle A$ y $\angle B$ no son suplementarios.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $\angle A$ es suplementario de $\angle B$.	1. ?
2. $m\angle A + m\angle B = 180$.	2. Definición de suplementarios.
3. $m\angle A < 90$, $m\angle B < 90$.	3. Dado, definición de ángulo agudo.
4. ?	4. Propiedad aditiva de las desigualdades.
5. ?	5. ?

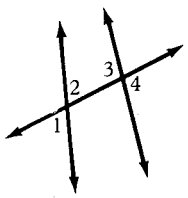
31. ¿Cómo puede usar un abogado la prueba indirecta? Dése un ejemplo.

Formúlese una prueba indirecta para los teoremas de los ejercicios 32 a 35.

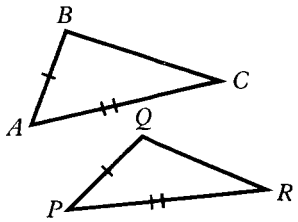
32. Si $AB \neq CD$, entonces $AB + EF \neq CD + EF$.

33. Si $\angle A$ no es congruente con $\angle B$, entonces $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.

34. Dado:
$\angle 1$ y $\angle 4$ no son suplementarios.
Pruébese:
$\angle 2$ y $\angle 3$ no son suplementarios.



35. Dado:
$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
$\overline{AC} \cong \overline{PR}$
$\angle A \ncong \angle P$.
Pruébese:
$\overline{BC} \ncong \overline{QR}$.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Cuando un anuncio sobre una radio barata en venta decía «Es un robo», la propietaria de la tienda no sabía lo cierto que era. Estaba segura de que Ana, Leo, Isa o Ive habían robado la radio. Cada persona, en su momento, hizo una declaración, pero sólo una de las cuatro declaraciones era verdadera.

Ana dijo: «Yo no robé la radio.»
Leo dijo: «Ana miente.»
Isa dijo: «Leo miente.»
Ive dijo: «La robó Leo.»

¿Quién dijo la verdad? ¿Quién robó la radio?

Capítulo 4 Conceptos importantes

Términos

Angulos complementarios (pág. 360)
Angulos suplementarios (pág. 360)
Par lineal de ángulos (pág. 360)
Angulos verticales (pág. 366)
Angulo exterior de un triángulo (pág. 370)
Angulo interior no contiguo (pág. 370)

Postulado

Postulado del par lineal. Si dos ángulos forman un par lineal, los ángulos son suplementarios.

Teoremas

4.1 Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva valen para la congruencia de ángulos y segmentos.

4.2 En un triángulo isósceles, el segmento que va del ángulo del vértice al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes.

4.3 **Suma de ángulos iguales.** Si $m\angle APB = m\angle DQE$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, $\overrightarrow{PB}$ está entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, y $\overrightarrow{QE}$ está entre $\overrightarrow{QD}$ y $\overrightarrow{QF}$, entonces $m\angle APC = m\angle DQF$.

4.4 **Resta de segmentos iguales.** Si $AC = DF$, $BC = EF$, B está entre A y C, y E está entre D y F, entonces $AB = DE$.

4.5 **Suma de segmentos iguales.** Si $AB = DE$, $BC = EF$, B está entre A y C, y E está entre D y F, entonces $AC = DF$.

4.6 **Resta de ángulos iguales.** Si $m\angle APC = m\angle DQF$, $m\angle BPC = m\angle EQF$, $\overrightarrow{PB}$ está entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, y $\overrightarrow{QE}$ está entre $\overrightarrow{QD}$ y $\overrightarrow{QF}$, entonces $m\angle APB = m\angle DQE$.

4.7 **Teorema de los complementos congruentes.** Dos ángulos que son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.

4.8 **Teorema de los suplementos congruentes.** Dos ángulos que son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes) son congruentes.

4.9 **Teorema de los ángulos verticales.** Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.

4.10 Si un ángulo de un par lineal es un ángulo recto, entonces el otro ángulo también lo es.

4.11 **Teorema del ángulo exterior.** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no contiguos.

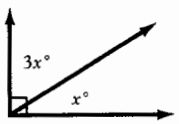
Capítulo 4 Resumen

1. Indíquese si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.
   a. Si dos ángulos son suplementarios de ángulos congruentes, entonces son congruentes.
   b. La propiedad transitiva de congruencia entre segmentos establece que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
   c. La suma de dos ángulos complementarios es 90°.

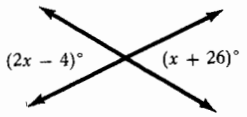
En los ejercicios 2 y 3 se proporciona un teorema de la forma si-entonces. Hágase un dibujo y formúlense los datos y la prueba usando la figura y sus nombres.

2. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
3. Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces todas son paralelas.
4. Despéjese x y calcúlese la medida de los ángulos.

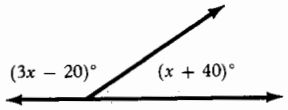
a.



b.

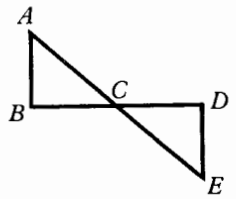


c.



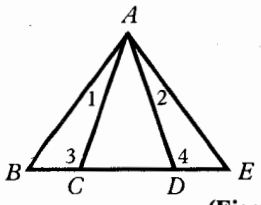
5. ¿Cuál es la medida de un ángulo que es congruente con su complemento?

6. **Dado:** $\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, $BC = CD$.
   Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



7. **Dado:** $m\angle 1 = m\angle 2$.
   Pruébese: $m\angle BAD = m\angle CAE$.

8. **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, $\angle E \cong \angle B$, y $\angle 1 \cong \angle 2$.
   Pruébese: $\angle ACD \cong \angle ADC$.



(Ejercicios 7, 8)

9. Para las siguientes proposiciones de la prueba expóngase la suposición de una prueba indirecta que se usaría para empezar la demostración.
   a. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
   b. $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios.

Capítulo 4 Examen

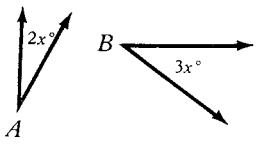
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo del triángulo.
   b. Si dos ángulos son suplementarios y congruentes, entonces ambos son ángulos rectos.
   c. Si dos ángulos son suplementarios, entonces forman un par lineal.

En los ejercicios 2 y 3, se proporciona un teorema en la forma si-entonces. Hágase un dibujo y establézcanse los datos y la prueba usando la figura y sus nombres.

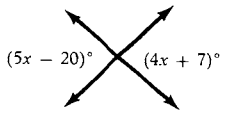
2. Si un triángulo es equilátero, entonces la medida de cada ángulo es 60°.

3. Si un segmento de recta une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces el segmento es paralelo al tercer lado.

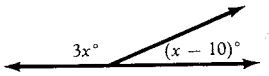
4. Despéjese x y encuéntrese la medida de los ángulos.
   a. $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.



   b.

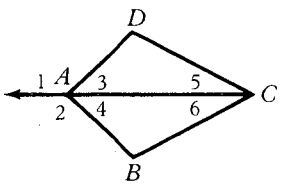


   c.

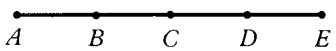


5. La medida de un ángulo es la mitad de la de su suplementario, ¿cuánto mide el ángulo?

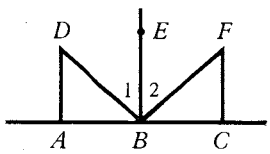
6. **Dado:** $m\angle 1 = m\angle 2$
   $m\angle 5 = m\angle 6$.
   Pruébese: $AD = AB$.



7. **Dado:** $AB = CD$, $BD = CE$.
   Pruébese: $AC = CE$.



8. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{DA} \perp \overline{AC}$, $\overline{EB} \perp \overline{AC}$ y $\overline{FC} \perp \overline{AC}$, B es punto medio de $\overline{AC}$.
   Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{CF}$.



9. Para las siguientes proposiciones de la prueba, expóngase la suposición de la prueba indirecta que se usaría para iniciar la demostración.
   a. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
   b. $\angle DEF$ no es un ángulo recto.

Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-I

Una técnica útil para la solución de problemas es hacer una tabla para ver si puede encontrarse un esquema. Estúdiese el siguiente ejemplo.

¿Cuántos cuadrados pueden encontrarse en este tablero?

Ejemplo

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez de 8×8?

Considérese la tabla de la derecha. El número de cuadrados de 1×1, 2×2, 3×3 y 4×4 se da en la tabla. ¿Puede verse un esquema y resolver el problema?

Solución. El número de cuadrados de 1×1 es 8^2. El número de cuadrados de 2×2 es 7^2. El esquema parece ser de cuadrados perfectos decrecientes. Así, se complementaría la tabla con 16, 9, 4 y 1. Para obtener el total se suma y resultan 204 cuadrados.

Tamaño del cuadrado	Número de cuadrados
1×1	64
2×2	49
3×3	36
4×4	25
5×5	?
6×6	?
7×7	?
8×8	?

PROBLEMAS

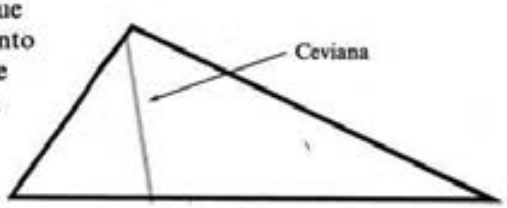
Para cada problema, hágase una tabla, obsérvese el esquema y resuélvase el problema.

1. ¿Cuántos cubos hay en un cubo de $8 \times 8 \times 8$? (*Sugerencia:* Hágase una tabla similar a la anterior. En la primera columna se relacionan los tamaños de los cubos: $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, etc. En la segunda columna se presenta el número de cuadrados de cada tamaño.)

Lados	Diagonales
3	0
4	2
5	?
6	?
⋮	⋮

2. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de diez lados? (*Sugerencia:* Hágase una tabla como la de la derecha.)

3. Una *ceviana* es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo a un punto del lado opuesto. ¿Cuántos triángulos se forman si se trazan 8 *cevianas* desde un vértice de un triángulo?



(*Nota:* Esta ceviana forma 3 triángulos)

TEMA 9

Rectas y planos paralelos

CAPÍTULO 5

5.1 Definiciones básicas 386

5.2 Teoremas sobre rectas paralelas 390

5.3 El postulado de las rectas paralelas 396

5.4 Más teoremas sobre rectas paralelas 400

Conceptos importantes 406

Resumen 407

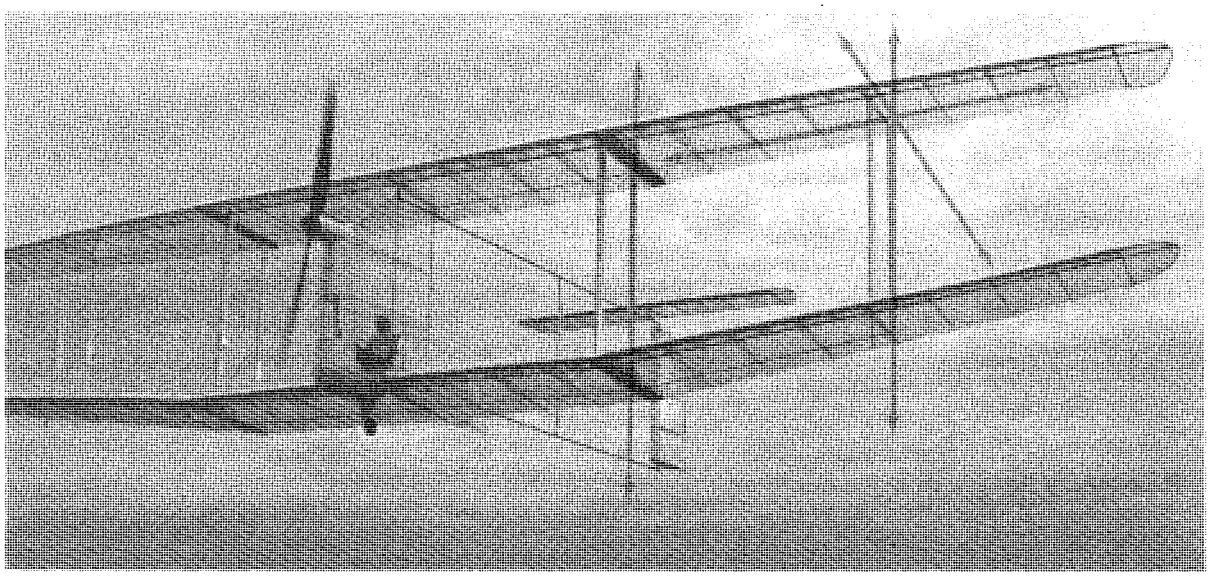
Examen 408

Repaso de álgebra 409

La geometría en nuestro mundo
Mineralogía: simetría 410

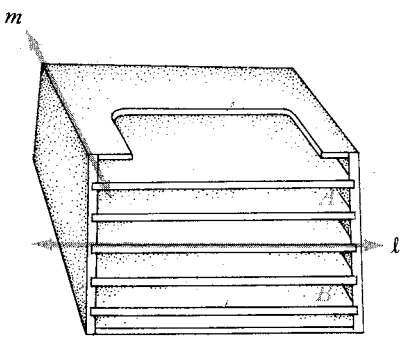
Rectas y planos paralelos

5.1 Definiciones básicas

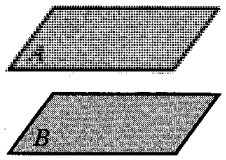


Unos estudiantes universitarios construyeron este biplano y lo llamaron «Chrysalis». Es accionado por pedales, como una bicicleta. Durante el verano de 1979, el avión realizó 320 vuelos.

Este biplano utiliza varios conceptos que se estudiarán en esta sección, como las rectas paralelas, rectas paralelas a un plano, planos paralelos y rectas no paralelas que no se intersecan.



Las rectas ℓ y m no están en el mismo plano y no se intersecan. Se denominan *rectas alabeadas*. La recta ℓ es paralela al plano A.



Los planos A y B no tienen puntos en común. Son *planos paralelos*.

Definición 5.1

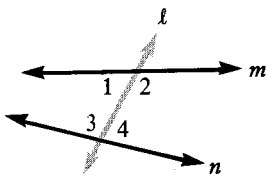
Las **rectas alabeadas** son dos rectas que no se intersecan y no están en mismo plano.

Definición 5.2

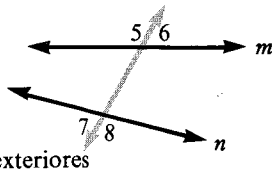
Una recta y un plano son paralelos si no tienen puntos en común.

Definición 5.3

Los **planos paralelos** son planos que no tienen puntos en común.



Angulos interiores



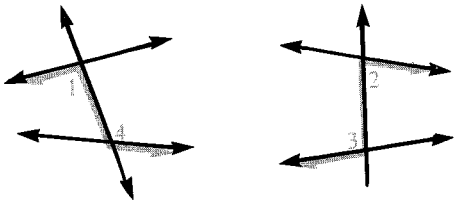
Angulos exteriores

La recta ℓ interseca a las rectas m y n en dos puntos diferentes y forma *ángulos interiores* y *exteriores*. A ℓ se le llama *transversal*.

Definición 5.4

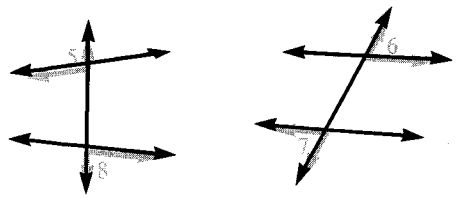
Una **transversal** es una recta que interseca a dos rectas coplanares en dos puntos diferentes.

Dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos importantes para el estudio de las rectas paralelas.



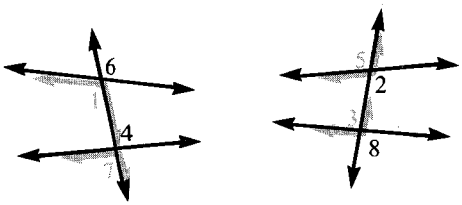
Los **ángulos alternos interiores** son dos ángulos interiores con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal.

$\angle 1$ y $\angle 4$ son *ángulos alternos interiores.*
$\angle 2$ y $\angle 3$ son *ángulos alternos interiores.*



Los **ángulos exteriores** son dos ángulos exteriores con diferentes vértices en lados opuestos de la transversal.

$\angle 5$ y $\angle 8$ son *ángulos alternos exteriores.*
$\angle 6$ y $\angle 7$ son *ángulos alternos exteriores.*



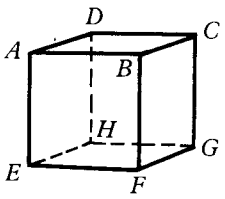
Los **ángulos correspondientes** están en el mismo lado de la transversal. Uno de los ángulos es un ángulo exterior, el otro es un ángulo interior.

Hay cuatro pares de *ángulos correspondientes:* $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 6$ y $\angle 4$; $\angle 5$ y $\angle 3$; $\angle 2$ y $\angle 8$.

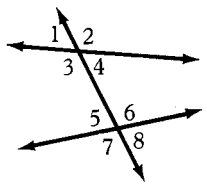
EJERCICIOS

A. Los ejercicios 1 a 3 se refieren al cubo de la derecha. Un modelo de un cubo o una caja de zapatos puede ayudar a visualizar el cubo.

1. Cítense cuatro rectas que sean alabeadas con $\overleftrightarrow{AB}$.
2. Cítense seis rectas que sean paralelas al plano $ABCD$.
3. Cítense tres pares de planos paralelos.
4. Cítense dos pares de ángulos alternos interiores.
5. Cítense dos pares de ángulos alternos exteriores.
6. Cítese el ángulo correspondiente con $\angle 1$.



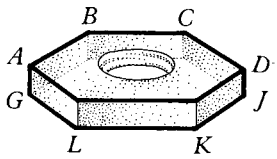
(Ejercicios 1-3)



(Ejercicios 4-6)

B.

7. Esta figura muestra una tuerca hexagonal. Cítense tres pares de planos paralelos.
8. Varias rectas que contienen los extremos de esta figura son alabeadas con $\overleftrightarrow{AB}$. ¿Cuántas son?

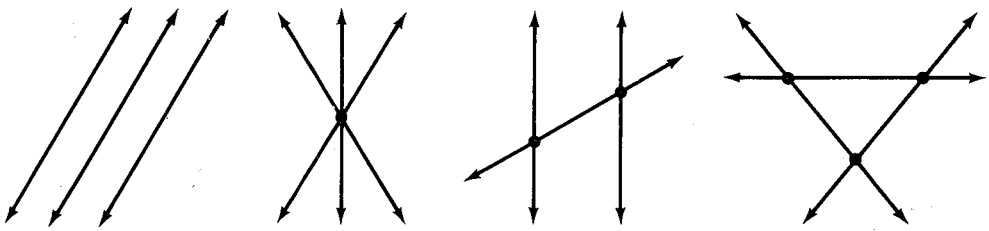


(Ejercicios 7, 8)

ACTIVIDADES

¿Cuántos puntos de intersección se forman con un número dado de rectas? Depende de sus posiciones en relación unas con otras.

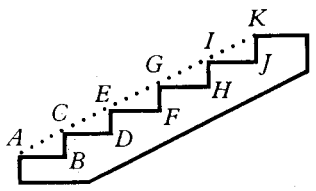
Ejemplo: Tres rectas pueden formar:



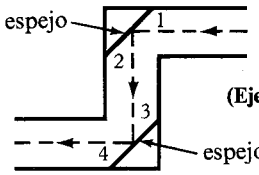
0 puntos, 1 punto, 2 puntos o 3 puntos

Experimento: Obsérvese si pueden disponerse cuatro rectas para formar un punto, dos puntos, tres puntos..., más de seis puntos de intersección. ¿Y cinco rectas?

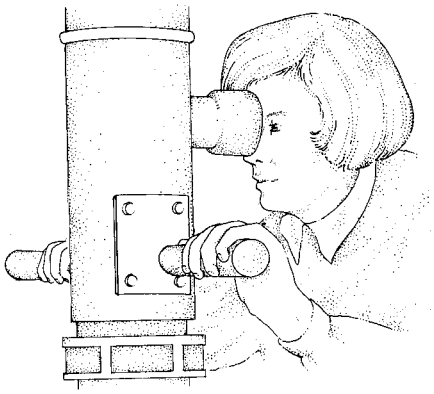
9. Un carpintero construyó una escalera cortando triángulos como $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ de un trozo de madera. ¿Con qué par de ángulos y con qué transversal son $\angle DCE$ y $\angle FEG$ ángulos correspondientes?



10. En un periscopio se coloca un par de espejos paralelos entre sí según muestra la figura. La trayectoria de la luz forma una transversal. ¿Qué par de ángulos son alternos interiores, $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 1$ y $\angle 4$, $\angle 2$ y $\angle 3$, o $\angle 2$ y $\angle 4$?

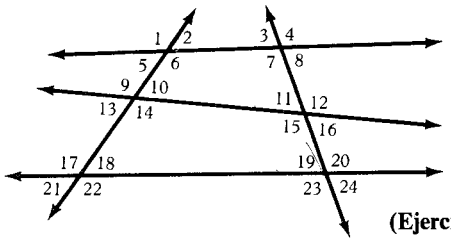


(Ejercicio 10)



11. Cítense dos pares de ángulos alternos interiores que incluyan al $\angle 14$.

12. Cítense tres pares de ángulos alternos exteriores que incluyan $\angle 21$.



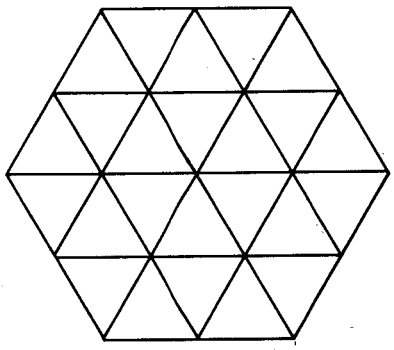
(Ejercicios 11, 12)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Elabórese una rejilla de rectas paralelas como la de la figura.

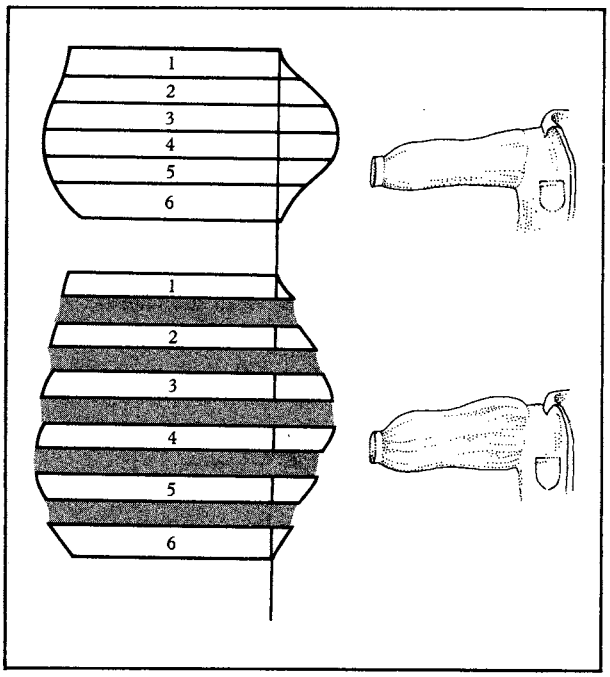
1. Colóquense cinco fichas rojas sobre cinco intersecciones de manera que no haya dos en la misma recta.

2. Después, colóquense cinco fichas azules sobre cinco intersecciones de manera que no haya dos fichas sobre la misma recta.

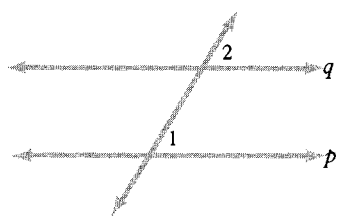


5.2 Teoremas sobre rectas paralelas

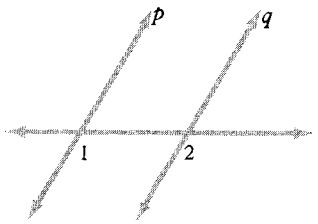
Las rectas paralelas se usan a diario de diversas formas. Los herreros colocan barras de acero paralelas entre sí. Los agrimensores, con frecuencia, marcan divisiones de propiedades paralelas entre sí. Los diseñadores de ropa también usan rectas paralelas. En la figura se muestra un patrón básico para una manga de camisa. Para elaborar un patrón de una manga más ancha, el diseñador traza rectas paralelas sobre el patrón. Entonces, las franjas formadas por estas paralelas se cortan y se separan para formar un nuevo patrón.



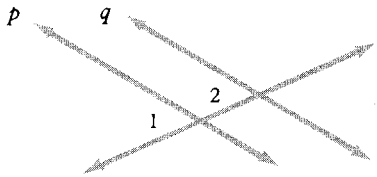
Los pares de ángulos formados por un par de rectas y una transversal son importantes en el trazado de rectas paralelas. Estas tres figuras sugieren una relación importante.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.



Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.

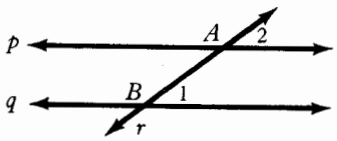


Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.
Obsérvese que $p \parallel q$.

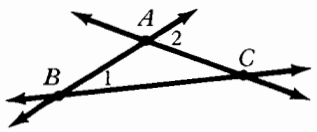
Teorema 5.1 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

PRUEBA

Dado: Las rectas p, q y r con $\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $p \parallel q$.

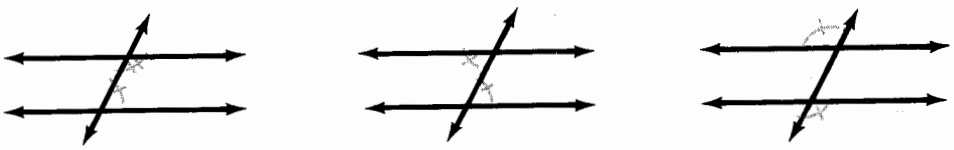


Plan: Se supone $p \nparallel q$. (*Nota:* $\nparallel$ significa «no es paralela a».) Entonces, se considera el triángulo que se formaría y se encuentra una contradicción.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $p \nparallel q$.	**1.** Suposición de la prueba indirecta.
2. Entonces, p y q se intersecan en un punto, sea C, y se forma $\triangle ABC$.	**2.** Replanteamiento de 1.
3. $\angle 2$ es un ángulo exterior de $\triangle ABC$.	**3.** Definición de ángulo exterior.
4. $\angle 1$ es un ángulo interior no contiguo con $\angle 2$.	**4.** Definición de ángulo interior no contiguo.
5. $m\angle 2 > m\angle 1$.	**5.** Teorema del ángulo exterior.
6. $m\angle 1 = m\angle 2$ (contradicción de $m\angle 2 > m\angle 1$).	**6.** Dado.
7. Por tanto, $p \parallel q$.	**7.** Lógica de la prueba indirecta.

Hay otros tres teoremas relacionados. ¿A qué teorema corresponde cada figura?



Teorema 5.2 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

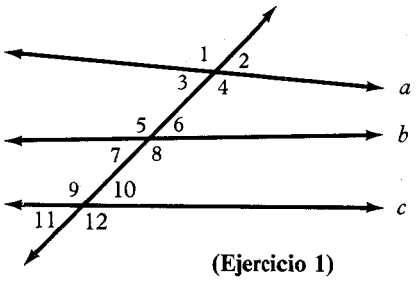
Teorema 5.3 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos exteriores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 5.4 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.

EJERCICIOS

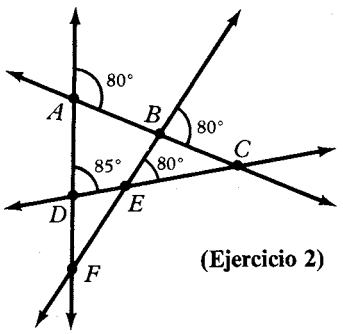
A.

1. En los siguientes casos, ¿qué rectas podría concluirse que son paralelas y qué teorema justifica la respuesta?
   - **a.** $\angle 1 \cong \angle 9$.
   - **b.** $\angle 3 \cong \angle 6$.
   - **c.** $m\angle 8 + m\angle 10 = 180$.
   - **d.** $\angle 4 \cong \angle 9$.
   - **e.** $\angle 8 \cong \angle 12$.
   - **f.** $\angle 1 \cong \angle 8$.



(Ejercicio 1)

2. Hágase una lista de todos los datos contradictorios que aparecen en la figura siguiente.

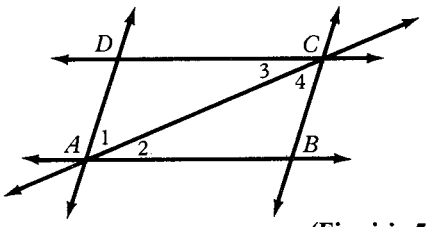


(Ejercicio 2)

3. Cítense cuatro formas de probar que dos rectas son paralelas.

4. Estúdiese la fotografía de la página 170. Indíquense ejemplos de segmentos paralelos y una transversal.

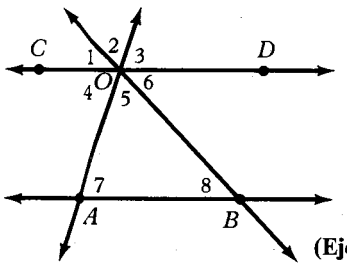
5. ¿Qué ángulos de esta figura se podría probar que son congruentes de manera que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$?



(Ejercicio 5)

6. ¿Qué pares de ángulos de esta figura se podría probar que son congruentes para mostrar que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$?

7. ¿Qué pares de ángulos de esta figura se podría probar que son suplementarios para concluir que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$?



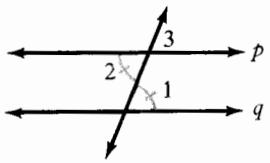
(Ejercicios 6, 7)

B.

8. Complétese la siguiente prueba a dos columnas para el teorema 5.2.

Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$.

Pruébese: $p \parallel q$.

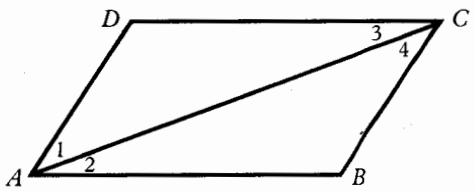


Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 2$.	1. ?
2. $\angle 2 \cong \angle 3$.	2. ?
3. $\angle 1 \cong \angle 3$.	3. Propiedad transitiva de la congruencia.
4. $p \parallel q$.	4. ?

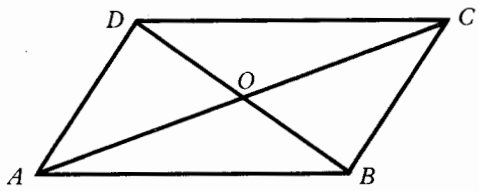
En los ejercicios 9 a 12, formúlese una prueba completa a dos columnas.

9. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

(*Sugerencia:* Primero demuéstrese que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.)

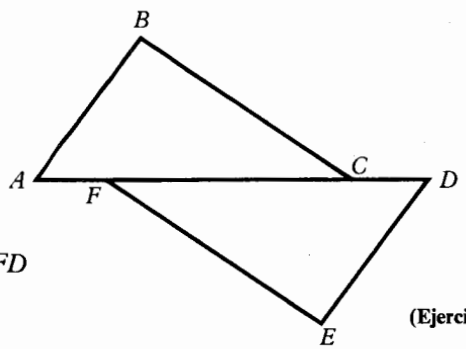


10. Dado: $\overline{DO} \cong \overline{OB}$
$\overline{AO} \cong \overline{OC}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



11. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$\overline{AF} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\overline{BC} \parallel \overline{FE}$.

12. Dado: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$\angle BCA \cong \angle EFD$
$\overline{AF} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$.



(Ejercicios 11, 12)

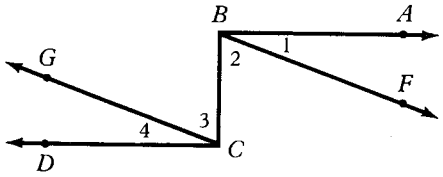
13. Pruébese que si dos rectas en un plano son perpendiculares a una recta, son paralelas.

14. Pruébese el teorema 5.3.

15. Pruébese el teorema 5.4.

C.

16. Dado: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
$\overline{DC} \perp \overline{BC}$
$\angle 1 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{GC}$.

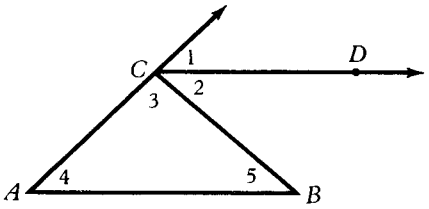


(Ejercicios 16-18)

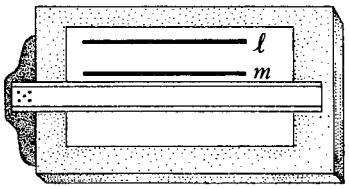
17. Dado: $\angle ABC \cong \angle BCD$
$\overrightarrow{BF}$ biseca $\angle ABC$
$\overrightarrow{CG}$ biseca $\angle BCD$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG}$.

18. Dado: $\angle 2 \cong \angle 3$
$\angle 1 \cong \angle 4$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

19. Dado: $m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5 = 180$
$\angle 4 \cong \angle 5$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

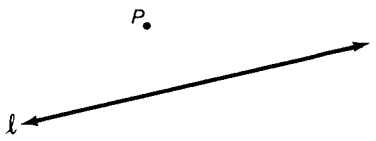


20. Un diseñador usa una regla T para trazar un par de rectas paralelas en una hoja de papel. ¿Cómo se puede tener la seguridad de que las rectas son paralelas?

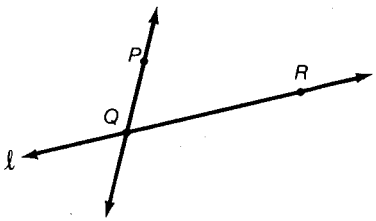


ACTIVIDADES

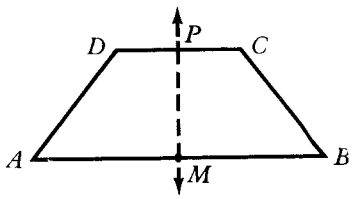
Trácese una recta ℓ y un punto P que no esté en esa recta.



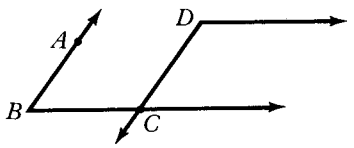
Sólo con un compás y una regla trácese una recta a través de P que sea paralela a ℓ. (*Sugerencia:* Iníciese la construcción trazando una recta que pase por P y que interseque a la recta ℓ.)



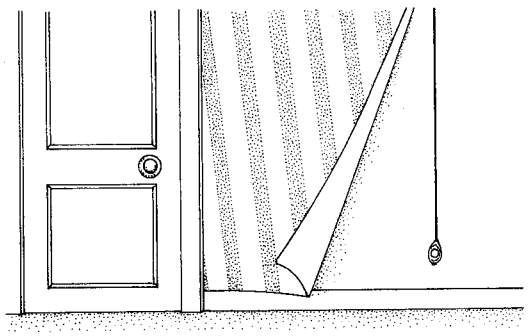
21. Dado: $\overleftrightarrow{PM}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$
$\angle A \cong \angle B$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
(*Sugerencia:* Trácense algunas rectas auxiliares. Una recta auxiliar es una recta que se añade a la figura para ayudar a probar un teorema o a solucionar un problema.)



22. Dado: $\angle BCD \cong \angle D$
$m\angle B + m\angle D = 180$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$.



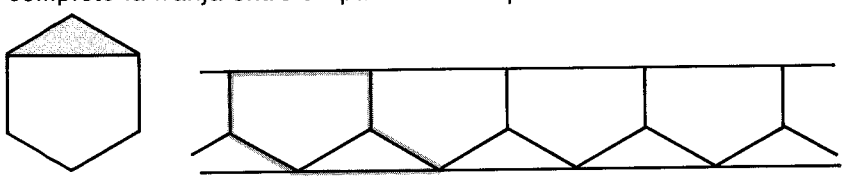
23. Una plomada (un peso suspendido de un cordel) sirve para marcar con yeso una recta sobre una pared. Si la primera hoja de papel tapiz se coloca a lo largo de la línea de yeso, ¿por qué asegura esto que el borde del papel es paralelo a las puertas, ventanas y esquinas del cuarto?



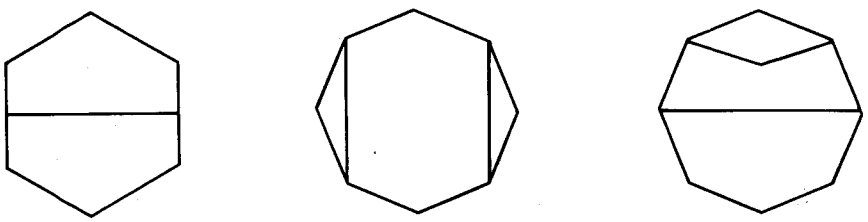
SOLUCION DE PROBLEMAS

Algunas formas poligonales pueden cortarse en piezas que se pueden colocar para conseguir nuevas formas poligonales. Las piezas recortadas cubren por completo la franja entre un par de rectas paralelas.

Ejemplo:



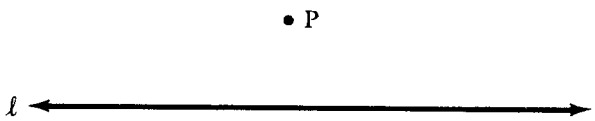
Muéstrese que las formas poligonales con los cortes indicados pueden colocarse para cubrir dicha franja paralela.



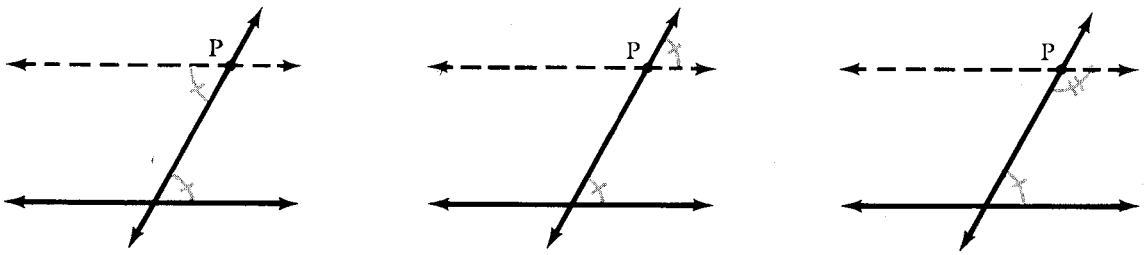
5.3 El postulado de las rectas paralelas

En la última actividad se trazó un par de rectas paralelas.

En realidad, hay tres métodos relacionados que podrían resumirse con estas tres figuras. Para establecer la corrección de estas construcciones podrían usarse los teoremas de la sección anterior.



REPASO: Trácese una recta a través de P que sea paralela a ℓ.

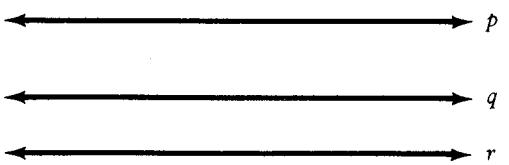


Parece natural suponer, como se hizo en el postulado de las paralelas, que sólo hay una recta que pase por P y sea paralela a ℓ. Pero, ¿por qué es cierto esto? Esta pregunta es históricamente significativa (véase más adelante).

Postulado de las paralelas

Dados una recta ℓ y un punto P que no está en la recta ℓ, existe sólo una recta a través de P que sea paralela a ℓ.

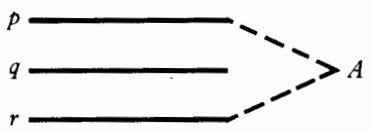
La prueba del teorema siguiente ilustra el uso del postulado de las paralelas.



Teorema 5.5 Dadas las rectas p, q y r, si $p \parallel q$ y $q \parallel r$, entonces $p \parallel r$.

PRUEBA

Dado: Las rectas p, q y r son tres rectas distintas, $p \parallel q$, $q \parallel r$.
Pruébese: $p \parallel r$.



Afirmaciones	Razones
1. Supóngase que $p \nparallel r$.	**1.** Suposición de la prueba indirecta.
2. p y r tienen un punto en común. Llámesele A.	**2.** Replanteamiento de 1.
3. $p \parallel q$.	**3.** Dado.
4. $r \parallel q$.	**4.** Dado.
5. Las rectas p y r son dos rectas distintas que pasan por A y son paralelas a q. (Contradicción del postulado de las paralelas que afirma que hay sólo una recta que pase por A y sea paralela a q.)	**5.** Afirmaciones 3 y 4.
6. Por tanto, $p \parallel r$.	**6.** Lógica de la prueba indirecta.

IMPORTANCIA HISTORICA DEL POSTULADO DE LAS PARALELAS

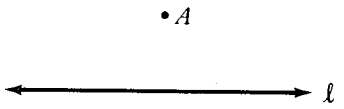
Karl Friedrich Gauss

Durante siglos, los matemáticos intentaron demostrar que el postulado de las paralelas era un teorema. Tales intentos fallaron una y otra vez. A principios del siglo XIX, tres matemáticos, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), trabajando independientemente, intentaron separar el postulado de las paralelas del sistema euclidiano de postulados y probar que era un teorema. Utilizaron un método indirecto, pero en lugar de llegar a una contradicción, encontraron que esta suposición representaba un conjunto totalmente nuevo de teoremas, una geometría totalmente nueva. Este importante descubrimiento matemático dio lugar a lo que hoy se conoce como geometría no euclidiana.

EJERCICIOS

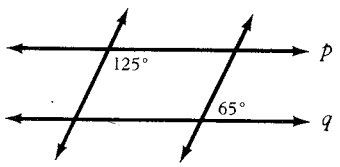
A.

1. Dése una expresión propia al postulado de las paralelas.
2. ¿Cuáles son las dos palabras más importantes del postulado de las paralelas?
3. Clasifíquense las siguientes afirmaciones en falsas o verdaderas.
   a. Hay una recta que pasa por A y es paralela a ℓ.
   b. Podría probarse que hay una recta que pasa por A y es paralela a ℓ aun sin usar el postulado de las paralelas.
   c. El postulado de las paralelas dice que hay sólo una recta que pasa por A y es paralela a ℓ.
   d. Si p es una recta que pasa por A y es perpendicular a ℓ, y q es una recta que pasa por A y es perpendicular a p, entonces $q \parallel \ell$.

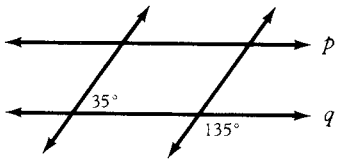


En los ejercicios 4 y 5, determínese si se puede probar que las rectas p y q son paralelas.

4.

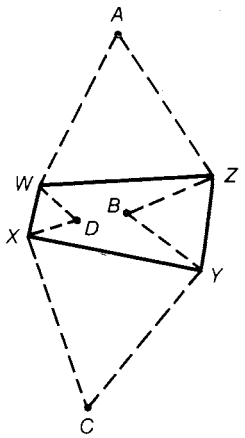


5.



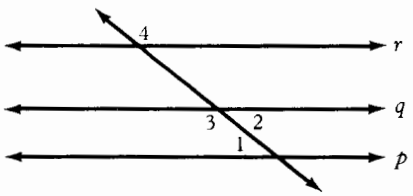
ACTIVIDADES

1. Con una regla, dibújese un cuadrilátero cualquiera $WXYZ$.
2. Dibújense triángulos equiláteros a cada lado del cuadrilátero, alternándolos en el interior y el exterior del cuadrilátero y llámese a los nuevos vértices A, B, C y D.
3. ¿Qué relación resulta verdadera para $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, y para $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$?
4. Enúnciese una generalización.

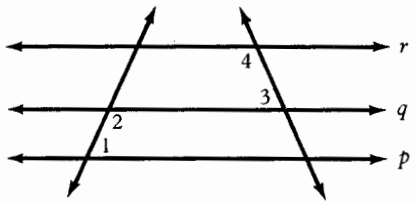


B.

6. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$.
Pruébese: $p \parallel r$.

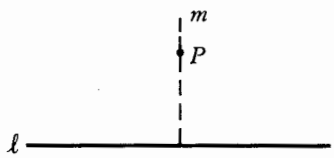


7. Dado: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$.
Pruébese: $p \parallel r$.



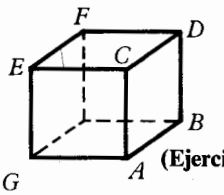
8. Dados una recta ℓ y un punto P, trácese la perpendicular de P a ℓ y llámese m. Trácese la recta $\perp$ a m que pase por P y llámese r. ¿Cuál es la relación entre r y ℓ y por qué?

9. Muéstrese que la actividad de la página 178 da por resultado un par de rectas paralelas.



C.

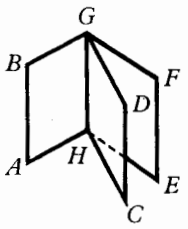
Para los siguientes ejercicios puede suponerse que el teorema 5.5 es verdadero para rectas en el espacio, además de serlo para las rectas en un plano.



(Ejercicio 10)

10. Si $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son las aristas de un cubo como muestra la figura, demuéstrese que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

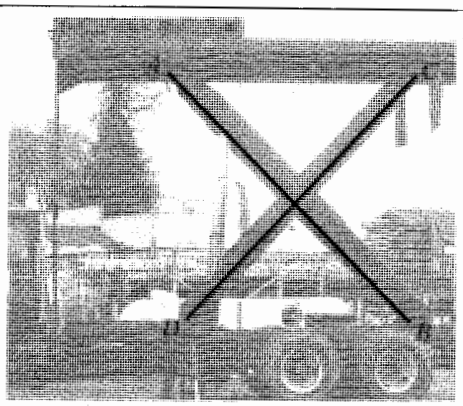
11. Si $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son los bordes de tres páginas de un libro (supóngase que se trata de páginas rectangulares), pruébese que $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ son pralelas entre sí.



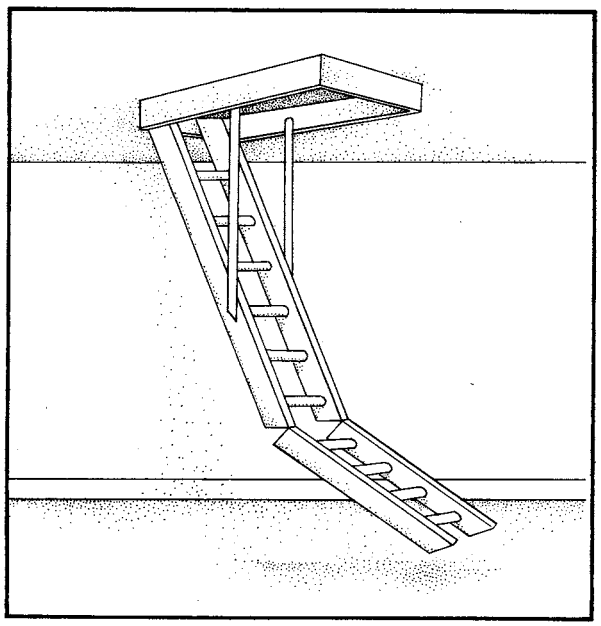
SOLUCION DE PROBLEMAS

Esta fotografía muestra las «tijeras» de una plataforma de camión abiertas, alzando la plataforma a su altura máxima. Los soportes, designados como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se bisecan.

Explíquese por qué estas condiciones significan que la plataforma del camión está paralela a la estructura base del camión.

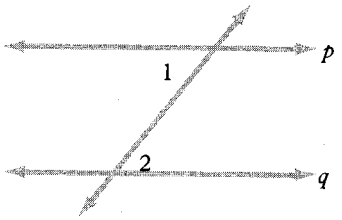


5.4 Más teoremas sobre rectas paralelas

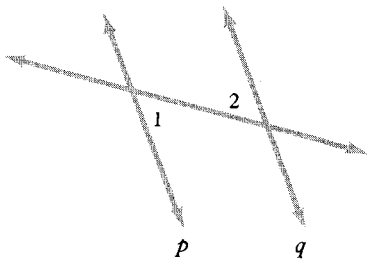


Muchos aficionados a las reparaciones caseras compran escaleras plegables para instalar en el techo de la casa o del garaje. Estas escaleras se fabrican siempre de la misma longitud. La persona que la instala debe determinar cómo cortar la parte inferior de manera que la escalera se apoye firmemente sobre el piso, para lo cual se deben tener en cuenta la longitud y el ángulo. El hecho de que el piso y el techo son paralelos es muy importante para resolver este problema.

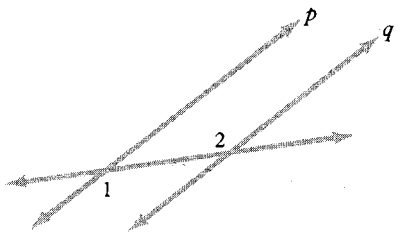
En estas figuras, ¿cuál es la relación entre $\angle 1$ y $\angle 2$?



Dado: $p \parallel q$.
Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.



Dado: $p \parallel q$.
Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.



Dado: $p \parallel q$.
Obsérvese que $\angle 1 \cong \angle 2$.

Las figuras anteriores sugieren el siguiente teorema.

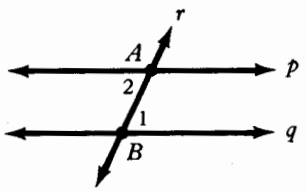
Teorema 5.6 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.

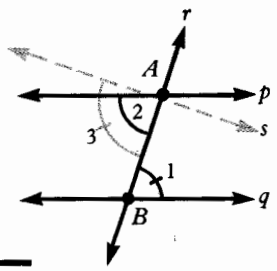
PRUEBA

Dado: Las rectas $p \parallel q$ se cortan por la transversal r. $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos alternos interiores.

Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.

Plan: Supóngase que $\angle 1$ no es congruente con $\angle 2$ y encuéntrese una contradicción.





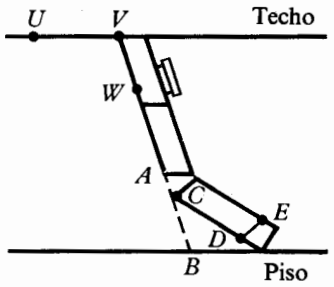
Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ no es congruente con $\angle 2$.	1. Suposición de la prueba indirecta.
2. Trácese una recta que pase por A para que $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 1$ y $\angle 3$ sean ángulos alternos interiores.	2. Construcción.
3. $q \parallel s$, A está en s.	3. Si los ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
4. $p \parallel q$, A está en p.	4. Dado.
5. Hay dos rectas que pasan por A y son paralelas a q. (Contradicción del postulado de las paralelas.)	5. Afirmaciones 3 y 4.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$.	6. Lógica de la prueba indirecta.

APLICACION

El teorema 5.6 puede usarse para resolver el problema planteado al principio de esta sección. ¿Cómo debe cortarse la parte inferior de la escalera?

Sígase este procedimiento.

1. Mídase AB y localícese un punto D de manera que $AB = CD$.
2. Mídase $\angle UVW$ y localícese un punto E de manera que $m\angle UVW = m\angle CDE$.



Hay varios teoremas adicionales que se desprenden de esto:

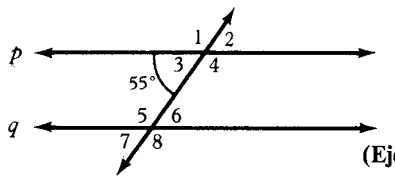
Teorema 5.7 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos exteriores son congruentes.

Teorema 5.8 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 5.9 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

EJERCICIOS

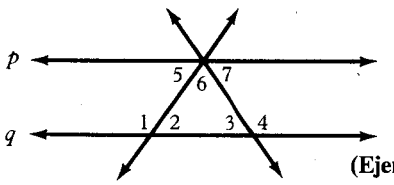
A.



(Ejercicios 1-7)

En la figura de los ejercicios 1 a 7, las rectas p y q son paralelas y $m\angle 3 = 55$.

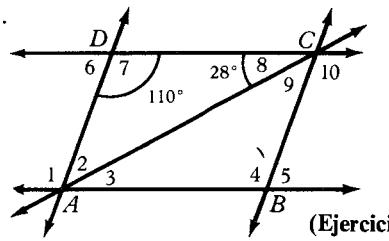
1. $m\angle 1 =$?.
2. $m\angle 2 =$?.
3. $m\angle 4 =$?.
4. $m\angle 5 =$?.
5. $m\angle 6 =$?.
6. $m\angle 7 =$?.
7. $m\angle 8 =$?.



(Ejercicios 8-12)

En la figura de los ejercicios 8 a 12, las rectas p y q son paralelas, y $m\angle 1 = 125$ y $m\angle 4 = 143$.

8. $m\angle 2 =$?.
9. $m\angle 3 =$?.
10. $m\angle 5 =$?.
11. $m\angle 7 =$?.
12. $m\angle 6 =$?.

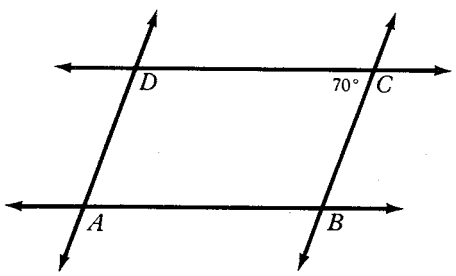


(Ejercicios 13-22)

En la figura de los ejercicios 13 a 22, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Además, $m\angle ADC = 110$ y $m\angle ACD = 28$.

13. $m\angle 1 =$?.
14. $m\angle 10 =$?.
15. $m\angle 3 =$?.
16. $m\angle 4 =$?.
17. $m\angle 5 =$?.
18. $m\angle 6 =$?.
19. $m\angle BCD =$?.
20. $m\angle 9 =$?.
21. $m\angle 2 =$?.
22. $m\angle BAD =$?.

23. Supóngase que en la figura $m\angle BCD = 70$. ¿Cuáles deben ser las medidas de $\angle ABC$, $\angle CDA$ y $\angle DAB$ si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$?

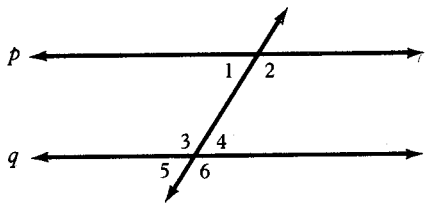


B.

Para los ejercicios 24 y 25, supóngase que las rectas p y q son paralelas.

24. Si $m\angle 1 = 2x + 3$ y $m\angle 4 = 7x - 12$, encuéntrense $m\angle 1$ y $m\angle 2$.

25. Si $m\angle 1 = 2x + 4$, $m\angle 5 = 3y + 6$ y $m\angle 2 = 4y + 6$, encuéntrense las medidas de $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 5$.



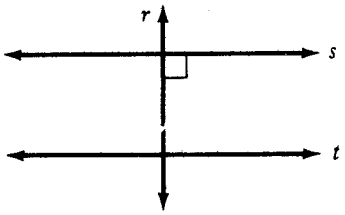
(Ejercicios 24, 25)

26. Pruébese el teorema 5.8.

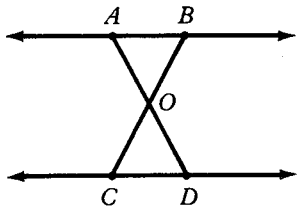
27. Pruébese el teorema 5.9.

28. Pruébese el teorema 5.7.

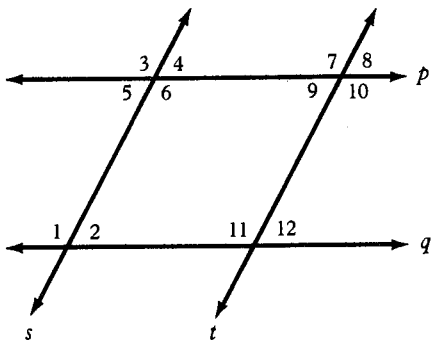
29. **Dado:** $s \parallel t$
$r \perp s$.
Pruébese: $r \perp t$.



30. **Dado:** $\overline{AO} \cong \overline{OD}$
$\overline{BO} \cong \overline{OC}$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



31. **Dado:** $p \parallel q$
$s \parallel t$.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 7$
$\angle 2 \cong \angle 9$.



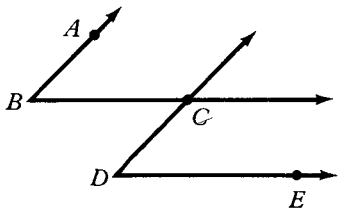
(Ejercicios 31-33)

32. **Dado:** $p \parallel q$
$\angle 3 \cong \angle 11$.
Pruébese: $s \parallel t$.

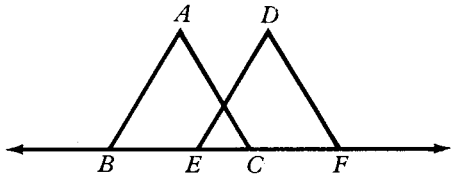
33. **Dado:** $s \parallel t$
$\angle 9$ y $\angle 1$ son suplementarios
Pruébese: $p \parallel q$.

C.

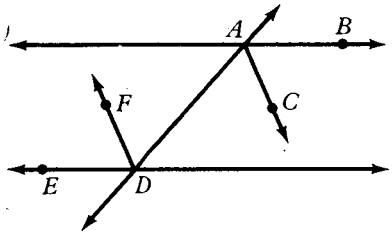
34. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.
Pruébese: $\angle B \cong \angle D$.



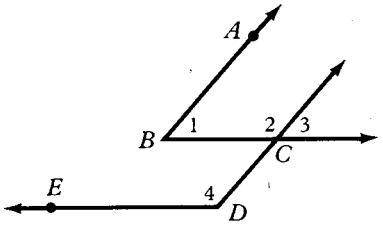
35. Dado: $\angle A \cong \angle D$
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$.
Pruébese: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.



36. Dado: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{AC}$ biseca $\angle BAD$
$\overrightarrow{DF}$ biseca $\angle ADE$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{FD}$.



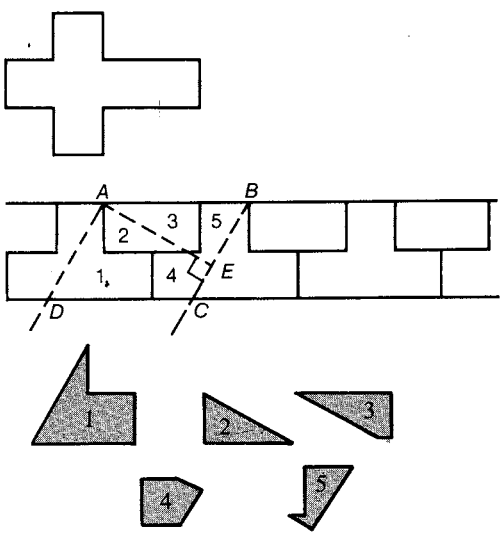
37. Dado: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.
Pruébese: $m\angle 1 + m\angle 4 = 180$.



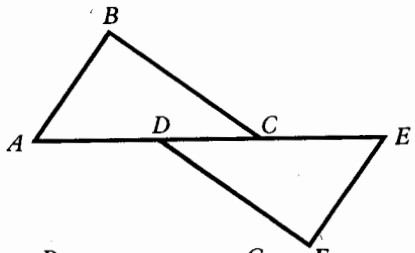
$\angle BAD \cong \angle EDA$: $\frac{1}{2}m\angle BAD = \frac{1}{2}m\angle EDA$; use el teorema 5-2.

ACTIVIDADES

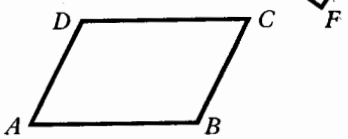
1. Empiécese por un polígono que se pueda cortar en piezas y ser reordenado en una franja formando un patrón repetitivo (como en la página 179).
2. Denomínense los puntos *A* y *B* de manera que sean dos puntos cualesquiera que se correspondan entre sí en piezas adyacentes de la franja.
3. Trácese un par de rectas paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ como se muestra en la figura. Trácese $\overline{AE} \perp \overline{BC}$. Las piezas 1 a 5 obtenidas de esta forma pueden colocarse para formar el polígono original o un rectángulo.
4. Repítase este procedimiento de tres pasos para los polígonos de la solución de problemas de la página 179. En cada caso colóquense las piezas cortadas para formar un rectángulo.



38. Dado: $\overline{AD} \cong \overline{EC}$
$\overline{BC} \cong \overline{FD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{FD}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.



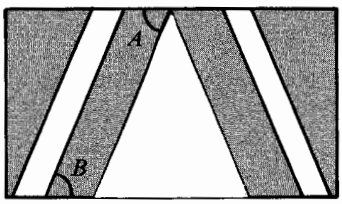
39. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, pruébese que $\angle B \cong \angle D$.



40. Pruébese: Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces, los otros dos lados opuestos son congruentes y paralelos.

41. Un decorador de interiores está pegando tiras de papel tapiz en una pared para hacer un diseño de franjas inclinadas.

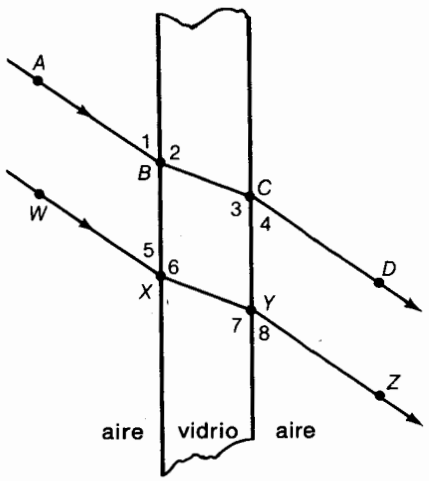
Al cortar el papel, ¿cómo sabe el decorador que $\angle A$ y $\angle B$ deben ser congruentes?



SOLUCION DE PROBLEMAS

Los rayos de luz se inclinan al pasar a través de un vidrio. Supóngase que un rayo de luz sufre la misma inclinación al entrar que al salir del vidrio. Explíquense dos cosas:

1. ¿Por qué el rayo sale en dirección paralela a la de entrada? Esto es, ¿por qué $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$?
2. ¿Por qué los rayos que son paralelos al entrar son paralelos también al salir? Esto es, ¿por qué $\overline{AB} \parallel \overline{WX}$ implica $\overline{CD} \parallel \overline{YZ}$?



Capítulo 5 Conceptos importantes

Términos

Rectas alabeadas (pág. 386)
Rectas y planos paralelos (pág. 386)
Planos paralelos (pág. 386)
Transversal (pág. 387)
Angulos alternos interiores (pág. 387)
Angulos alternos exteriores (pág. 387)
Angulos correspondientes (pág. 387)

Postulado

Postulado de las paralelas: Dadas una recta ℓ y un punto P que no está en ℓ, existe sólo una recta que pasa por P y es paralela a ℓ.

Teoremas

5.1 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

5.2 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos interiores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

5.3 Si dos rectas se cortan por una transversal y un par de ángulos alternos exteriores son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

5.4 Si dos rectas se cortan por una transversal, y un par de ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.

5.5 Dadas las rectas p, q y r, si $p \parallel q$ y $q \parallel r$, entonces $p \parallel r$.

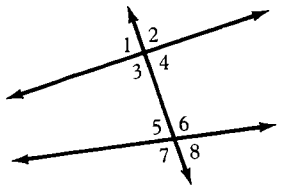
5.6 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.

5.7 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos exteriores son congruentes.

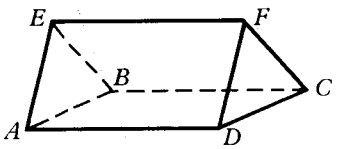
5.8 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

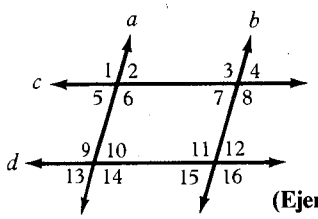
5.9 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.

Capítulo 5 Resumen

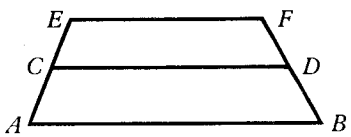


1. **a.** Cítense pares de ángulos alternos interiores.
   b. Cítense pares de ángulos alternos exteriores.
   c. Cítense pares de ángulos correspondientes.
2. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a. Si dos rectas son paralelas y se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
   b. Si dos rectas se cortan por una transversal para formar ángulos alternos interiores, entonces las rectas son paralelas.
   c. Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces las dos rectas son paralelas.
3. **a.** Cítese un par de planos paralelos.
   b. Cítese un par de rectas alabeadas.
4. Si $m\angle 6 = 120$ y $m\angle 12 = 60$, ¿puede probarse que $a \parallel b$?
5. Si $m\angle 13 = 55$, $a \parallel b$, y $c \nparallel d$, encuéntrese $m\angle 4$.
6. **Dado:** $a \parallel b$, $c \parallel d$ $m\angle 1 = 8x - 2$, $m\angle 11 = 7x + 11$.
   Despéjese x y encuéntrese $m\angle 10$.
7. **Dado:** $c \parallel d$
   $\angle 8$ y $\angle 10$ son suplementarios.
   Pruébese: $a \parallel b$.
8. **Dado:** $\angle ECD \cong \angle EAB$.
   Pruébese: $\angle FDC \cong \angle FBA$.



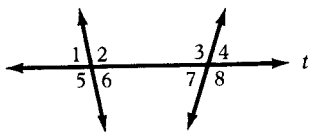


(Ejercicios 4-7)

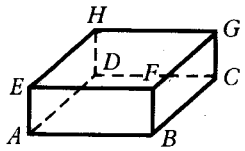


(Ejercicio 8)

Capítulo 5 Examen



1. **a.** Cítese un par de ángulos alternos interiores que incluyan $\angle 2$.
   b. Cítese un par de ángulos correspondientes que incluyan $\angle 2$.

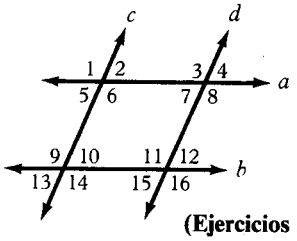


2. **a.** Cítese un par de planos paralelos.
   b. Cítese un par de rectas alabeadas.

3. Si $a \parallel b$, $m\angle 10 = 70$ y $m\angle 7 = 70$, ¿puede decirse que $c \parallel d$?

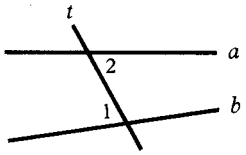
4. Si $m\angle 6 = 115$, $m\angle 7 = 65$ y $m\angle 15 = 65$, encuéntrese $m\angle 13$.

5. **Dado:** $a \parallel b$, $c \parallel d$, $m\angle 11 = 7x$ y $m\angle 8 = 5x + 32$.
   Despéjese x y encuéntrese $m\angle 6$.

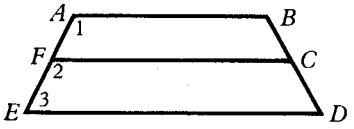


(Ejercicios 3-5)

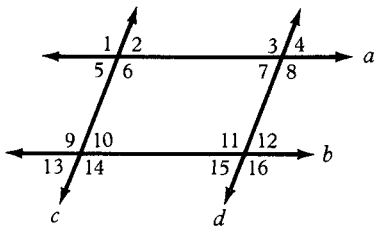
6. Si a interseca a b, ¿puede ser que $m\angle 1 = m\angle 2$? Explíquese.



7. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
   $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios.
   Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$.



8. **Dado:** $c \parallel d$, $\angle 8 \cong \angle 14$.
   Pruébese: $a \parallel b$.



Repaso de álgebra

Despéjese x en las ecuaciones siguientes:

1. $3x + 5 = 21 - x$.

2. $10 - 6x = 4 + 2(1 - x)$.

3. $5 - x = -3x$.

4. $5 + 2(x - 4) = 19$.

5. $\frac{1}{2}(2x - 6) = 2x + 5$.

6. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = 1$.

7. $4(x - 2) = 4 - (x + 2)$.

8. $\frac{1}{2}x + 2(x - 4) = 17$.

9. $2(x + 4) = 3(4 - x)$.

Despéjese x en las desigualdades siguientes:

10. $-x > 9$.

11. $x + 2 < 7$.

12. $2x + 6 > 17$.

13. $3(x - 2) < 8$.

14. $15 - 2x < x$.

15. $\frac{2x}{3} > 24$.

16. $3x + 7 > 2x - 4$.

17. $2|x| < 10$.

18. $|x + 2| > 14$.

Evalúese. Exprésense fracciones en términos menores:

19. $\sqrt{8}$.

20. $\sqrt{640}$.

21. $\sqrt{27} + \sqrt{3}$.

22. $8(8 - 6\sqrt{16})$.

23. $\sqrt{75} - \sqrt{12}$.

24. $\sqrt{108} + 3\sqrt{3}$.

25. $\dfrac{7\sqrt{196}}{14\sqrt{64}}$.

26. $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$.

27. $\sqrt{18} - \dfrac{\sqrt{8}}{8}$.

Despéjense x e y en los sistemas de ecuaciones siguientes:

28. $x = 2$
$x + y = 5$.

29. $2x + y = 14$
$3x + y = 4$.

30. $x = 2y + 1$
$y = 2x - 20$.

31. $x - y = 2$
$x + y = 6$.

32. $3x + 4y = 14$
$x - 3y = -17$.

33. $x + y = 10$
$x - y = 18$.

34. $3x + 4y = 18$
$6x - 4y = 0$.

35. $y = 2x$
$x + 3y = 49$.

36. $2x + y = 6$
$-3x + 2y = 8\frac{1}{2}$.

Resuélvase.

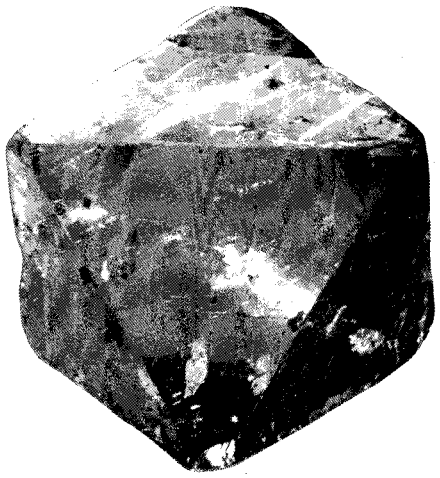
37. El ancho de un rectángulo es tres veces su longitud. Encuéntrense la longitud y la anchura del rectángulo si su perímetro es 24.

38. Un par lineal de ángulos mide $x + 20$ y $x + 30$. Encuéntrese la medida de cada ángulo.

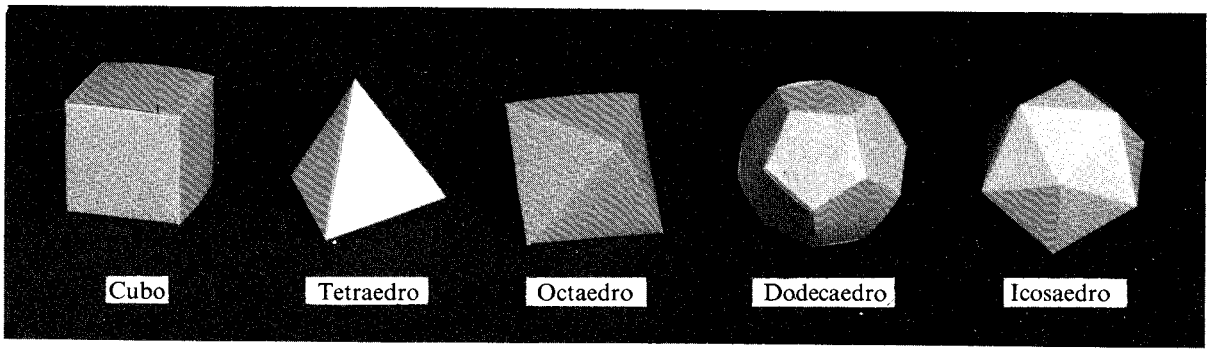
LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Mineralogía: simetría

En general, los minerales presentan disposiciones regulares de átomos que tienen cierta simetría geométrica. Aunque los cristales no siempre muestran una simetría perfecta, algunos tienen formas parecidas a la de alguno de los cinco poliedros que se muestran a continuación. Tales cristales tienen ejes de simetría de revolución y planos de simetría de reflexión.

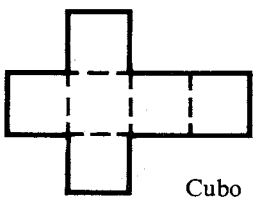


Fluorita

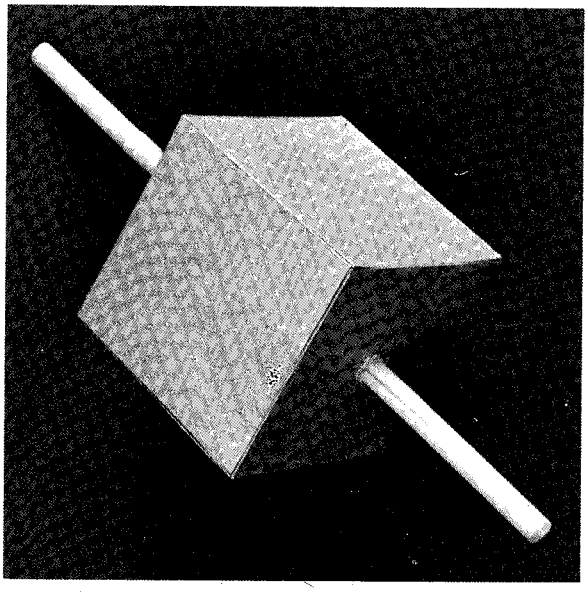


1 Encuéntrense ejes de simetría de revolución para un sólido.

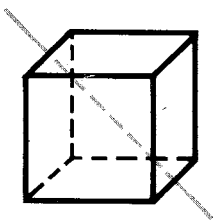
Puede plegarse un patrón como el que se muestra aquí y construir un cubo. Háganse dos orificios pequeños e introdúzcase un sorbeto a través del cubo como ilustra la fotografía. Si se hace girar el cubo 90° cuatro veces sobre el eje, el sorbeto, volverá a su posición original. Dado que esto es verdadero, se dice que el sorbeto representa un *eje de simetría de revolución de cuarto orden.*



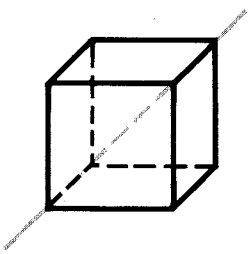
Cubo



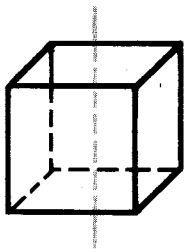
A continuación se muestran los tres ejes de simetría para un cubo.



Segundo orden
Una recta que pasa por los puntos medios de aristas opuestas.



Tercer orden
Una recta que pasa por un par de vértices opuestos.



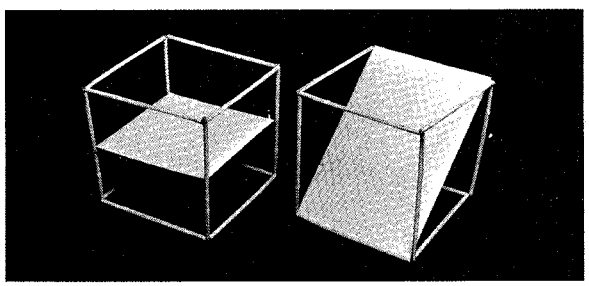
Cuarto orden
Una recta que pasa por el centro de caras opuestas.

a. ¿Cuántos ejes de simetría de segundo orden puede tener un cubo?

b. ¿Cuántos ejes de simetría de tercer orden puede tener un cubo?

c. ¿cuántos ejes de simetría de cuarto orden puede tener un cubo?

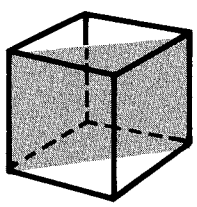
2 Encuéntrense planos de simetría de reflexión para un sólido

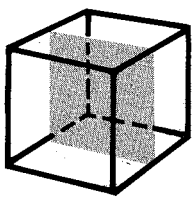


Puede construirse un modelo de un cubo con 12 sorbetos unidos con servilletas congruentes de papel como se ilustra en la fotografía. Córtense «planos» de cartulina y úsense para visualizar los planos de simetría como se muestra en los dibujos.

a. Un plano que pasa por aristas opuestas de un cubo, como en el primer dibujo, es un plano de simetría para el cubo. ¿Cuántos planos de simetría de este tipo tiene un cubo?

b. Un plano situado en el centro de un par de caras opuestas de un cubo es un plano de simetría para el cubo. ¿Cuántos planos de simetría de este tipo tiene un cubo?





TEMA 10

Triángulos

CAPÍTULO 6

6.1 Clasificación de los triángulos 414

6.2 Triángulos isósceles 418

6.3 Medidas de los ángulos de un triángulo 424

6.4 El teorema de la congruencia LAA 428

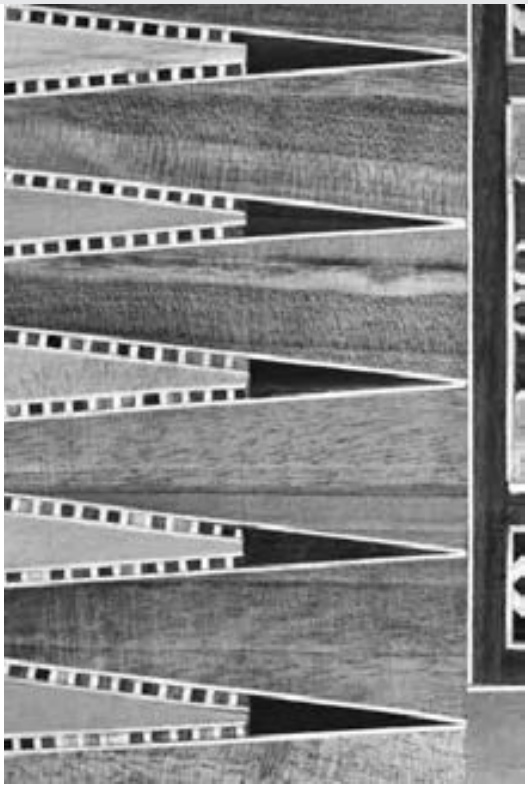
6.5 El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto 432

Conceptos importantes 436

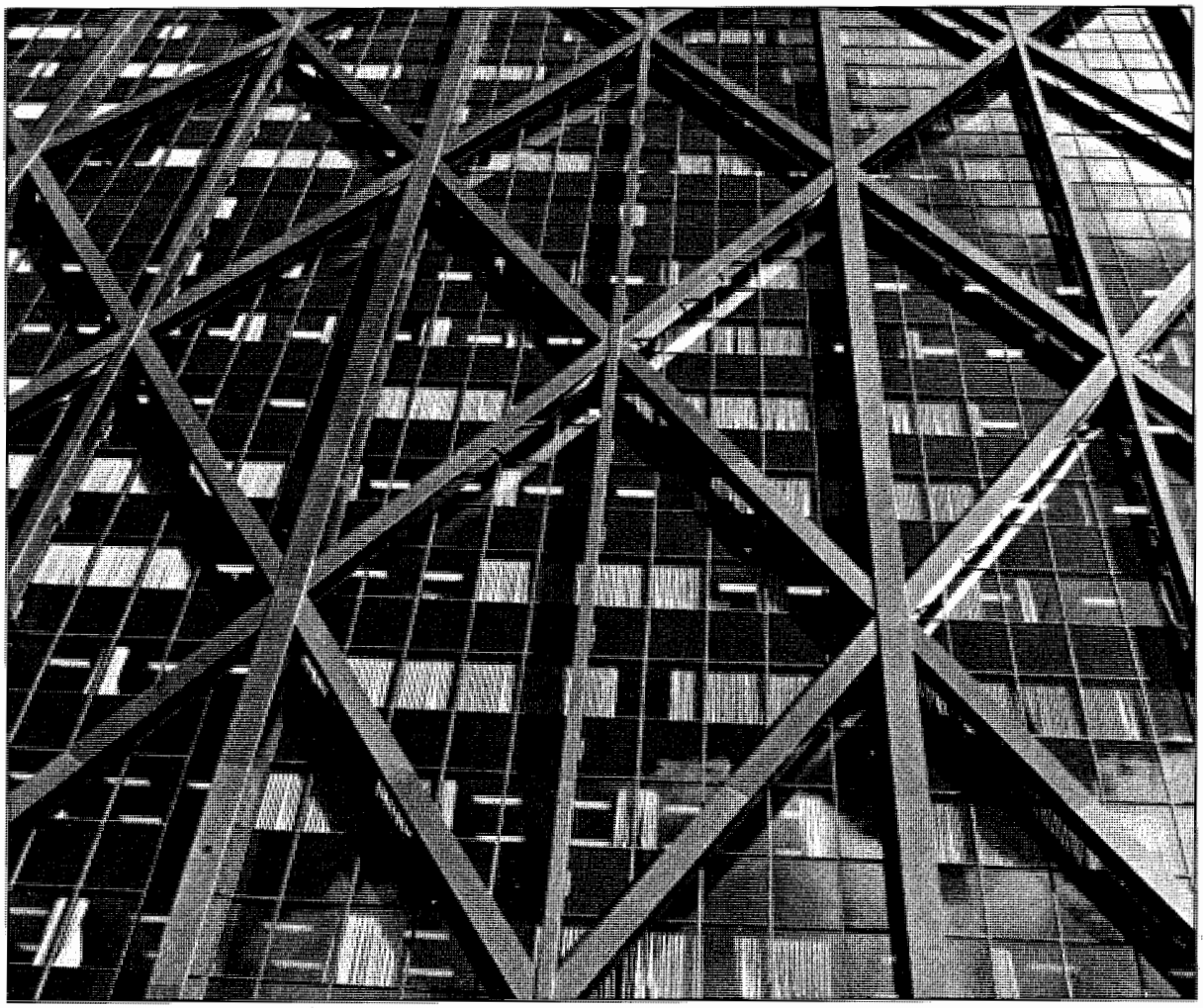
Resumen 437

Examen 438

Técnicas para la solución de problemas
Hacer una tabla-II 439



Triángulos

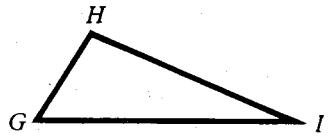


6.1 Clasificación de los triángulos

Las velas del barco de la fotografía ilustran diferentes formas de triángulos. Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según la medida de sus ángulos.

REPASO: Un **triángulo equilátero** es un triángulo con los tres lados congruentes.

REPASO: Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.



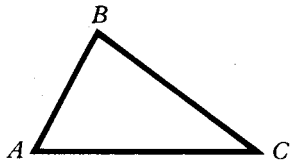
Ningún lado tiene la misma longitud.

$\triangle GHI$ es un *triángulo escaleno.*

Definición 6.1

Un **triángulo escaleno** es un triángulo que no tiene lados congruentes.

Los triángulos también se clasifican según la medida de sus ángulos.

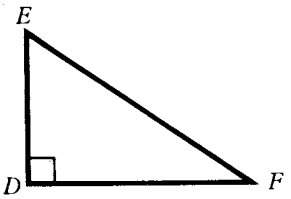


Todos los ángulos son agudos.

$\triangle ABC$ es un *triángulo acutángulo.*

Definición 6.2

Un **triángulo acutángulo** es un triángulo con tres ángulos agudos.

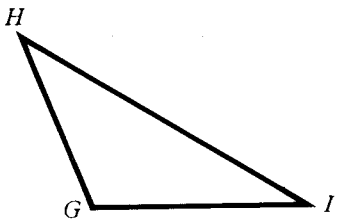


$\angle D$ es un ángulo recto.

$\triangle DEF$ es un *triángulo rectángulo.* El lado $\overline{EF}$ *es la hipotenusa.* $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ son los *catetos.*

Definición 6.3

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto.

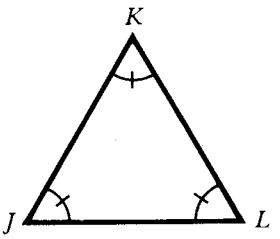


$\angle G$ es un ángulo obtuso.

$\triangle GHI$ es un *triángulo obtusángulo.*

Definición 6.4

Un **triángulo obtusángulo** es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

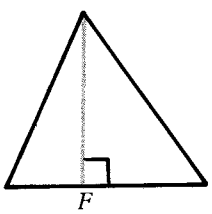


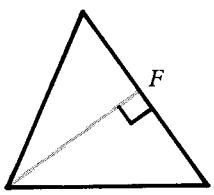
$\triangle JKL$ es un *triángulo equiángulo.*

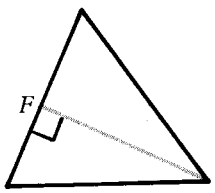
Definición 6.5

Un **triángulo equiángulo** es un triángulo que tiene tres ángulos congruentes.

Para cualquier triángulo hay tres segmentos denominados *alturas.*



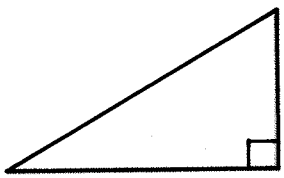


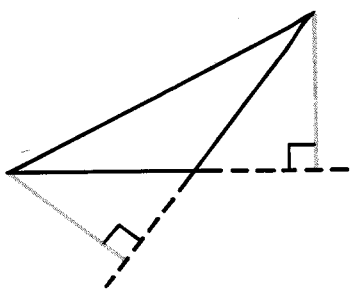


Definición 6.6

Una **altura** de un triángulo es un segmento que va de un vértice a un punto F en el lado opuesto (quizá extendido) y es perpendicular a ese lado opuesto.

Obsérvese que en un triángulo rectángulo dos de las alturas coinciden con los lados del triángulo. En un triángulo obtusángulo, dos alturas tienen catetos en las extensiones de los lados.

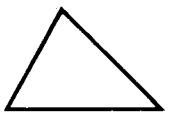
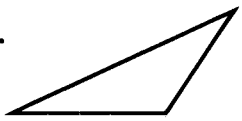




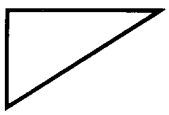
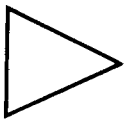
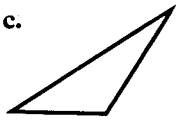
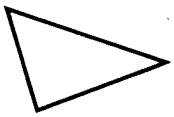
EJERCICIOS

A.

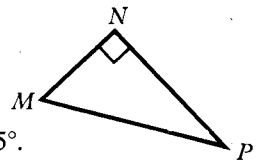
1. Clasifíquense estos triángulos en escaleno, isósceles o equilátero.

a.  **b.** **c.** **d.** 

2. Clasifíquense estos triángulos en acutángulo, obtusángulo o rectángulo.

a.  **b.**  **c.**  **d.** 

3. Denomínense estas partes del triángulo rectángulo MNP.



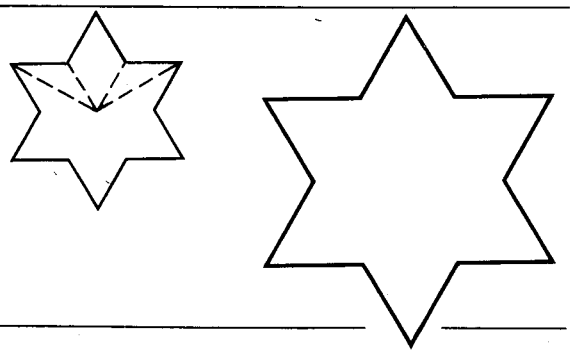
a. Angulo recto. **b.** Catetos.
c. Hipotenusa. **d.** Alturas.

4. Dibújese un triángulo isósceles que tenga un ángulo de 45°.
5. Dibújese un triángulo rectángulo escaleno.
6. Dibújese un triángulo obtusángulo que tenga un ángulo de 30°.
7. Dibújese un triángulo equilátero y trácese una altura.
8. Dibújese un triángulo obtusángulo y trácense todas sus alturas.
9. Dibújese y dense nombres a una tabla como la de la derecha. En cada casilla de la tabla, si es posible, dibújese un triángulo que satisfaga las dos condiciones.

	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

ACTIVIDADES

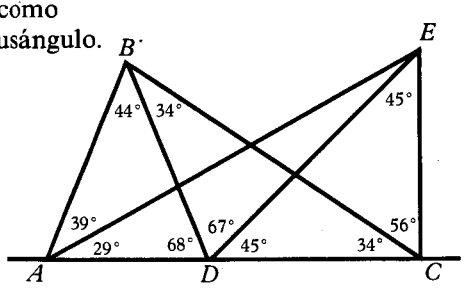
Dibújense tres copias de la estrella más pequeña. Córtese por las líneas de puntos y colóquense las piezas para formar la estrella grande.



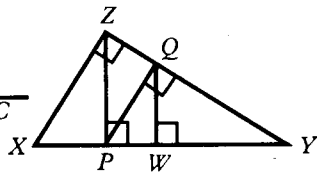
B.

10. Identifíquense los triángulos como acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a. $\triangle ABD$.
b. $\triangle ABC$.
c. $\triangle ADE$.
d. $\triangle BDC$.
e. $\triangle ACE$.
f. $\triangle DCE$.



11. En la figura de la derecha, identifíquense las alturas y sus triángulos respectivos.



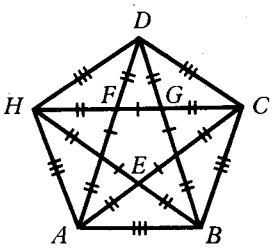
Los ejercicios 12 a 14 se refieren al pentágono $ABCDH$.

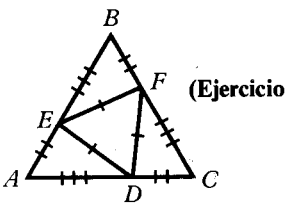
12. Cítense dos triángulos isósceles que tenga $\overline{AB}$ como lado desigual.

13. Cítense dos triángulos isósceles que tenga $\overline{AB}$ como uno de los lados iguales.

14. Cítese un triángulo isósceles que tenga $\overline{FG}$ como uno de los lados.

15. Cítense todos los triángulos equiláteros y escalenos de la figura siguiente.



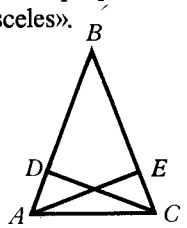


(Ejercicio 15)

C

16. ¿Por qué un triángulo equilátero también es isósceles? Explíquese haciendo referencia a la definición de «triángulo isósceles».

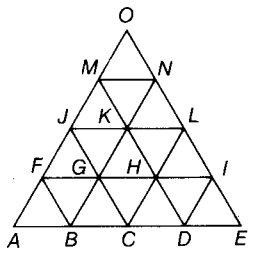
17. **Dado:** Un triángulo isósceles ABC con B como ángulo del vértice.
$\overline{AE}$ es la altura de A a $\overline{BC}$.
$\overline{CD}$ es la altura de C a $\overline{AB}$.
$\overline{AD} \cong \overline{CE}$.
Pruébese: $\angle BAE \cong BCD$.



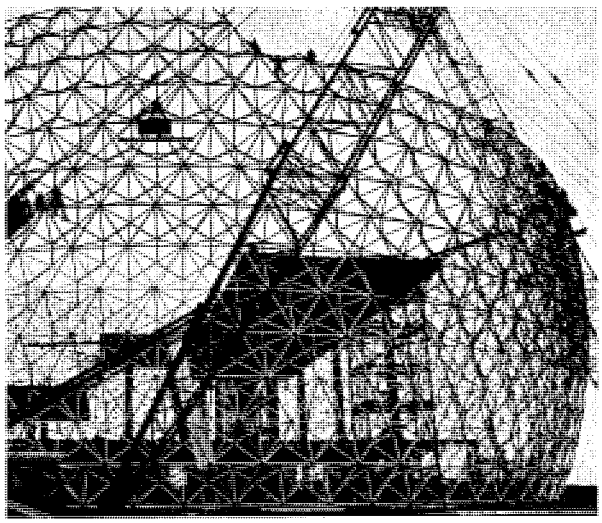
18. Cuatro triángulos equiláteros pueden colocarse para formar un triángulo equilátero más grande. ¿Cómo pueden colocarse cuatro triángulos obtusángulos para formar un triángulo obtusángulo más grande de la misma forma que el original?

SOLUCION DE PROBLEMAS

En esta figura hay 27 triángulos equiláteros. Cítense todos los posibles.



6.2 Triángulos isósceles

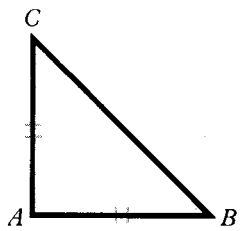


En todo el mundo se han construido miles de domos geodésicos. Uno de los más grandes se construyó en 1958. Se trata de un taller de reparación de automóviles de Baton Rouge, Louisiana. Este domo tiene 117 metros de diámetro y 35 de altura. Para la exposición de Montreal de 1967, también se construyó un domo, la fotografía muestra su proceso de construcción.

La estructura de un domo se construye uniendo muchos triángulos. De estos triángulos, muchos tienen lados de igual longitud, lo cual significa que son isósceles o equiláteros (Véase «La geometría en nuestro mundo», pág. 126).

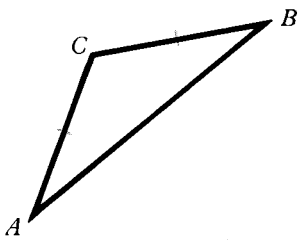
En esta sección se estudiarán algunas propiedades importantes de estos dos tipos de triángulos.

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$



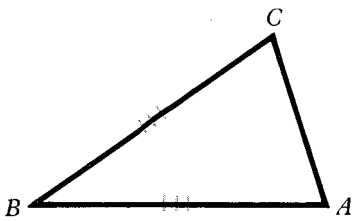
Obsérvese que $m\angle B = m\angle C$.

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$



Obsérvese que $m\angle A = m\angle B$.

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$



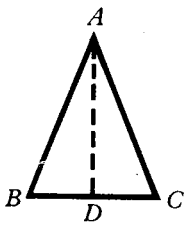
Obsérvese que $m\angle A = m\angle C$.

Teorema 6.1 Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.

PRUEBA

Dado: Sea $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Pruébese: $\angle B \cong \angle C$.

Plan: Sea D el punto medio de $\overline{BC}$. Trácese $\overline{AD}$ y pruébese que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

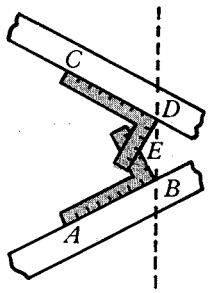


Afirmaciones	Razones
1. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	1. Dado.
2. D es el punto medio de $\overline{BC}$.	2. Cada segmento de recta tiene un, y sólo un, punto medio.
3. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.	3. Un segmento desde el vértice de un ángulo al punto medio del lado opuesto forma un par de triángulos congruentes (Teorema 4.2).
4. $\angle B \cong \angle C$.	4. PCTCC.

APLICACION

Se van a cortar dos tablitas de madera convergentes de manera que puedan clavarse a una tabla a lo largo de una línea.

Se colocan dos escuadras de carpintero de forma que $BE = DE$. Los puntos B y D determinan la línea de forma que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. ¿Por qué? Las escuadras de carpintero se colocan de manera que $\triangle BDE$ es un triángulo isósceles. Por tanto, $\angle EBD \cong \angle EDB$, con lo cual puede concluirse que $m\angle ABD = 90 + m\angle EBD = m\angle EDB + 90 = m\angle CDB$.



A continuación se presentan otros dos teoremas. El teorema 6.2 es un caso especial del teorema 6.1.

Teorema 6.2 Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.

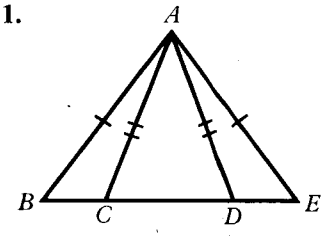
Teorema 6.3 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

EJERCICIOS

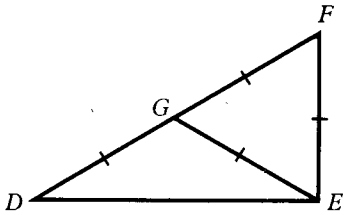
A.

En los ejercicios 1 a 3, los segmentos que tienen marcas idénticas se consideran congruentes. Cítense todos los pares de ángulos que, según el teorema 6.1, son congruentes.

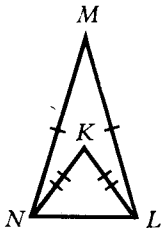
1.



2.

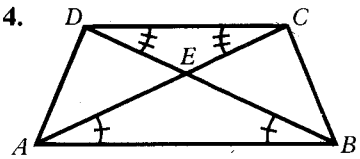


3.

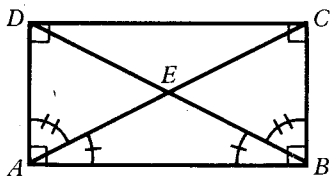


En los ejercicios 4 a 6, los ángulos que tienen marcas idénticas se consideran congruentes. Cítense los triángulos isósceles.

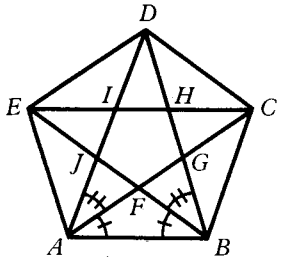
4.



5.



6.



7. $m\angle ABC =$?.

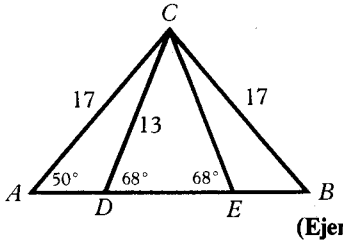
8. $CE =$?.

9. $m\angle ACD =$?.

10. $BC =$?.

11. $AB =$?.

12. $m\angle ADB =$?.



(Ejercicios 7, 8)

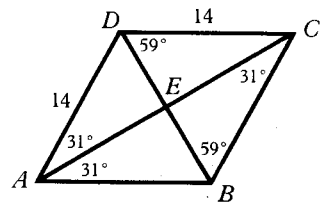
B.

13. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Si $AB = 4x$ y $BC = 6x - 15$, encuéntrense AB y BC.

14. En $\triangle DEF$, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Si $DE = 4x + 15$, $EF = 2x + 45$ y $DF = 3x + 15$, encuéntrense las longitudes de los lados del triángulo.

15. En $\triangle XYZ$, $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$. Si $m\angle X = 4x + 60$, $m\angle Y = 2x + 30$ y $m\angle Z = 14x + 30$, encuéntrense $m\angle X$, $m\angle Y$ y $m\angle Z$.

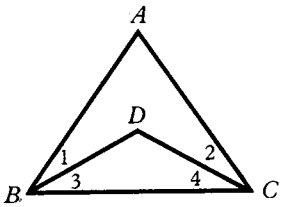
16. En $\triangle ABC$, $\angle A \cong \angle C$. Si $AB = 4x + 25$, $BC = 2x + 45$ y $AC = 3x - 15$, encuéntrense las longitudes de los tres lados.



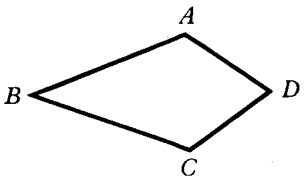
(Ejercicios 9-12)

Escríbase una demostración a dos columnas para cada uno de los ejercicios 17 a 24.

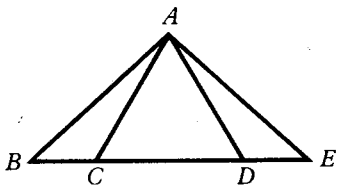
17. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{DB} \cong \overline{DC}$.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.



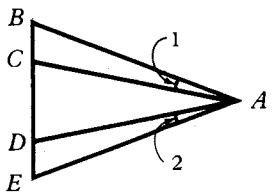
18. Dado: $ABCD$ es un cuadrilátero con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DA} \cong \overline{DC}$.
Pruébese: $\angle BAD \cong \angle BCD$.
(*Sugerencia:* Añádase una línea auxiliar.)



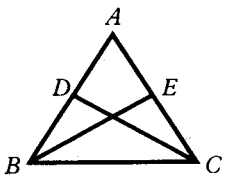
19. Dado: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \cong \overline{ED}$.
Pruébese: $\triangle ABE$ es isósceles.



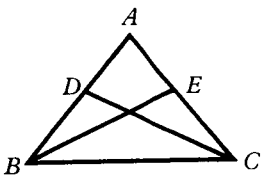
20. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABD \cong \triangle AEC$.



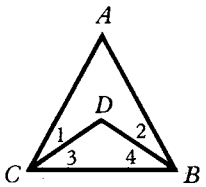
21. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{BE}$ biseca a $\angle B$
$\overline{CD}$ biseca a $\angle C$.
Pruébese: $\overline{CD} \cong \overline{BE}$.



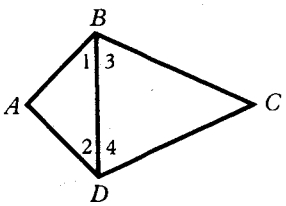
22. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{BE}$ biseca a $\angle B$
$\overline{CD}$ biseca a $\angle C$.
Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$.



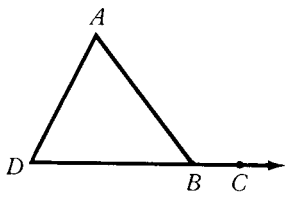
23. Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\triangle BCD$ es isósceles.



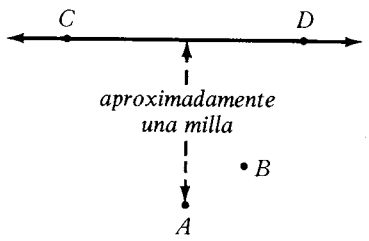
24. Dado: $\angle ABC \cong \angle ADC$
$\angle 1 \cong \angle 2$.
Pruébese: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.



25. **Dado:** $\angle ABC$ y $\angle D$ son suplementarios.
Pruébese: $\triangle ABD$ es isósceles.

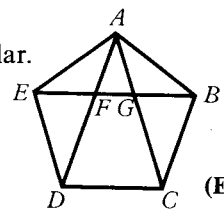


26. Se ha pedido a un grupo de agrimensores que localice un punto sobre una delimitación de propiedad CD que equidiste de dos puntos previamente localizados, A y B. Debido a la magnitud de las distancias, no se puede realizar una medición directa con una cinta métrica. Los puntos A y B están cerca uno del otro. En cada uno de ellos se colocó un teodolito. ¿Cómo puede el grupo de agrimensores localizar el punto deseado?



C.

En los ejercicios 27 y 28, $ABCDE$ es un pentágono regular.



(Ejercicios 27, 28)

27. Pruébese que $\triangle ABG$ es un triángulo isósceles.

28. Pruébese que $\triangle AFG$ es un triángulo isósceles.

29. Pruébese el teorema 6.2.

30. Pruébese el teorema 6.3.

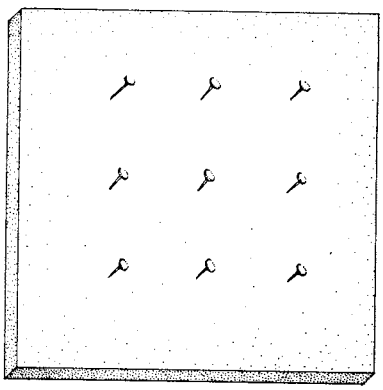
31. Pruébese que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la bisectriz perpendicular del lado opuesto.

32. Pruébese que si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle GHI$. (Propiedad transitiva de los triángulos congruentes.)

ACTIVIDADES

En una tabla con tres clavos en un lado, o en un papel de puntos de 3 × 3, muéstrense:

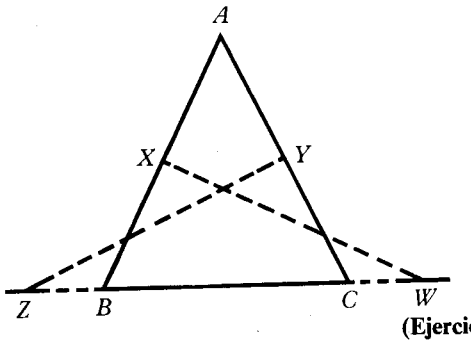
1. Segmentos de cinco longitudes diferentes.
2. Angulos de diez tamaños diferentes.
3. Triángulos de siete tamaños y formas diferentes.



33. Pruébese que las bisectrices de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

34. Pruébese que los segmentos de recta que tocan el punto medio de la base de un triángulo isósceles y los puntos medios de los catetos son congruentes.

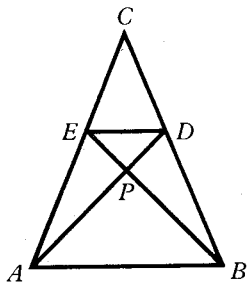
35. En un triángulo ABC, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. X es el punto medio de $\overline{AB}$ e Y es el punto medio de $\overline{AC}$. $\overleftrightarrow{XW}$ es una perpendicular a $\overline{AB}$; $\overleftrightarrow{YZ}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$; W y Z son puntos sobre $\overleftrightarrow{BC}$. Demuéstrese que $\overline{XW} \cong \overline{YZ}$.



(Ejercicio 35)

36. Pruébese que un triángulo equiángulo es equilátero.

37. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y que $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se intersecan en P de manera que $\angle PAB \cong \angle PBA$. Demuéstrese que $\triangle PDE$ es isósceles.

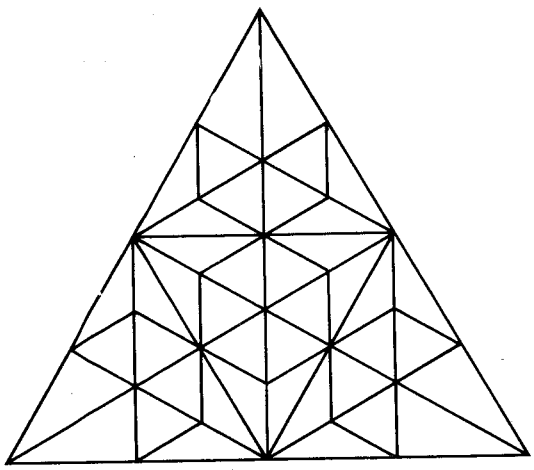


(Ejercicio 37)

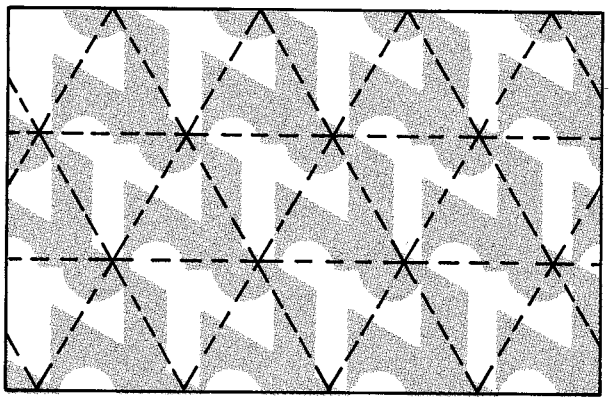
SOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cuántos triángulos equiláteros hay en esta figura?

¿Cuántas cometas hay en esta figura? (Una cometa es un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados adyacentes congruentes.)



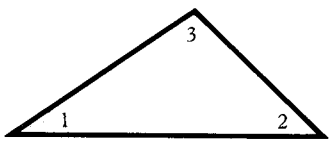
6.3 Medidas de los ángulos de un triángulo

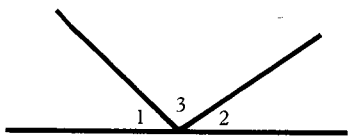


Los patrones y diseños geométricos son interesantes e importantes para un decorador de interiores. (Véase «La geometría en nuestro mundo», pág. 40.) Si se analizan con cuidado se encuentra que muchos de estos diseños están construidos en torno a formas triangulares que se repiten.

El teorema de esta sección describe una propiedad de los triángulos que les da la cualidad de ser patrones de referencia.

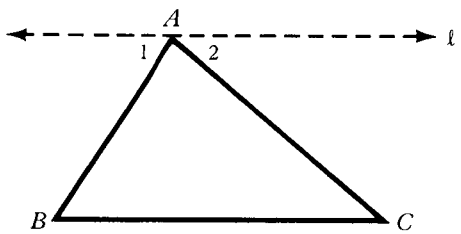
En el capítulo 2 se observó que las esquinas de un triángulo pueden cortarse y luego unirse, la suma de estos ángulos resulta ser 180°.





Ahora se enuncia esto como un teorema.

Teorema 6.4 La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.



PRUEBA

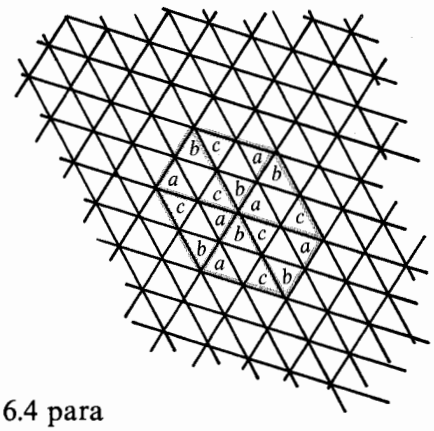
Dado: Un triángulo ABC.
Pruébese: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

Plan: Trácese una recta ℓ a través de A y paralela a $\overline{BC}$, y úsense teoremas que relacionen rectas paralelas con una transversal. (La recta ℓ es una recta auxiliar.)

Afirmaciones	Razones
1. Sea ℓ una recta a través de A y paralela a $\overline{BC}$.	**1.** Construcción.
2. $\angle 1 \cong \angle B, \angle 2 \cong \angle C$.	**2.** Si dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos interiores son congruentes.
3. $m\angle 1 + m\angle A + m\angle 2 = 180$.	**3.** Definición de «entre» para rayos y postulado del par lineal.
4. $m\angle B + m\angle A + m\angle C = 180$.	**4.** Sustitución.

APLICACION

Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° (en la figura, $a + b + c = 180$), se pueden disponer copias congruentes de un triángulo alrededor de un punto, como se muestra en la figura, y extenderlas para cubrir un plano. Estos patrones triangulares son la base para otros más intrincados, como se muestra al principio de esta sección.

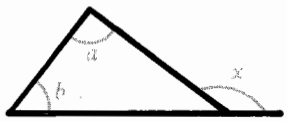


El siguiente teorema puede probarse aplicando el teorema 6.4 para triángulos equiláteros.

Teorema 6.5 Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.

El teorema que se enuncia a continuación es útil para resolver ciertos problemas geométricos. Se enuncia e ilustra aquí, y se probará como ejercicio.

$x = a + b$, donde x es la medida del ángulo externo y a y b son las medidas de los ángulos interiores no contiguos.

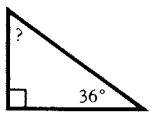


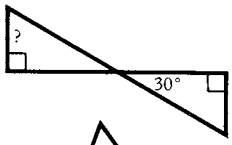
Teorema 6.6 La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no contiguos.

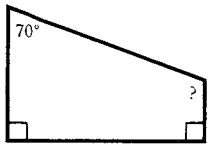
EJERCICIOS

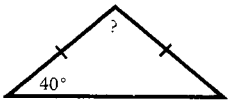
A.

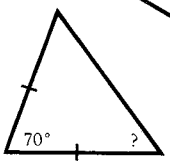
Encuéntrense las medidas de los ángulos indicados en los ejercicios 1 a 9. Las marcas indican segmentos congruentes.

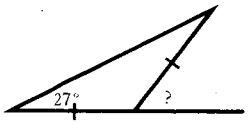
1. 

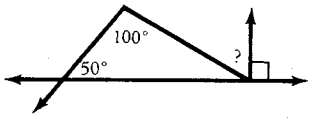
2. 

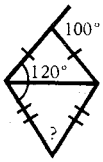
3. 

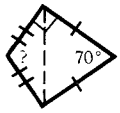
4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

B.

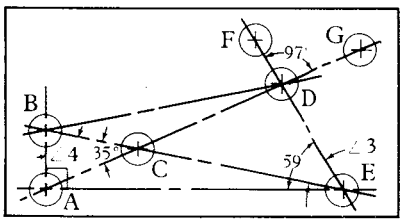
10. La medida de los ángulos de la base de un triángulo isósceles se representa por x, y el ángulo del vértice, por $2x + 30$. Encuéntrese la medida de cada ángulo.

11. Las medidas de los ángulos de un triángulo se representan por $2x + 15$, $x + 20$ y $3x + 25$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.

12. Pruébese que los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.

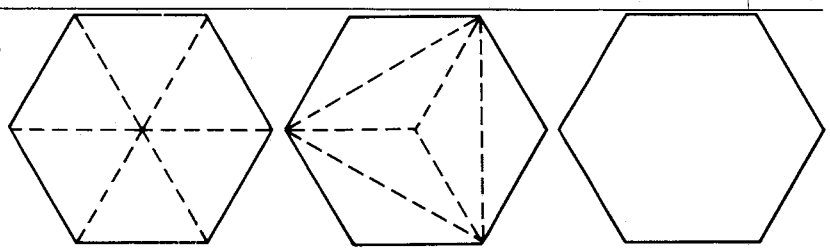
13. Pruébese que los ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles miden 45° cada uno.

14. Un mecánico debe construir una placa de acero con orificios como los que muestra la figura. El mecánico debe calcular primero las medidas de $\angle 3$ y $\angle 4$. Encuéntrense $m\angle 3$ y $m\angle 4$.



ACTIVIDADES

Trácense y recórtense tres hexágonos pequeños, y córtese por las líneas punteadas. Con las 13 piezas resultantes, fórmese un hexágono regular grande.



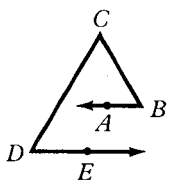
15. Pruébese que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos.

16. En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$. Pruébese que $\angle C \cong \angle F$.

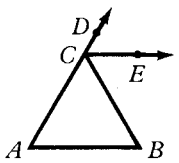
17. Pruébese que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

C.

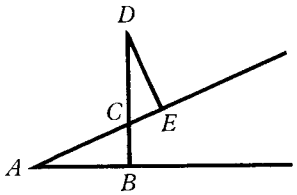
18. **Dado:** $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.
Pruébese: $m\angle B + m\angle C + m\angle D = 180$.



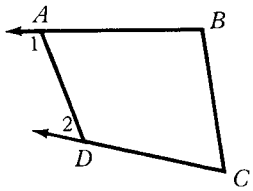
19. **Dado:** $\overrightarrow{CE}$ biseca a $\angle BCD$
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



20. **Dado:** $\overline{DE} \perp \overline{AE}$
$\overline{DB} \perp \overline{AB}$.
Pruébese: $m\angle CAB = m\angle CDE$.



21. **Dado:** $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AD}$.
Pruébese: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle C + m\angle B$.



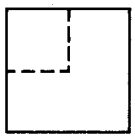
22. Pruébese que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

23. Pruébese el teorema 6.6.

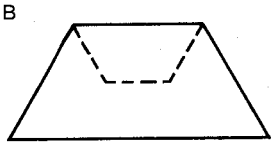
SOLUCION DE PROBLEMAS

Dibújense estas figuras y trácense las líneas de puntos para dividir las figuras en cuatro partes idénticas, todas de la misma forma que la original.

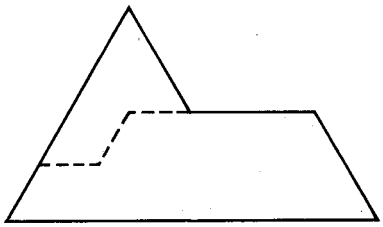
A



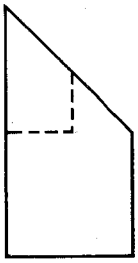
B



C

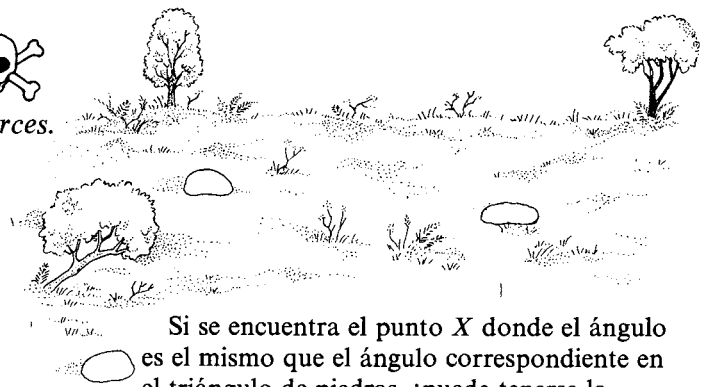


D



6.4 El teorema de la congruencia LAA

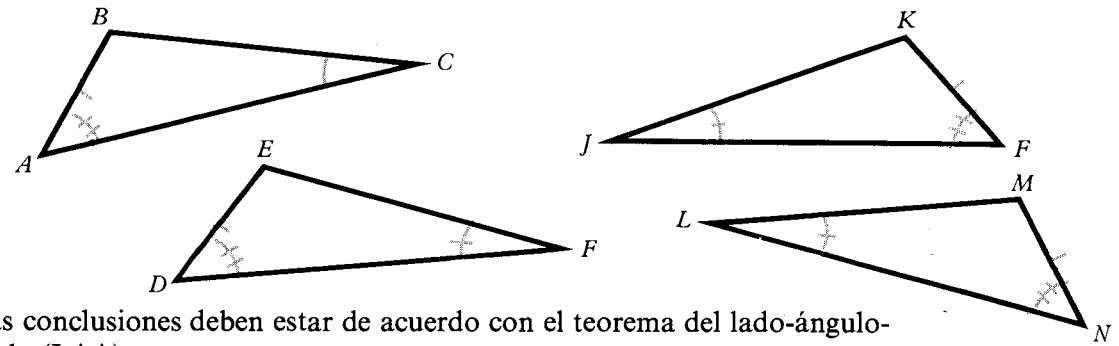
En una isla de caníbales
hay diversos tipos de árboles:
Un roble, un olmo chino, y varios arces.
Si trazáis una senda
que vaya del olmo al roble
encontraréis el tesoro
del cual queréis que os hable.
Sólo encontrad el punto
y podréis estar seguros.
Congruente el triángulo será
con uno de piedras que ahí está.



Si se encuentra el punto X donde el ángulo es el mismo que el ángulo correspondiente en el triángulo de piedras, ¿puede tenerse la seguridad de que los triángulos son congruentes?

Un pirata, que era un estudiante de geometría frustrado, colocó tres enormes piedras, y escribió el poema anterior.

En los triángulos siguientes, dos ángulos y un lado opuesto a un ángulo son congruentes. Con papel vegetal, lléguese a la convinción de que los triángulos son congruentes.



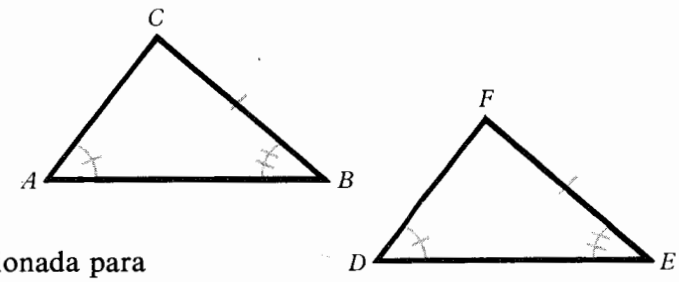
Estas conclusiones deben estar de acuerdo con el teorema del lado-ángulo-ángulo (LAA).

Teorema 6.7 **Teorema LAA.** Si en un triángulo, dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con
$\angle A \cong \angle D$
$\angle B \cong \angle E$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

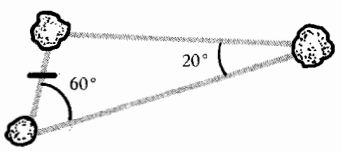


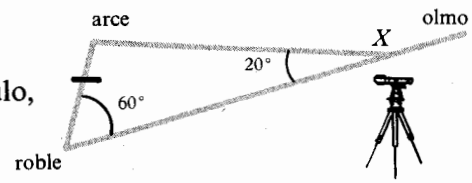
Plan: Se utilizará la información proporcionada para mostrar que $\angle C \cong \angle F$, y después se utilizará el postulado ALA.

Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.	1. Dado.
2. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$; $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$.	2. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180°.
3. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$.	3. Sustitución.
4. $m\angle C = m\angle F$.	4. Propiedad de resta de iguales.
5. $\angle C \cong \angle F$.	5. Definición de ángulos congruentes.
6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.	6. ¿Por qué?
7. $\triangle ABC = \triangle DEF$.	7. ¿Por qué?

APLICACION

El teorema 6.7 proporciona una respuesta al problema del tesoro del pirata. Dado que dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos del «triángulo de árboles» son congruentes con dos ángulos y el lado opuesto a uno de los ángulos del «triángulo de piedras», los dos triángulos son congruentes y X señala el punto en que está el tesoro.





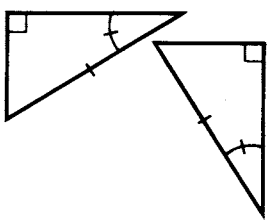
Cuando se aplica el teorema 6.7 a un triángulo rectángulo, resulta el teorema de la hipotenusa y el ángulo.

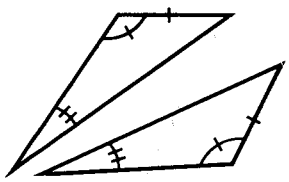
Teorema 6.8 **Teorema de la hipotenusa y el ángulo.** Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

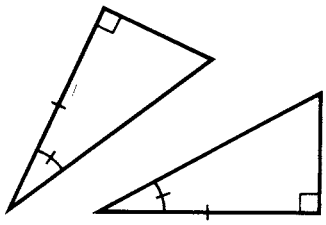
EJERCICIOS

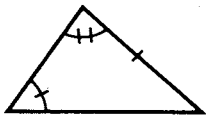
A.

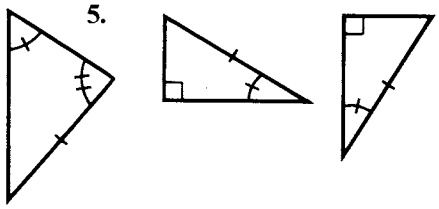
En los ejercicios 1 a 6, indíquese si los pares de triángulos dados son congruentes por LAA, LAL, ALA, hipotenusa y cateto, o por ninguno de estos teoremas.

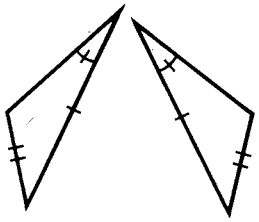
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

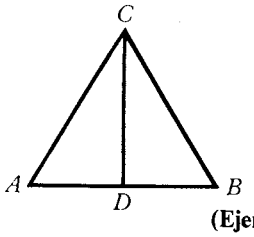
6. 

B.

Con la información proporcionada en los ejercicios 7 y 8, pruébese que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

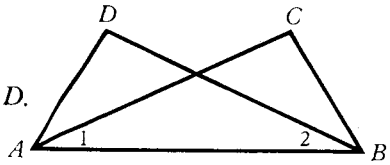
7. Dado: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
$\angle A \cong \angle B$.

8. Dado: $\overline{CD}$ biseca a $\angle C$
$\angle A \cong \angle B$.



(Ejercicios 7, 8)

9. Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle C \cong \angle D$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

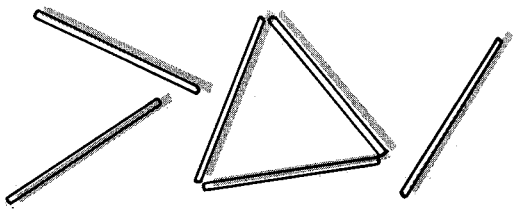


ACTIVIDADES

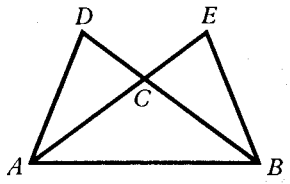
Córtense palillos de las siguientes longitudes:

- dos de 10 cm
- dos de 17.3 cm
- uno de 20 cm
- uno de 30 cm

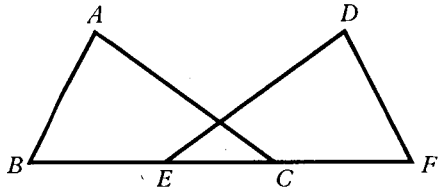
¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse con estos seis palillos?



10. Dado: $\triangle ABC$ es isósceles con ángulo de vértice C
$\angle D \cong \angle E$.
Pruébese: $\triangle ABE \cong \triangle BAD$.



11. Dado: $\overline{BE} \cong \overline{CF}$
$\angle A \cong \angle D$
$\angle ACB \cong \angle DEF$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

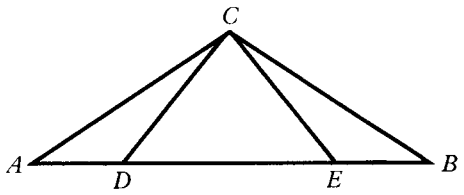


12. Formúlese una prueba a dos columnas para el teorema 6.7.

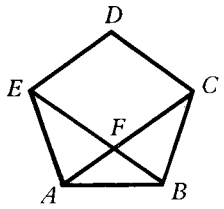
13. Formúlese una prueba a dos columnas para el teorema 6.8.

C.

14. Dado: $\angle A \cong \angle B$
$\angle ADC \cong \angle BEC$.
Pruébese: $\triangle AEC \cong \triangle BDC$.



15. Dado: $ABCDE$ es un pentágono regular.
Pruébese: $\triangle AFE \cong \triangle BFC$.

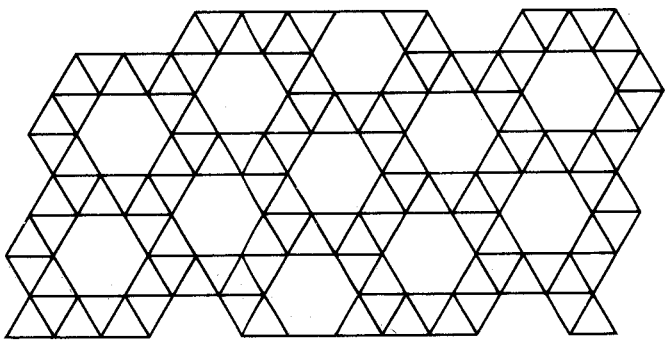


16. Pruébese que los segmentos desde un punto sobre la bisectriz de un ángulo perpendicular a los lados del ángulo son congruentes.

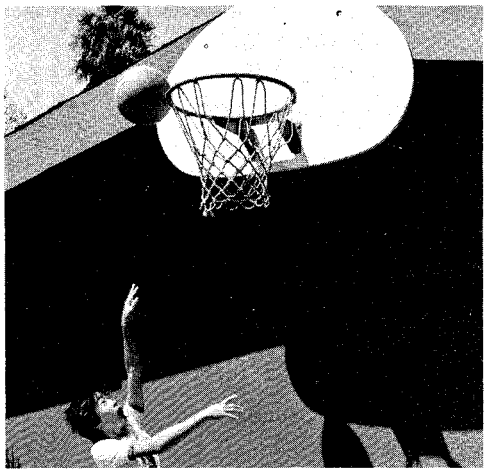
17. Pruébese que si se trazan perpendiculares desde cualquier punto de la base de un triángulo isósceles a los lados congruentes, los ángulos que se forman en la base del triángulo son congruentes.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Si los triángulos y hexágonos de este diseño se dibujaran de manera que dos polígonos cualesquiera con un vértice común tuvieran diferentes colores, ¿cuál es el número mínimo de colores necesario para completar el coloreado del diseño?

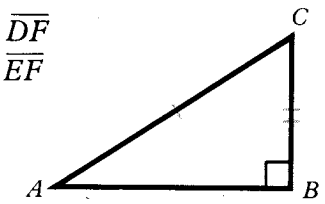


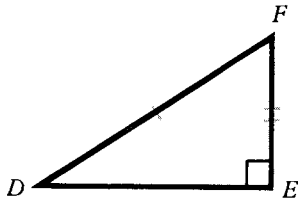
6.5 El teorema de la congruencia de la hipotenusa y el cateto



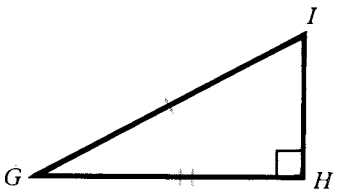
Supóngase que se desea instalar una canasta de baloncesto en una pared al aire libre. ¿Cómo se puede tener la seguridad de que el tablero quede paralelo a la pared? Los soportes que sujetan el tablero a la pared son un elemento importante para la respuesta. Considérense los siguientes pares de triángulos.

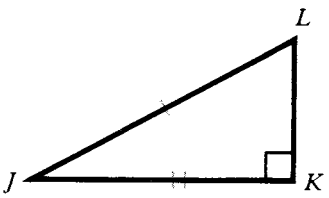
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$





$\overline{GI} \cong \overline{JL}$
$\overline{GH} \cong \overline{JK}$





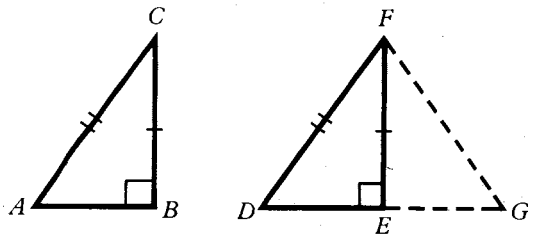
Utilícese papel vegetal para llegar a la conclusión de que:
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

$\triangle GHI \cong \triangle JKL$

Teorema 6.9 **Teorema de la hipotenusa y el cateto.** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

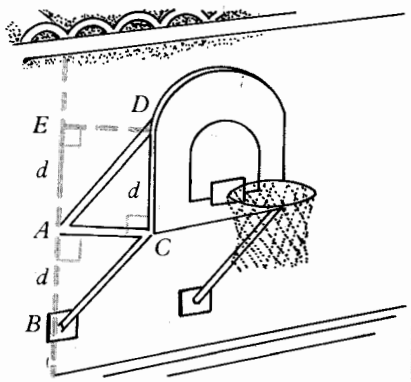
PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$
con $\angle B$ y $\angle E$ como ángulos rectos
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Afirmaciones	Razones
1. Dibújese $\overrightarrow{DE}$.	1. Construcción.
2. Elíjase G sobre $\overrightarrow{DE}$ de manera que $\overline{EG} \cong \overline{AB}$.	2. Elección de G.
3. $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son ángulos rectos.	3. Dado.
4. $\angle GEF$ es un ángulo recto.	4. Si un ángulo de un par lineal es un ángulo recto, entonces el otro también es un ángulo recto.
5. $m\angle ABC = m\angle DEF = m\angle GEF = 90$.	5. Definición de ángulo recto.
6. $\angle ABC \cong \angle DEF \cong \angle GEF$.	6. Definición de ángulos congruentes.
7. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.	7. Dado.
8. $\triangle ABC \cong \triangle GEF$.	8. ¿Por qué?
9. $\overline{AC} \cong \overline{GF}$.	9. PCTCC.
10. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.	10. Dado.
11. $\overline{GF} \cong \overline{DF}$.	11. Propiedad transitiva de los segmentos congruentes.
12. $\angle FDE \cong \angle FGE$.	12. Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.
13. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$.	13. ¿Por qué?
14. $\triangle DEF \cong \triangle GEF$.	14. Teorema LAA.
15. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.	15. Propiedad transitiva de los triángulos congruentes (Véase pág. 206, ejercicio 32).

APLICACION



Considérese la pregunta planteada al principio de esta sección. El tablero de la canasta debe colocarse de manera que $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ y $AB = CD$. Para que el tablero quede paralelo a la pared, $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$ deben tener la misma longitud. Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ por el teorema 6.9 (de la hipotenusa y el cateto) y $\overline{AC} \cong \overline{ED}$. Obsérvese que para obtener triángulos congruentes, los soportes $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ han de tener la misma longitud.

El teorema 6.9 se emplea en la prueba del también importante teorema siguiente.

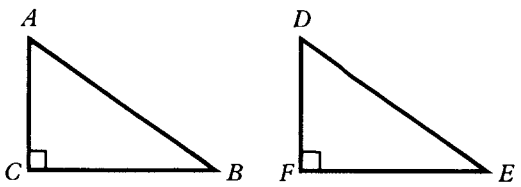
Teorema 6.10 Si un punto P equidista de un par de puntos A y B, entonces P está sobre la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$. A la inversa, un punto sobre la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$ equidista de A y B.

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 4, decídase si la información dada determina la congruencia por LAA, ALA, hipotenusa y ángulo, hipotenusa y cateto, o ninguno de estos teoremas.

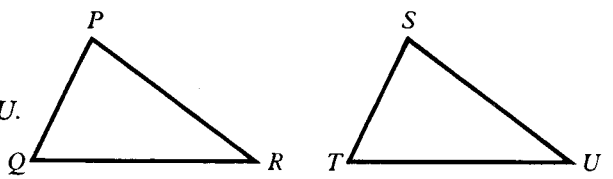
1. **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
2. **Dado:** $\angle A \cong \angle D$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.
3. **Dado:** $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.
4. **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$.



(Ejercicios 1-4)

En los ejercicios 5 a 9, determínese si la información dada asegura que los triángulos son congruentes. Si no lo son, proporciónese un contraejemplo.

5. **Dado:** $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\angle P \cong \angle S$, $\angle Q \cong \angle T$.
6. **Dado:** $\overline{PQ} \cong \overline{TU}$, $\overline{QR} \cong \overline{SU}$, $\angle Q \cong \angle U$.
7. **Dado:** $\angle P \cong \angle S$, $\angle Q \cong \angle T$, $\angle R \cong \angle U$.
8. **Dado:** $\angle Q \cong \angle T$, $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{PR} \cong \overline{SU}$.
9. **Dado:** $\overline{PQ} \cong \overline{SU}$, $\overline{QR} \cong \overline{ST}$, $\overline{PR} \cong \overline{TU}$.

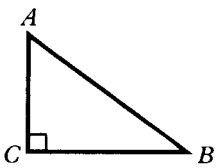


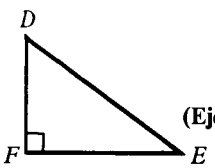
(Ejercicios 5-9)

B.

Para los ejercicios 10 y 11, supóngase que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

10. Si $BC = 2x - 3$ y $EF = x + 5$, encuéntrense las longitudes de BC y EF.
11. Si $m\angle A = 4x - 5$ y $m\angle D = 2x + 25$, encuéntrense $m\angle B$ y $m\angle E$.

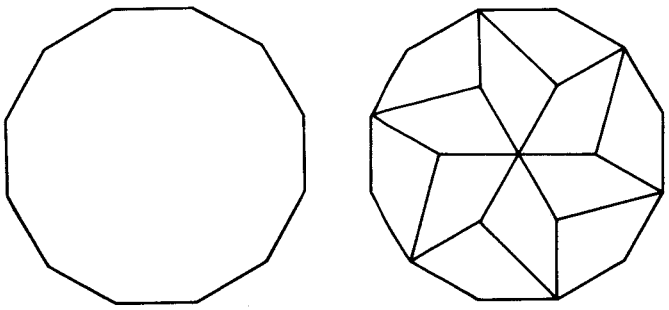




(Ejercicios 10, 11)

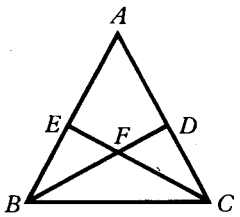
ACTIVIDADES

Trácense y recórtense las 13 piezas de estos dos dodecágonos regulares y colóquense para formar un dodecágono regular grande.



12. Dado: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$
$\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son alturas.
Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.

13. Dado: $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son alturas
$\angle ABC \cong \angle ACB$.
Pruébese: $\triangle BFC$ es isósceles.



(Ejercicios 12, 13)

C.

En los ejercicios 14 a 16 $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son alturas.

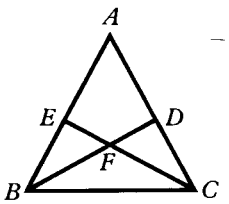
14. Pruébese que $\triangle EFB \cong \triangle DFC$.

15. Pruébese que $\triangle AED$ es isósceles.

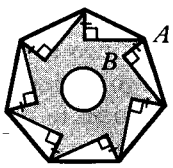
16. Pruébese que $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

17. Pruébese el teorema 6.10.

18. Una sierra circular de siete dientes se hace cortando siete triángulos rectángulos de un polígono regular de siete lados. Si $\overline{AB}$ se corta con la misma longitud para cada diente, ¿por qué todos los puntos salientes de la sierra tienen un ángulo del mismo tamaño?

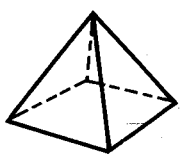


(Ejercicios 14-16)



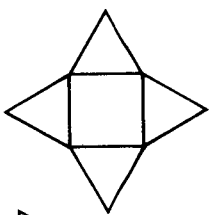
SOLUCION DE PROBLEMAS

A la derecha se ilustra una pirámide cuadrada.

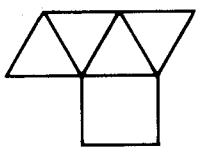


1. ¿Cuáles de estos patrones pueden doblarse para construir la pirámide?

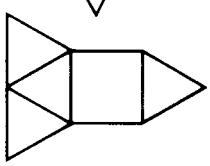
A



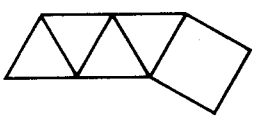
B



C



D



2. Constrúyanse en mayor tamaño patrones como éstos. Compruébese la pregunta anterior construyendo una figura con cada uno de ellos.

Capítulo 6 Conceptos importantes

Términos

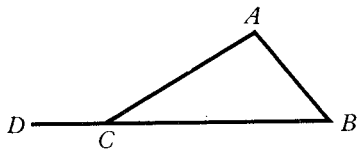
Triángulo escaleno (pág. 414)
Triángulo acutángulo (pág. 414)
Triángulo rectángulo (pág. 415)
Hipotenusa (pág. 415)
Triángulo obtusángulo (pág. 415)
Triángulo equiángulo (pág. 415)
Altura (pág. 415)

Teoremas

6.1 Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes.
6.2 Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
6.3 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
6.4 La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.
6.5 Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.
6.6 La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no contiguos.
6.7 **Teorema LAA.** Si dos ángulos de un triángulo y el lado opuesto a uno de ellos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
6.8 **Teorema de la hipotenusa y el ángulo.** Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
6.9 **Teorema de la hipotenusa y el cateto.** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.
6.10 Si un punto P equidista de un par de puntos A y B, entonces P está sobre la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$. A la inversa, un punto sobre la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$ equidista de A y de B.

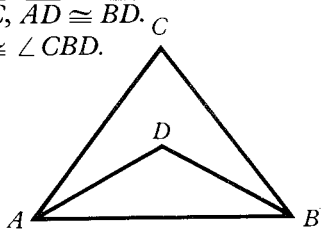
Capítulo 6 Resumen

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   - **a.** Un triángulo escaleno no puede ser un triángulo acutángulo.
   - **b.** Un triángulo isósceles también puede ser un triángulo rectángulo.
   - **c.** Un triángulo rectángulo tiene sólo una altura.
   - **d.** Si dos ángulos de un triángulo miden 60° y 90°, entonces el triángulo es isósceles.
2. Si $m\angle ACD = 120$ y $m\angle ABC = 50$, encuéntrese $m\angle BAC$.

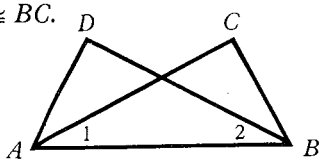


3. Las medidas de los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles se representan por $x + 20$ y $3x - 40$. Encuéntrese la medida del ángulo del vértice.

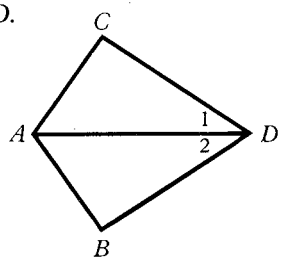
4. **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
   Pruébese: $\angle CAD \cong \angle CBD$.



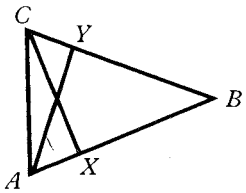
5. **Dado:** $\angle C \cong \angle D$
   $\angle 1 \cong \angle 2$.
   Pruébese: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



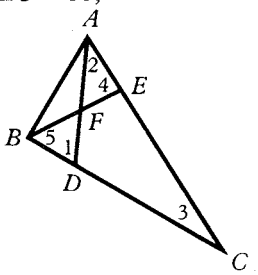
6. **Dado:** $m\angle B = m\angle C = 90$
   $\angle 1 \cong \angle 2$.
   Pruébese: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.



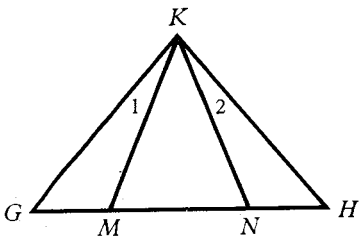
7. **Dado:** $\overline{CX}$ es una altura de $\overline{AB}$
   $\overline{AY}$ es una altura de $\overline{CB}$
   $\overline{CX} \cong \overline{AY}$.
   Pruébese: $\triangle ABC$ es isósceles.



8. **a.** $m\angle DFE = m\angle 5 + m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$. ¿Por qué?
   - **b.** Si $m\angle 4 = 80$ y $m\angle 3 = 35$, encuéntrese $m\angle 5$.

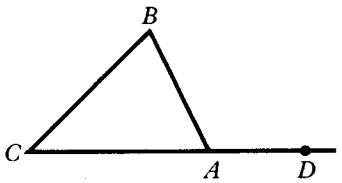


9. **Dado:** $\triangle KMN$ es isósceles.
   $\angle 1 \cong \angle 2$.
   Pruébese: $\triangle KHG$ es isósceles.

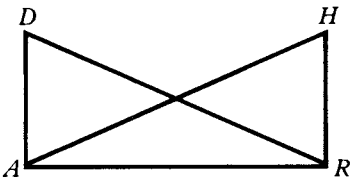


Capítulo 6 Examen

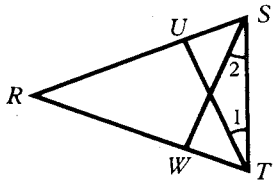
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a. Un triángulo equilátero es equiángulo.
   b. Un triángulo obtusángulo puede tener un ángulo recto.
   c. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
   d. Si dos ángulos de un triángulo miden 100° y 40°, entonces el triángulo es isósceles.



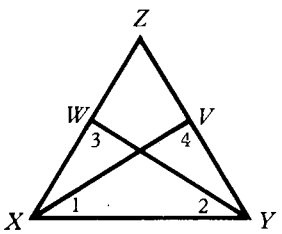
2. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $m\angle BAD = 116$, encuéntrese $\angle B$.
3. Las medidas de los ángulos de un triángulo se representan por $4x$, $5x - 5$ y $x + 35$. Encuéntrense las medidas de cada uno.
4. **Dado:** $\overline{DA} \perp \overline{AR}$, $\overline{HR} \perp \overline{AR}$
   $\overline{DR} \cong \overline{HA}$.
   Pruébese: $\overline{DA} \cong \overline{HR}$.



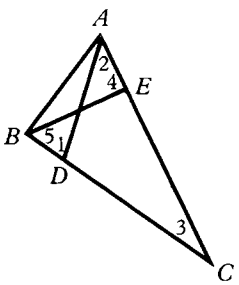
5. **Dado:** $\overline{TU}$ es la altura de $\overline{RS}$
   $\overline{SW}$ es la altura de $\overline{RT}$
   $\angle 1 \cong \angle 2$.
   Pruébese: $\triangle RST$ es isósceles.



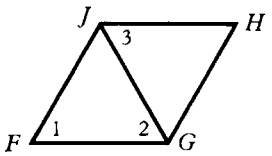
6. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$
   $\angle 3 \cong \angle 4$.
   Pruébese: $\overline{XV} \cong \overline{YW}$.



7. Pruébese que la altura a la base de un triángulo isósceles también es la bisectriz del ángulo del vértice.
8. **a.** Si $m\angle 2 = 20$ y $m\angle 3 = 35$, encuéntrese $m\angle 1$.
   b. Si $m\angle BEC = 100$ y $m\angle BAE = 65$, encuéntrese $m\angle ABE$.



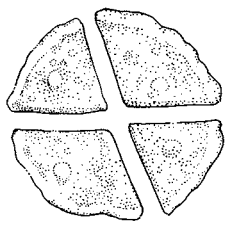
9. **Dado:** $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$
   $\angle 1 \cong \angle 3$
   $\overline{JH} \cong \overline{JF}$.
   Pruébese: $\triangle JGH$ es isósceles.



Técnicas para la solución de problemas

Hacer una tabla-II

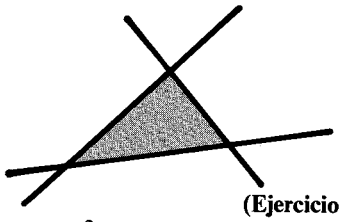
En una sección anterior sobre técnicas de solución de problemas, se sugirió el uso de una tabla para ayudar a la resolución de problemas. Aquí se presentan más problemas para los cuales puede ser útil la elaboración de tablas.



2 cortes, 4 piezas
8 cortes, ¿cuántas piezas?

PROBLEMAS

Para cada problema, hágase una tabla, obsérvese un patrón y resuélvase el problema.



(Ejercicio 2)

3 rectas
1 región acotada

1. ¿Cuál es la cantidad máxima de pedazos de *pizza* que se pueden conseguir con sólo 8 cortes? (*indicación*: Elabórese una tabla. Una columna deberá tener el número de cortes, y la otra, la cantidad máxima de pedazos de *pizza*.)
2. Una región de un plano acotada en todos sus lados por una línea, es una *región acotada*. ¿Cuántas regiones acotadas pueden formarse trazando 9 líneas rectas?
3. Un número triangular (T) es aquel que puede representarse geométricamente como se muestra en la tabla, donde se ilustran T_1, T_2, T_3 y T_4. ¿Pueden encontrarse T_5 y T_6? ¿Puede predecirse cuál es el décimo número triangular (T_{10})?

	configuración	número
T_1	•	1
T_2	• • •	3
T_3	• • • • • •	6
T_4	• • • • • • • • • •	10
T_5	?	?
T_6	?	?

4. Un número pentagonal (P) es un número que puede representarse geométricamente como se muestra en la tabla. ¿Pueden encontrarse P_5 y P_6? ¿Puede predecirse cuál es el décimo número pentagonal (P_{10})?

	configuración	número
P_1	•	1
P_2		5
P_3		12
P_4		22
P_5	?	?
P_6	?	?

5. Un número heptagonal (H) puede representarse geométricamente dibujando heptágonos (siete lados), de manera similar a los problemas 3 y 4. Encuéntrense H_3 y H_4. ¿Puede predecirse cuál es el décimo número heptagonal (H_{10})?

TEMA 11

Más sobre triángulos

CAPÍTULO 7

7.1 El teorema de Pitágoras 442

7.2 Triángulos especiales 448

7.3 Teoremas de la concurrencia en triángulos 452

7.4 Desigualdad del triángulo 460

7.5 Desigualdades en un triángulo 464

Conceptos importantes 468

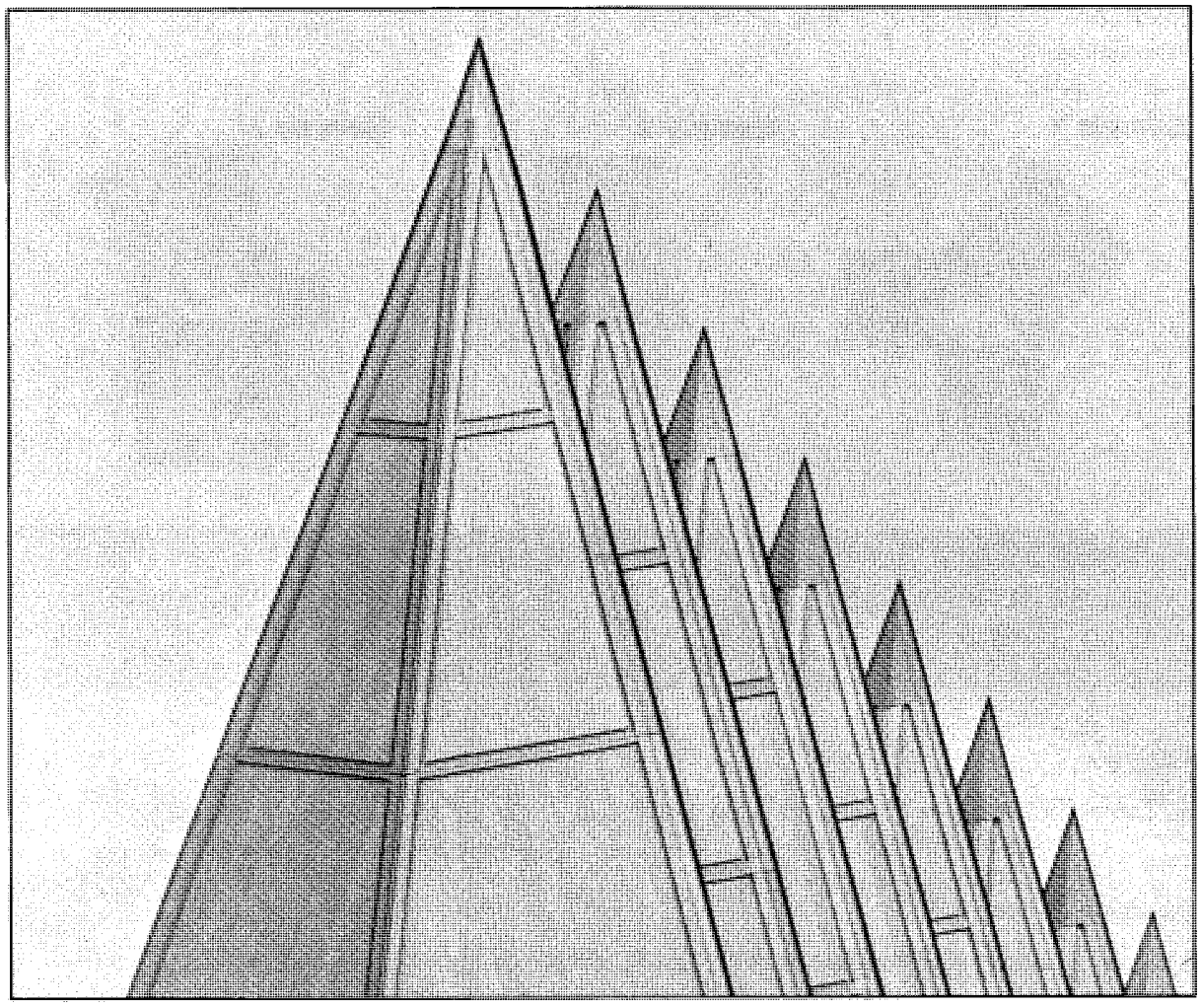
Resumen 469

Examen 470

Resumen global (Caps. 4 a 7) 471

La geometría en nuestro mundo
Gráficas por computador: diseño asistido por computador 472

Más sobre triángulos



7.1 El teorema de Pitágoras

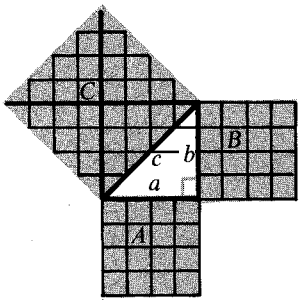
Uno de los teoremas más conocidos y útiles en geometría plana es el teorema de Pitágoras, llamado así por el matemático griego Pitágoras.

El teorema dice que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo.

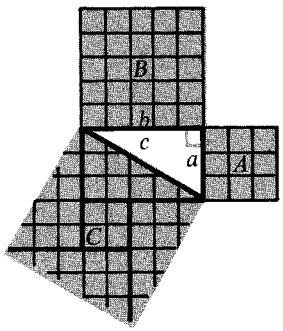
En los ejemplos 1 a 3, encuéntrese la manera de contar las pequeñas unidades cuadradas para mostrar que el área de los cuadrados A y B es igual al área del cuadrado C sobre la hipotenusa.

REPASO: Las definiciones de triángulo rectángulo, hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo, están en la página 199.

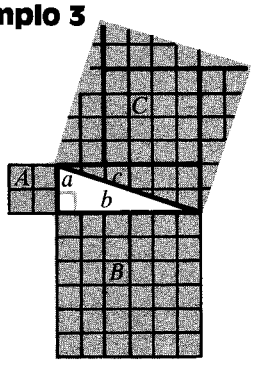
Ejemplo 1



Ejemplo 2



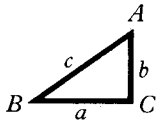
Ejemplo 3



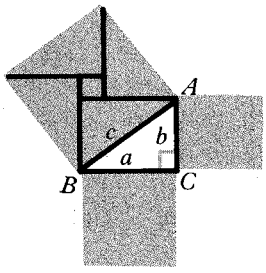
Teorema 7.1 **Teorema de Pitágoras.** Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

PRUEBA

Dado: El triángulo rectángulo ACB con longitud de hipotenusa c y con longitudes de catetos a y b.

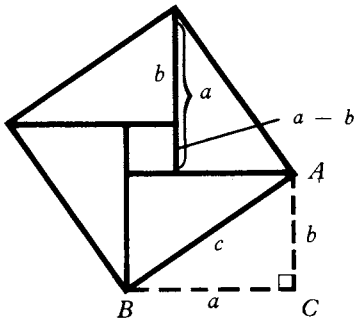


Pruébese: $c^2 = a^2 + b^2$.



Análisis: Constrúyanse cuadrados sobre $\triangle ABC$ como los que se muestran en los ejemplos 1 a 3. El cuadrado sobre a tendrá área a^2. El cuadrado sobre b tendrá área b^2. El cuadrado sobre c tendrá área de c^2.

El cuadrado sobre el lado c consta de cuatro triángulos congruentes con $\triangle ABC$ y un cuadrado. La figura muestra que la longitud de un lado del cuadrado pequeño es $a - b$. Puede encontrarse el área del cuadrado grande sumando las áreas de los cuatro triángulos y el área del cuadrado pequeño. El área de los triángulos es $1/2ab$. El área del cuadrado es $(a - b)^2$. Así, $c^2 = 4(1/2ab) + (a - b)^2 = 2ab + + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$.

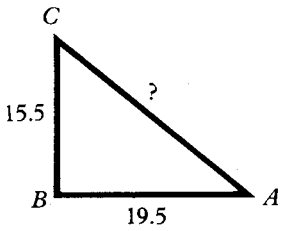


APLICACION

Un anuncio sobre la venta de un televisor dice que la pantalla es de 25 pulgadas. La pantalla mide aproximadamente 19.5 pulgadas de ancho y 15.5 pulgadas de altura. ¿Por qué se puede anunciar que tiene una pantalla de 25 pulgadas?

Respuesta. En realidad, el fabricante se refiere a la longitud de la diagonal de la pantalla.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$19.5^2 + 15.5^2 = 620.5$$
$$AC \doteq 24.9$$



Así, la diagonal de la pantalla es de casi 25 pulgadas.

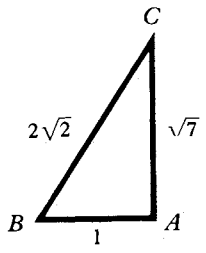
El siguiente teorema es la recíproca del teorema de Pitágoras.

Teorema 7.2 Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a, b y c, y $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

Ejemplo

$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo porque

$$(\sqrt{7})^2 + 1^2 = (2\sqrt{2})^2. \qquad (7 + 1 = 8)$$

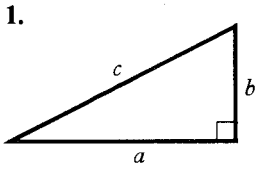


EJERCICIOS

A.

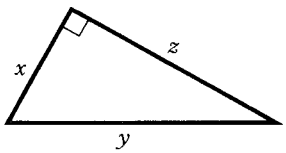
En los ejercicios 1 a 6, establézcase si la ecuación dada es correcta o no.

1.



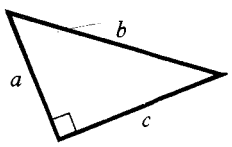
$c^2 = a^2 + b^2$

2.



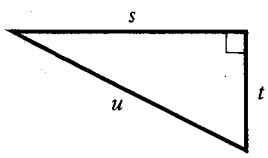
$x^2 + y^2 = z^2$

3.



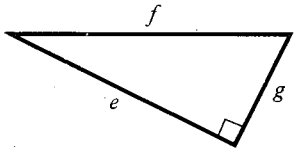
$c^2 = a^2 + b^2$

4.



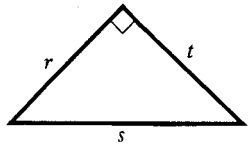
$s^2 = u^2 - t^2$

5.



$f = \sqrt{e^2 + g^2}$

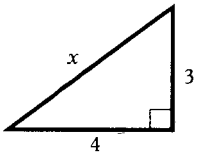
6.



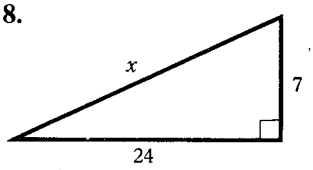
$r = \sqrt{s^2 + t^2}$

En los ejercicios 7 a 12, empléese la información dada en la figura para encontrar el valor de x.

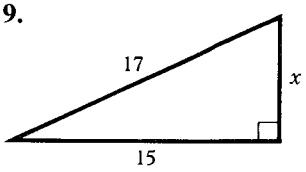
7.



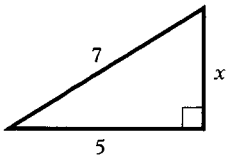
8.



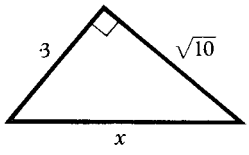
9.



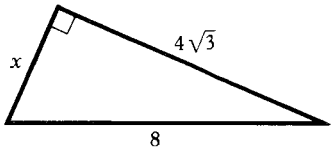
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 18, empléese el triángulo rectángulo ABC.

13. Si $AB = 6$ y $AC = 8$, entonces $BC =$?.

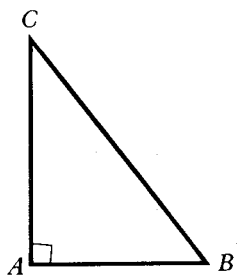
14. Si $BC = 15$ y $AB = 9$, entonces $AC =$?.

15. Si $AC = 2$ y $AB = 2$, entonces $BC =$?.

16. Si $BC = \sqrt{15}$ y $AB = \sqrt{10}$, entonces $AC =$?.

17. Si $AC = \sqrt{2}$ y $AB = \sqrt{3}$, entonces $BC =$?.

18. Si $AB = 2\sqrt{3}$ y $BC = 6$, entonces $AC =$?.



En los ejercicios 19 a 24, decídase si las cifras dadas pueden ser longitudes de lados de un triángulo rectángulo.

19. 10, 24, 26.

20. 20, 21, 29.

21. 8, 15, 17.

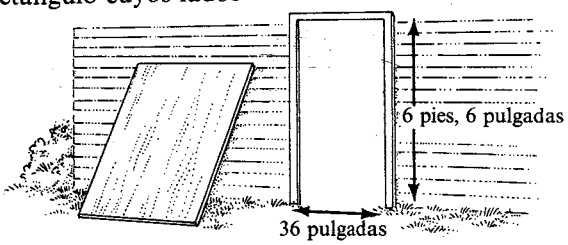
22. 7, 25, $\sqrt{674}$.

23. 5, 13, $\sqrt{195}$.

24. 5, 12, 13.

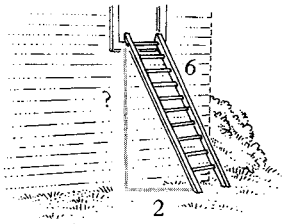
25. Hallar la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen de longitud 10 y 18.

26. Una puerta mide 6 pies y 6 pulgadas de altura por 36 pulgadas de ancho. ¿Cuál es el ancho mayor que puede tener un tablero para que quepa por esa puerta?



(Ejercicio 26)

27. Una escalera de 6 pies se coloca contra una pared con la base a 2 pies de la pared. ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?

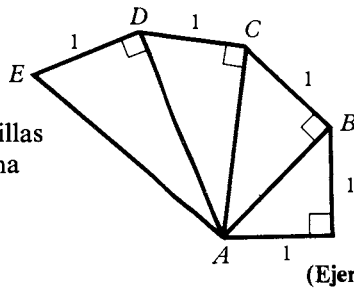


28. Encuéntrense las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

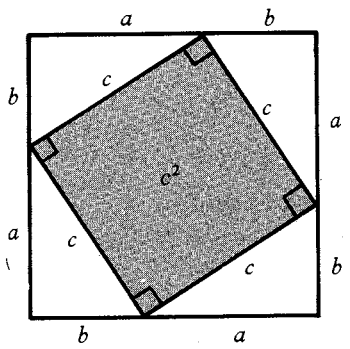
29. Con una regla y un compás, trácense segmentos de longitudes $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$.

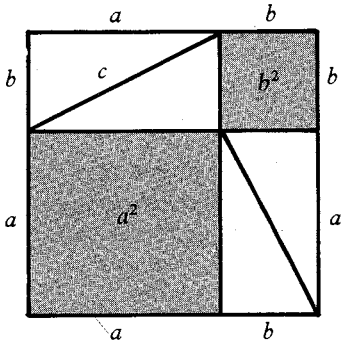
30. Una persona viaja 8 millas al norte, 3 millas al oeste, 7 millas al norte y 11 millas al este. ¿A qué distancia está la persona del punto original?

31. Con los cuadrados cuyos lados miden $a + b$, muéstrese que el teorema de Pitágoras es verdadero.



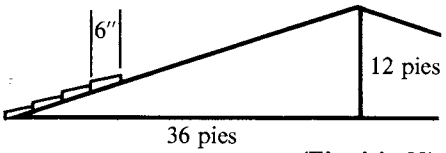
(Ejercicio 28)





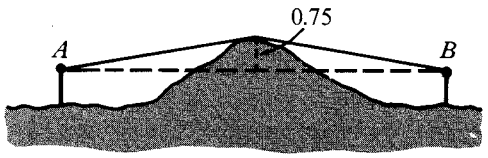
32. Una escalera extensible de 36 pies debe tener 4 pies de solape cuando está totalmente extendida. Si la base de la escalera está a 10 pies del edificio, ¿qué altura alcanzará la escalera?

33. (Empléese una calculadora.)
Si una hilera de tejas mide 6 pulgadas de ancho, ¿cuántas hileras de tejas se necesitan para cada lado de este tejado?



(Ejercicio 33)

34. (Empléese una calcuadora.)
Un grupo de ingenieros agrimensores quiere medir la distancia entre dos puntos A y B en un terreno accidentado. Desean conocer la distancia horizontal real AB. Si la tierra está 0.75 metros más alta en la mitad de los dos puntos y si la cinta de medir indica 27.0 metros, ¿cuál es la distancia real AB?

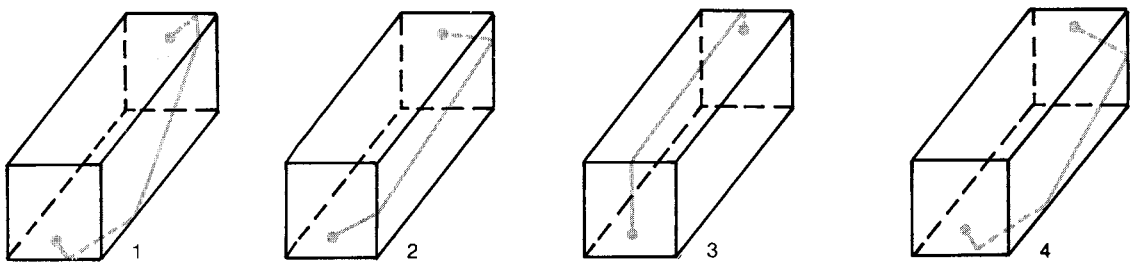


(Ejercicio 34)

ACTIVIDADES

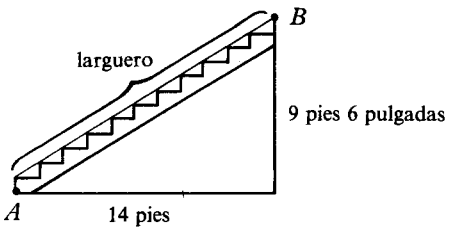
En una habitación de 8 pies de ancho, 8 pies de altura y 15 pies de largo, una mosca vuela desde la mitad de la pared delantera, a 1 pie sobre el piso, hasta la mitad de la pared trasera, a 1 pie del techo.

1. Adivínese cuál de los recorridos que se muestran a continuación es el más corto.

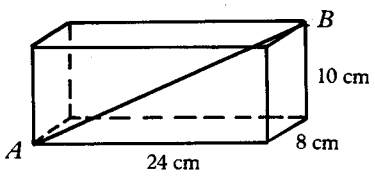


2. Constrúyase una caja que represente la habitación, trácense los recorridos y mídanse sus longitudes. (Cualquiera de los diagramas que aparecen en el siguiente SOLUCIÓN DE PROBLEMAS puede servir para construir la caja.)

35. Se va a construir una escalera con una pieza de madera llamada *larguero*. (Véase el ejercicio 9 de la pág. 173.) El larguero va de A a B, cubre una distancia horizontal de 14 pies y una altura de 9 pies y 6 pulgadas. ¿Qué longitud debe tener la pieza de madera para el larguero? (*Sugerencia:* la madera se vende en pies pies lineales.)



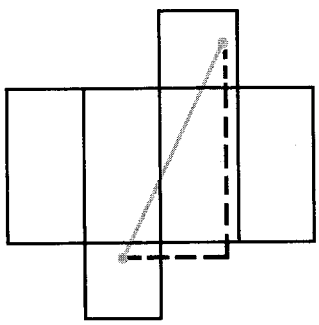
36. Una caja tiene 24 cm de largo, 8 cm de ancho y 10 cm de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{AB}$?



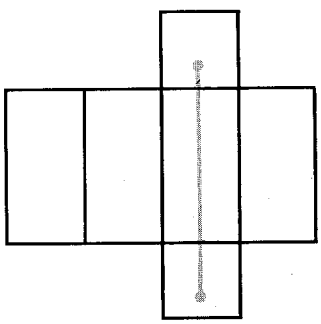
SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Imagínese que se cortó la caja de la sección «Actividades» anterior. Compárense los recorridos de la mosca mostrados en esa sección con uno de los diagramas siguientes:

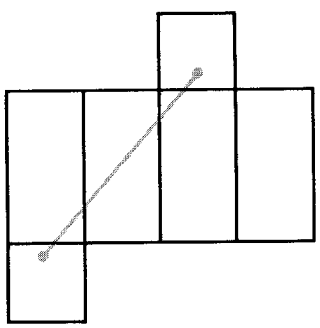
a



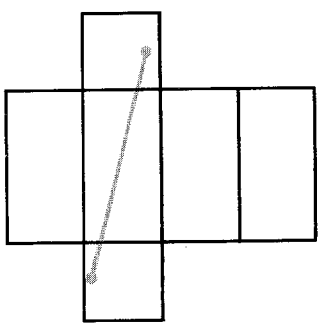
b



c



d

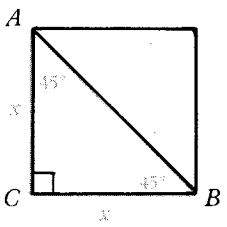


2. Complétese un triángulo rectángulo y calcúlese la longitud de cada recorrido.

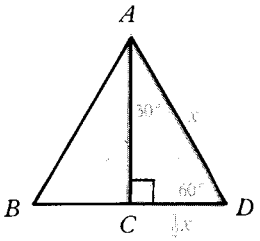
7.2 Triángulos especiales

Las figuras y tablas de la derecha presentan las dimensiones y especificaciones de dos tipos diferentes de tuercas.

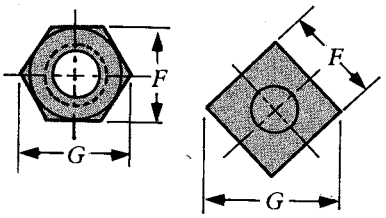
La dimensión F indica el tamaño de la llave que se necesita para la tuerca. ¿Cómo pueden calcularse las dimensiones G? Para este cálculo es útil conocer los triángulos 45°-45°-90° y 30°-60°-90°.



Un triángulo 45°-45°-90° está formado por dos lados de un cuadrado y una diagonal.



Un triángulo 30°-60°-90° está formado por una altura de un triángulo equilátero.



Tuercas cuadradas y hexagonales

Tamaño nominal	F	G	
	Anchura entre caras	Anchura entre esquinas	
		Cuadr.	Hex.
	Básica	Máx.	Máx.
0	5/32	0.221	0.180
1	5/32	0.221	0.180
2	3/16	0.265	0.217
3	3/16	0.265	0.217
4	1/4	0.354	0.289

Teorema 7.3 La longitud de la hipotenusa de un triángulo 45°-45°-90° es $\sqrt{2}$ multiplicado por la longitud de un cateto.

Teorema 7.4 La longitud del cateto más largo de un triángulo 30°-60°-90° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicado por la longitud de la hipotenusa o $\sqrt{3}$ multiplicado por la longitud del lado más corto.

La prueba del teorema 7.3 se deja como ejercicio. Se sugiere realizar una prueba del teorema 7.4 aplicando el teorema de Pitágoras para $\triangle ACD$ presentado antes:

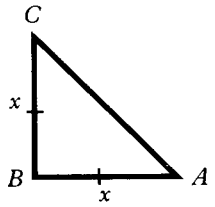
$$x^2 = (AC)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$(AC)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = x^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$AC = \sqrt{\frac{3}{4}}x = (\sqrt{3})\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x).$$

Estos dos teoremas pueden usarse para encontrar longitudes desconocidas en triángulos especiales.

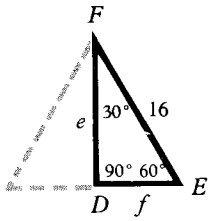
Ejemplo 1



1. $\angle A$ y $\angle C$ deben ser ángulos de 45°.
2. Por el teorema 7.3, $x\sqrt{2} = 12$, así que

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Ejemplo 2



1. $\overline{ED}$ es una altura de un triángulo equilátero, así que

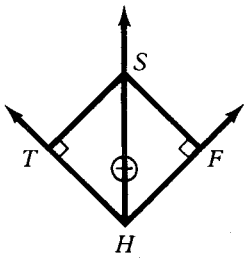
$$f = \frac{16}{2} = 8.$$

2. Por el teorema 7.4, $e = \sqrt{3} \cdot f$
o bien $e = 8\sqrt{3}$.

APLICACION 1

¿Qué distancia hay entre *home* y la segunda base en un diamante de béisbol? Recuérdese que la distancia de *home* a la primera base es 90 pies. Dado que $\triangle HFS$ es un triángulo 45° - 45°-90°, el teorema 7.3 dice que

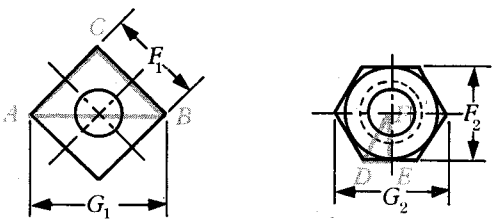
$$HS = \sqrt{2}\,(90) \doteq 127.28 \text{ pies.}$$



NOTA: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ sólo se pueden aproximar con un número decimal.

APLICACION 2

Las tuercas de la especificación del principio de esta sección tienen forma cuadrada y de hexágono regular. Por tanto, $\triangle ABC$ es un triángulo 45°-45°-90° y $\triangle DEF$ es un triángulo 30°-60°-90°.



Por el teorema 7.3, $G_1 = \sqrt{2}F_1$.

Por el teorema 7.4, $FE = \sqrt{3}\,DE$

$$F_2 = 2FE = 2\sqrt{3}\,DE$$

$$DE = \frac{F_2}{2\sqrt{3}}$$

$$G_2 = 4\,DE = \frac{2}{\sqrt{3}}F_2.$$

Para el tamaño 4 de tuercas hexagonales con

$$F_2 = \tfrac{1}{4},\ G_2 = 4\,DE = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \doteq 0.289.$$

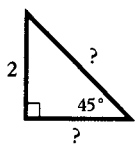
Obsérvese que este es el valor dado en la tabla.

EJERCICIOS

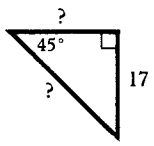
A.

En los ejercicios 1 a 4, empléese el teorema 7.3 para encontrar las longitudes de los lados indicados.

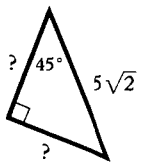
1.



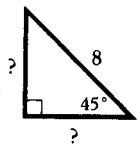
2.



3.

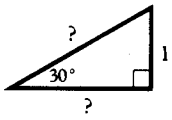


4.

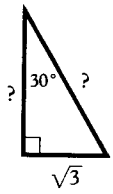


En los ejercicios 5 a 12, empléese el teorema 7.4 para encontrar las longitudes de los lados de cada triángulo.

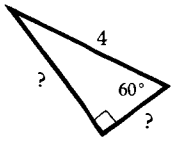
5.



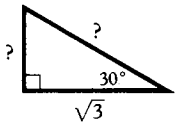
6.



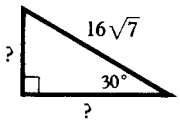
7.



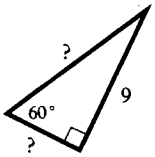
8.



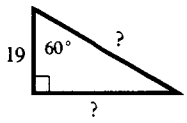
9.



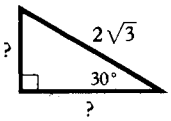
10.



11.



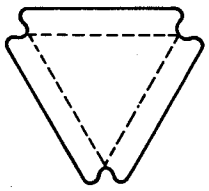
12.

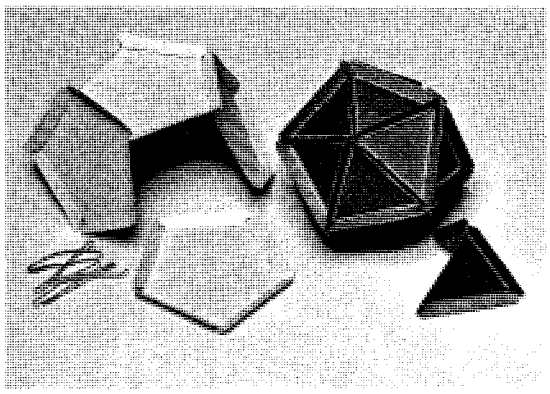


ACTIVIDADES

Recórtense en cartulina u otro material tantos triángulos equiláteros como sean necesarios y únanse con bandas elásticas como se muestra en la fotografía.

Se pueden construir ocho figuras de sólidos convexos usando sólo triángulos equiláteros del mismo tamaño. Constrúyase el máximo de ellas.



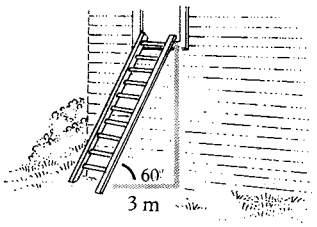


B.

13. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide el doble que el otro ángulo agudo. Si la longitud del cateto más largo es 5, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?

14. El hueco de una ventana mide 41 pulgadas de ancho y 26 pulgadas de altura. ¿Puede introducirse por la ventana una mesa de ping-pong de 48 pulgadas de ancho?

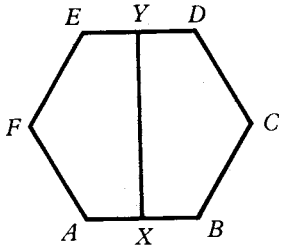
15. Una escalera colocada contra una pared forma un ángulo de 60° con el suelo. Si la base de la escalera está a tres metros de la pared, ¿a qué altura del suelo está la parte superior de la escalera?



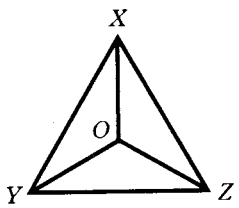
16. Pruébese el teorema 7.3.

C.

17. Pruébese que la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide s es $s\frac{\sqrt{3}}{2}$.

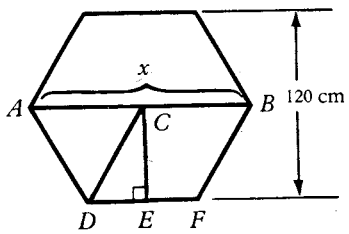


18. Si la longitud del lado de un hexágono regular $ABCDEF$ es s, ¿cuál es la longitud de $\overline{XY}$ si X e Y son los puntos medios de lados opuestos?



19. Si un triángulo equilátero tiene lados de longitud s, encuéntrese el radio del círculo que contiene los tres vértices.

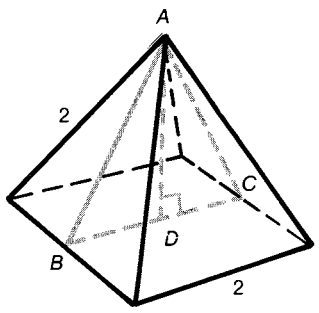
20. Un arquitecto está calculando las dimensiones de una ventana con forma de *hexágono regular*. Si la altura del hueco es 120 cm, encuéntrese la anchura AB. ($m\angle ADF = 120$.)



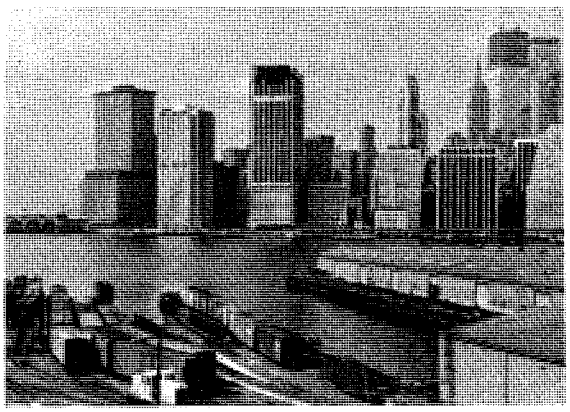
SOLUCION DE PROBLEMAS

Considérese una pirámide cuadrada cuyas aristas tienen longitud 2. Supóngase que los puntos B y C son los puntos medios de las aristas.

1. Encuéntrense las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
2. Encuéntrese la longitud de la altura $\overline{AD}$ de la pirámide.
3. ¿Es $\triangle ABC$ un triángulo equilátero?

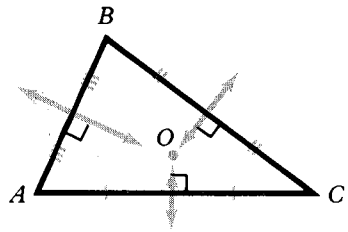


7.3 Teoremas de la concurrencia en triángulos

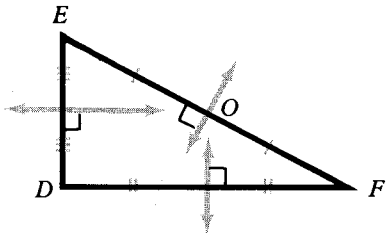


Un fabricante manufactura un producto que se vende principalmente en tres grandes ciudades. Se va a construir una fábrica nueva en un punto que equidiste de las tres ciudades. ¿Cómo puede localizarse el punto donde se construirá la fábrica? El análisis siguiente responde a esta pregunta.

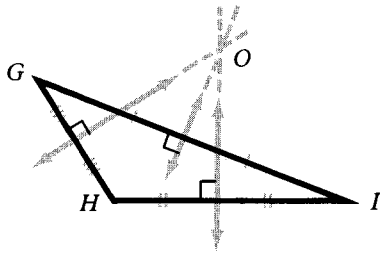
Constrúyanse las bisectrices perpendiculares a los lados de un triángulo.



¿Qué relación hay entre OA, OB y OC?



¿Qué relación hay entre OD, OE y OF?

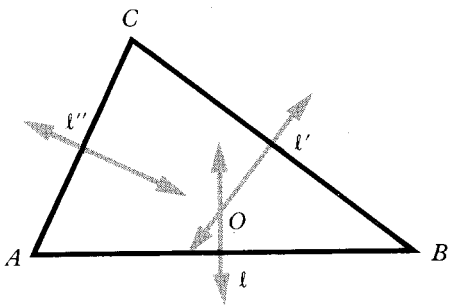


¿Qué relación hay entre OG, OH y OI?

Teorema 7.5 Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo se intersecan en un punto O equidistante de los tres vértices del triángulo.

PRUEBA

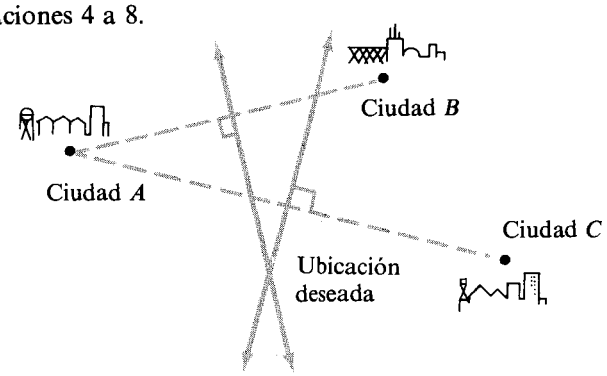
Dado: $\triangle ABC$ con bisectrices perpendiculares ℓ, ℓ' y ℓ''.
Pruébese: ℓ, ℓ' y ℓ'' son concurrentes en un punto O y $OA = OB = OC$.



Afirmaciones	Razones
1. ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.	**1.** Dado.
2. ℓ' es la bisectriz perpendicular de $\overline{BC}$.	**2.** Dado.
3. ℓ y ℓ' se intersecan en un punto O.	**3.** Si $\overline{AB} \nparallel \overline{BC}$ entonces $\ell \nparallel \ell'$.
4. $OA = OB$.	**4.** Un punto de una bisectriz perpendicular equidista de los extremos.
5. $OB = OC$.	**5.** ¿Por qué?
6. $OA = OC$.	**6.** Propiedad transitiva de las igualdades.
7. O está en la bisectriz perpendicular de $\overline{AC}$.	**7.** Un punto equidistante de dos puntos está en la bisectriz perpendicular del segmento determinado por esos puntos.
8. O está en ℓ, ℓ', ℓ'' y $OA = OB = = OC$.	**8.** Afirmaciones 4 a 8.

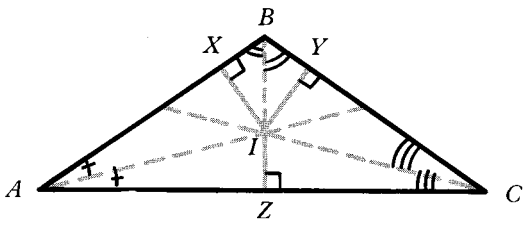
APLICACION

Al principio de esta sección, surgió la pregunta de cómo localizar un punto equidistante de tres ciudades. El teorema 7.5 responde a la pregunta.



Las bisectrices perpendiculares determinan un punto equidistante de los *vértices* del triángulo. También puede localizarse un punto que equidiste de los *lados* del triángulo.

En $\triangle ABC$, se trazaron las bisectrices de los tres ángulos.

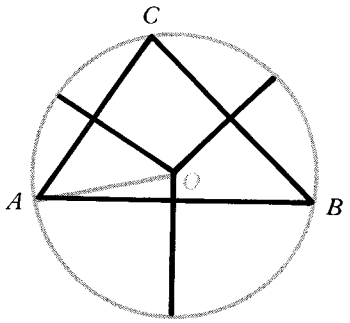


¿Qué relación hay entre IX, IY e IZ?

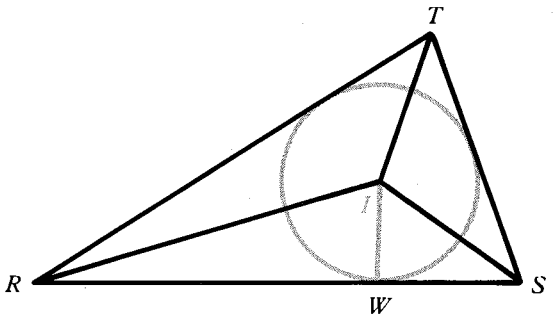
Teorema 7.6 Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto I que equidista de los tres lados del triángulo.

Los puntos determinados por las bisectrices perpendiculares (Teorema 7.5) y las bisectrices de los ángulos (Teorema 7.6) son los centros de los círculos que tienen una relación especial con el triángulo.

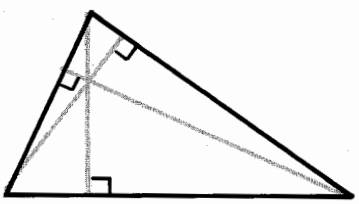
El círculo O contiene los tres vértices de $\triangle ABC$. El centro es el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares. El radio es OA. El círculo O se llama *círculo circunscrito.*



El círculo I toca cada lado de $\triangle RST$ exactamente en un punto. El centro es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo. El radio es IW. El círculo I se llama *círculo inscrito.*

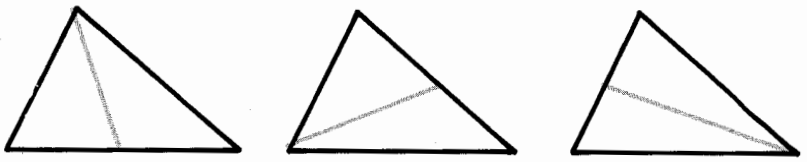


Si se dibujara un triángulo con sus tres alturas, se vería que las rectas que contienen las alturas son concurrentes.



Teorema 7.7 Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.

Para cualquier triángulo, hay tres segmentos llamados *medianas.*

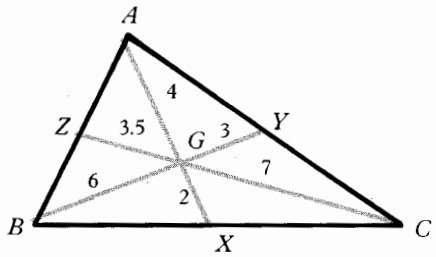


Definición 7.1

Una **mediana** de un triángulo es un segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.

Si se trazaran las tres medianas de un triángulo, se vería que las tres también son concurrentes.

Hay otra relación interesante.



¿Qué relación hay entre AG y AX?
¿Qué relación hay entre BG y BY?
¿Qué relación hay entre CG y CZ?

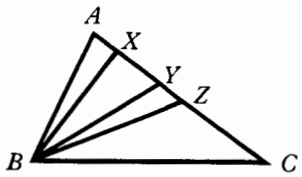
El siguiente teorema se establece sin prueba.

Teorema 7.8 Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto situado a dos tercios de la distancia de cada vértice al lado opuesto.

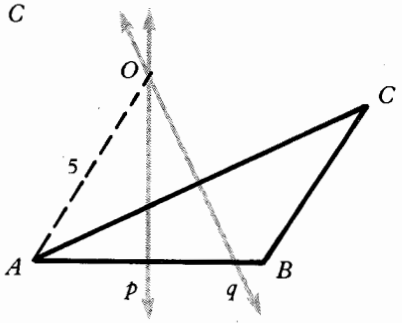
EJERCICIOS

A.

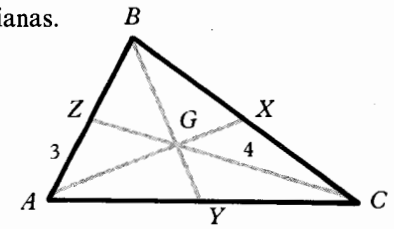
1. Cítense una altura, una bisectriz de un ángulo y una mediana de $\triangle ABC$.



2. En $\triangle ABC$, las rectas p y q son bisectrices perpendiculares de los lados. Si $OA = 5$, encuéntrense OB y OC.



En $\triangle ABC$, $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ son medianas.

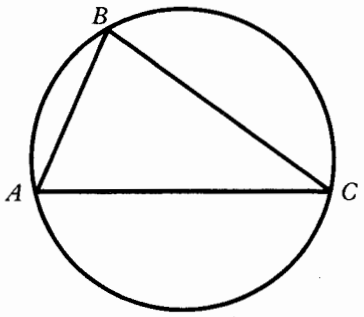


3. Si $AZ = 3$, $ZB = \underline{?}$.

4. Si $CG = 4$, $GZ = \underline{?}$.

5. Si $AB = BY$, $BG = \underline{?}$.

6. Trácese $\triangle ABC$ y el círculo que pasa por los puntos A, B y C. Empléense un compás y una regla para encontrar el centro del círculo. (*Indicación:* Usese el Teorema 7.5.)



En los ejercicios 7 a 12 debe completarse una construcción. Empléense una regla y un compás o una hoja de plástico transparente para estas construcciones. Cada ejercicio debe ocupar casi una hoja completa de papel.

7. Ilústrese el teorema 7.5 dibujando un triángulo y las tres bisectrices perpendiculares.

8. Ilústrese el teorema 7.6 dibujando un triángulo y las tres bisectrices de los ángulos.

9. Ilústrese el teorema 7.7 dibujando un triángulo y sus tres alturas.

10. Ilústrese el teorema 7.8 dibujando un triángulo y las tres medianas.

11. Dibújense un triángulo y el círculo circunscrito. (*Indicación:* El teorema 7.5 indica cómo encontrar el centro del círculo.)

12. Dibújese $\triangle ABC$ con lados de 14 cm, 17 cm y 20 cm. Con toda precisión, trácense las intersecciones de las medianas, de las alturas y de las bisectrices perpendiculares de los lados. (El dibujo debe verificar que estos tres puntos están en una recta.)

Encuéntrense las respuestas de los ejercicios 13 a 16 experimentando con bocetos. Llénense los espacios en blanco con las palabras «siempre», «algunas veces» o «nunca».

13. Las alturas de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.

14. Las medianas de un triángulo ? se intersecan en el exterior del triángulo.

15. Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.

16. Las bisectrices de un triángulo ? se intersecan en el interior del triángulo.

17. El centro del círculo circunscrito ? está dentro del triángulo.

18. El centro del círculo inscrito ? está dentro del triángulo.

En los ejercicios 19 y 20, llénese el primer espacio en blanco con las palabras «acutángulo», «rectángulo» u «obtusángulo», y el segundo espacio con las palabras «dentro», «sobre» o «fuera».

19. El punto de intersección de las rectas que contienen las alturas de un triángulo ? está ? del triángulo.

20. El punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de un triángulo ? está ? del triángulo.

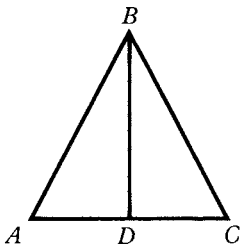
B.

21. Dibújense un triángulo y el círculo inscrito.

22. Pruébese que la mediana del vértice del ángulo de un triángulo isósceles es también una altura.

23. Pruébese que la mediana del vértice del ángulo de un triángulo isósceles es también la bisectriz del ángulo.

24. Pruébese que una altura de un triángulo equilátero es también una mediana del triángulo.

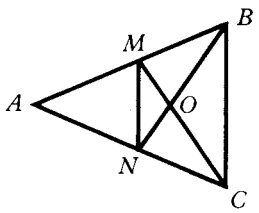


(Ejercicios 22, 23)

25. Pruébese que una mediana de un triángulo equilátero es también una altura del triángulo.

26. Pruébese que las medianas de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

27. En $\triangle ABC$, $AB = AC$, y $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ son bisectrices de los ángulos. Pruébese que $\triangle MON$ es un triángulo isósceles.



(Ejercicio 27)

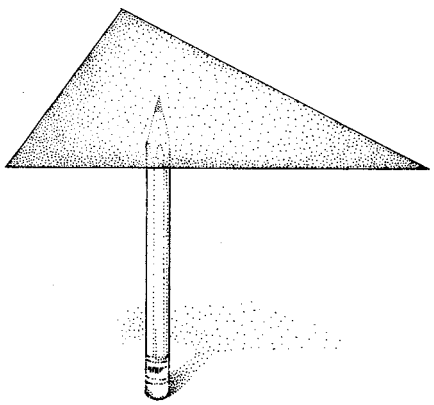
ACTIVIDADES

Centroide significa centro de masas. Si un triángulo pudiera equilibrarse, su «punto de equilibrio» sería un centroide.

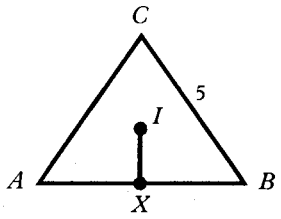
Experimento: Córtese una figura triangular en cartulina o tabla. (El triángulo debe ser escaleno.)

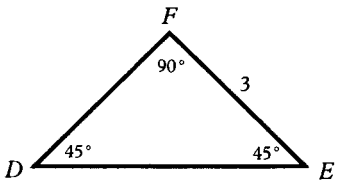
Encuéntrese el centroide de la figura.

¿Se puede equilibrar el objeto en ese punto? ¿Se puede hacer girar el objeto?



C.





28. Si $\triangle ABC$ es equilátero, encuéntrese la longitud IX del radio del círculo inscrito.

29. Si $\triangle DEF$ es un triángulo 45°-45°-90°, como se muestra, encuéntrese la longitud del radio del círculo circunscrito.

30. Pruébese que el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos de un triángulo isósceles está sobre la altura del ángulo del vértice.

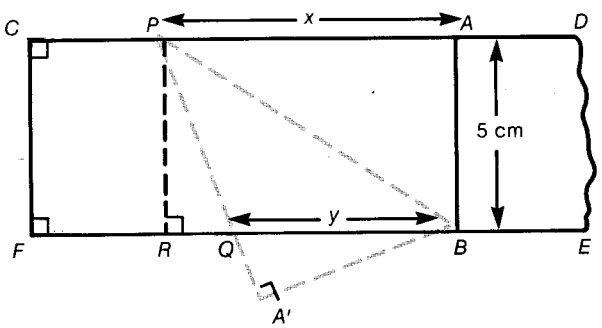
31. Pruébese que las tres medianas de un triángulo equilátero dividen al triángulo en seis triángulos congruentes.

32. Pruébese que en un triángulo equilátero las bisectrices perpendiculares de los lados, las bisectrices de los ángulos, las alturas y las medianas se intersecan en el mismo punto.

33. Pruébese que las alturas de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

SOLUCION DE PROBLEMAS

CDEF es una tira de papel de 5 cm de ancho y $\overline{AB}$ es un doblez paralelo a $\overline{CF}$.



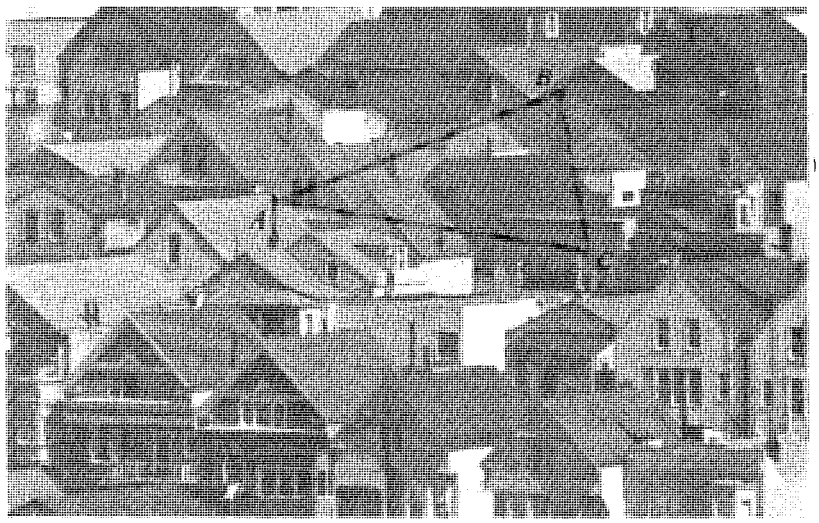
Sea P un punto cualquiera sobre $\overline{CA}$ y dóblese a lo largo de $\overline{PB}$ localizando el punto Q. Sean $PA = x$ y $QB = y$.

1. Muéstrese que $PQ = QB = y$.

2. Muéstrese que x e y están relacionadas porque $y = \dfrac{x^2 + 25}{2x}$.

(*Sugerencia:* Muéstrese que $\triangle PQR \cong \triangle BQA'$ y empléese el teorema de Pitágoras.)

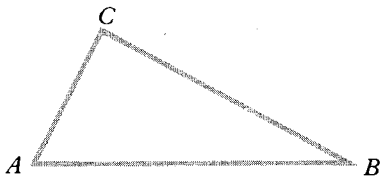
7.4 Desigualdad del triángulo



Con frecuencia se escuchan frases como «la distancia más corta entre dos puntos es un camino recto». Tales expresiones son una manera informal de describir una relación importante que se establecerá como postulado.

Los tres ejemplos siguientes sugieren el postulado.

Mídanse los lados.



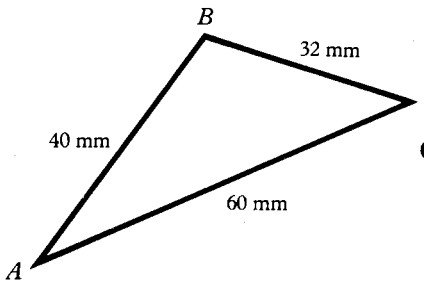
Obsérvese que
$AB < AC + CB$.

Mídanse los lados.

Obsérvese que
$AC < AB + CB$.

Mídanse los lados.

Obsérvese que
$CB < AB + AC$.



Obsérvese que

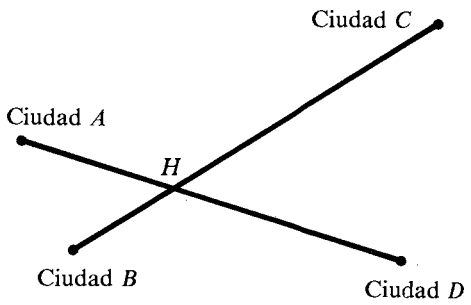
$40 + 32 > 60$
$40 + 60 > 32$
$60 + 32 > 40$

Postulado de la desigualdad del triángulo

La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

APLICACION 1

Una compañía de ferrocarriles va a construir una estación central para dar servicio a cuatro ciudades localizadas en los vértices $ABCD$ de un cuadrilátero, como se muestra en la figura. ¿Dónde debe ubicarse la estación H para que la longitud y el costo de la construcción de la línea férrea, $AH + BH + CH + DH$ sean mínimos?

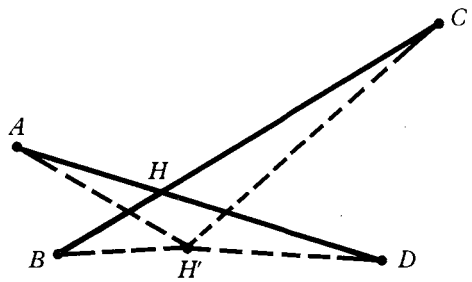


Respuesta. En el punto de intersección de las diagonales de $ABDC$.

Supóngase que H' es otro punto. Entonces, por el postulado de la desigualdad del triángulo,

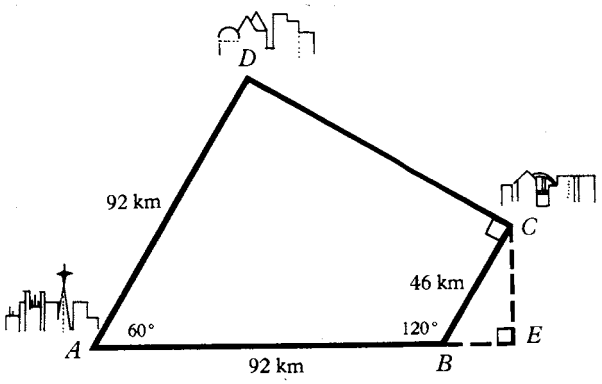
1. $BH + CH < BH' + CH'$ en $\triangle BCH'$.
2. $AH + DH < AH' + DH'$ en $\triangle ADH'$.

Por tanto,
$AH + BH + CH + DH < AH' + BH' + CH' + DH'$.



APLICACION 2

Si las ciudades están localizadas en los puntos A, B, C y D como se muestra en la figura, ¿cuál es la longitud mínima de una línea de un punto central H a cada una de las ciudades?



Respuesta. Por la aplicación 1, se observa que la línea de longitud mínima es la suma de las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Para encontrar la longitud de estas diagonales, primero deben encontrarse BE y CE. Dado que la longitud del cateto más corto de un triángulo 30°-60°-90° es la mitad de la longitud de la hipotenusa, $BE = 23$ km. El cateto más largo, CE, tiene una longitud de $23\sqrt{3}$ o unos 39.84 km.

Aplicando el teorema de Pitágoras a $\triangle AEC$, $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{13\,225 + 1587} =$ $= 121.7$ km. $BD = 92$ km. Por tanto, la longitud mínima es, aproximadamente, 121.7 km + 92 km = 213.7 km.

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 7, decídase si los conjuntos de números dados podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo.

1. $\{4, 5, 7\}$.

2. $\{4, 5, 17\}$.

3. $\{6, 13, 7\}$.

4. $\{9, 13, 17\}$.

5. $\{7, 7, 13\}$.

6. $\{j, k, j + k\}$.

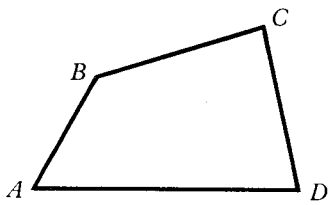
7. $\{a, 3a, 3a\}$.

B.

8. Si dos lados de un triángulo tienen longitudes 2 y 5, entonces la longitud del tercer lado es mayor que $\underline{?}$ y menor que $\underline{?}$.

9. Si las longitudes de dos lados de un triángulo son 7 y 9, ¿cuáles son las longitudes posibles del tercer lado?

10. Pruébese que $AB + BC + CD > AD$ para cualquier cuadrilátero $ABCD$.



(Ejercicio 10)

ACTIVIDADES

Constrúyase un triángulo con lados de 8 cm, 11 cm y 15 cm, y márquense los siguientes puntos:

a. El punto medio de los tres lados.

b. Los pies de las tres alturas.

c. La intersección de las tres alturas. Llámese H a este punto.

d. Los puntos medios de los segmentos que unen H con los vértices del triángulo.

¿Qué relación existe entre los 9 puntos de los apartados *a*, *b* y *d*?

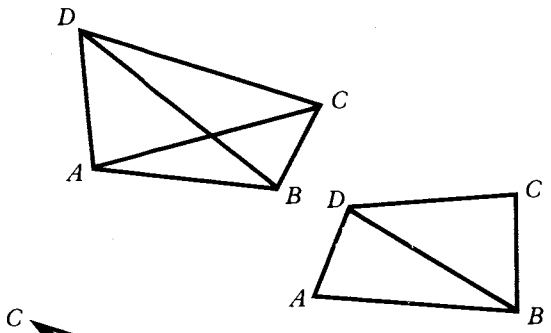
11. Pruébese que el camino más corto entre dos puntos, A y B, es el segmento que los une.

C.

12. Pruébese que la suma de las longitudes de los lados de un cuadrilátero es mayor que la suma de las longitudes de las diagonales.

13. Pruébese que la longitud de una diagonal de un cuadrilátero es menor que la mitad del perímetro. Esto es,

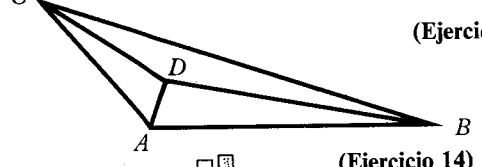
$$BD < \frac{AB + BC + CD + AD}{2}.$$



(Ejercicio 13)

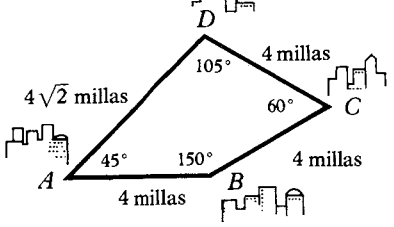
14. Pruébese que si D es un punto en el interior de $\triangle ABC$, entonces

$$\tfrac{1}{2}(AB + BC + AC) < AD + BD + CD.$$



(Ejercicio 14)

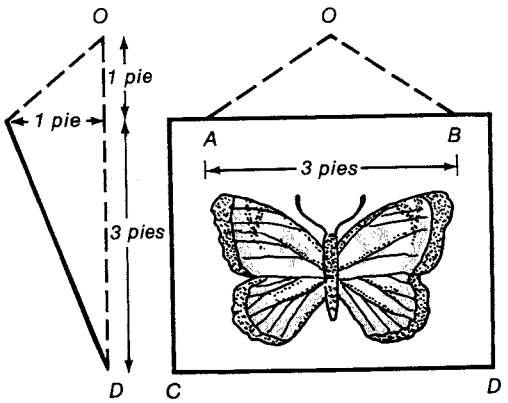
15. Supónganse que unas ciudades localizadas en los puntos A, B, C y D como se muestra en la figura. ¿Dónde está el punto H si $AH + BH + CH + DH$ es un mínimo? ¿Cuál es el valor de este mínimo? (Empléese una calculadora.)



SOLUCION DE PROBLEMAS

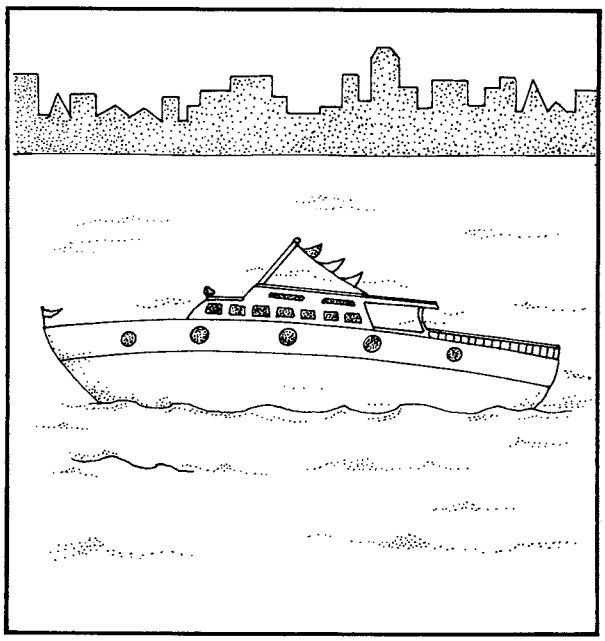
Este dibujo muestra la visión frontal y lateral de un cuadro colgado en una pared. El cuadro está apoyado contra la pared a lo largo de su base $\overline{CD}$ y separado de ella en la parte superior. Está colgado con una cuerda AOB, donde O es el clavo de la pared.

Encuéntrese la longitud AOB.

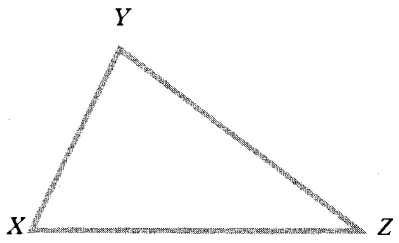


7.5 Desigualdades en un triángulo

Imagínese un asentamiento físico con distancias que no pueden medirse directamente. Algunas veces no es necesario conocer la distancia real, sino sólo una comparación entre las dos distancias. Por ejemplo, en un barco se puede comparar su distancia a un punto en la costa con su distancia a un punto en una isla para tener la seguridad de que se encuentra fuera de una línea imaginaria a medio camino entre la costa y la isla. El teorema de esta sección proporciona un método de hacer esto.

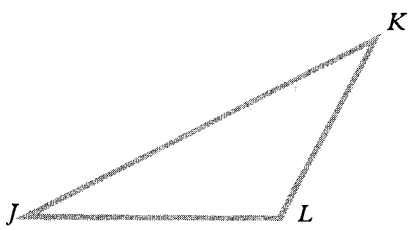


$m\angle Z < m\angle X$



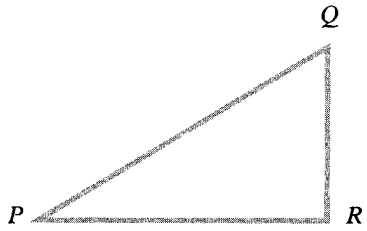
¿Cuál es más corto, $\overline{XY}$ o $\overline{YZ}$?

$m\angle J < m\angle K$



¿Cuál es más corto, $\overline{JL}$ o $\overline{LK}$?

$m\angle P < m\angle Q$

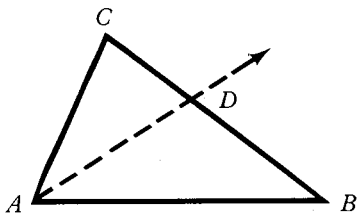


¿Cuál es más corto, $\overline{PR}$ o $\overline{QR}$?

Teorema 7.9 Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son desiguales, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo menor es menor que la longitud del lado opuesto al ángulo mayor.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ con $m\angle B < m\angle A$.
Pruébese: $AC < BC$.

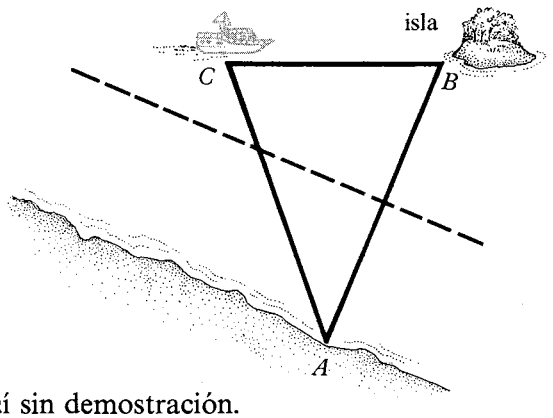


Afirmaciones	Razones
1. $m\angle B < m\angle A$.	1. Dado.
2. Existe un punto D sobre $\overrightarrow{BC}$ de manera que $m\angle BAD = m\angle B$.	2. Postulado del transportador.
3. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.	3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.
4. $AD = BD$.	4. ¿Por qué?
5. $AC < AD + DC$.	5. ¿Por qué?
6. $AD + DC = BD + DC$.	6. Propiedad de suma de las iguales.
7. $BD + DC = BC$.	7. Definición de «entre» para puntos.
8. $AC < BC$.	8. Principio de la sustitución.

APLICACION

¿Cómo puede determinarse que un barco está fuera de una línea imaginaria situada a medio camino entre la costa y una isla?

Respuesta. Unas personas situadas en los puntos A y B determinan, por medio de la radio, el radar o rayos láser, que $m\angle A < m\angle B$. Cuando esta información se comunica al barco, el capitán concluye, por el teorema 7.9, que $CB < CA$.



La recíproca del teorema 7.9 se enuncia aquí sin demostración.

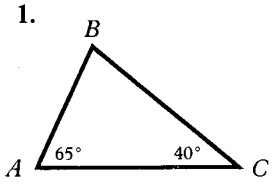
Teorema 7.10 Si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más corto es menor que la medida del ángulo opuesto al lado más largo.

EJERCICIOS

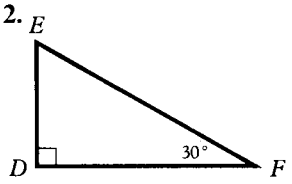
A.

En los ejercicios 1 a 4, dígase cuáles son los lados más cortos y los más largos de los triángulos dados.

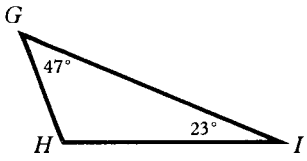
1.



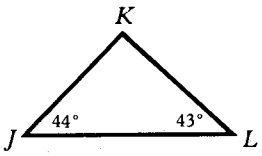
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 8, enumérense los lados del más corto al más largo, para un triángulo $\triangle ABC$ si:

5. $m\angle A = 46$, $m\angle B = 30$.

6. $m\angle C = 101$, $m\angle B = 70$.

7. $m\angle A = 59$, $m\angle C = 61$.

8. $m\angle B = 48$, $m\angle A = 47$.

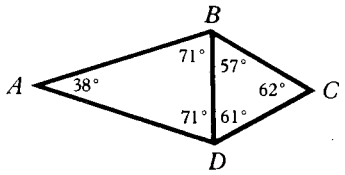
En los ejercicios 9 y 10, enumérense los ángulos del más pequeño al más grande de $\triangle ABC$ si:

9. $AB = 17$, $BC = 21$, $AC = 18$.

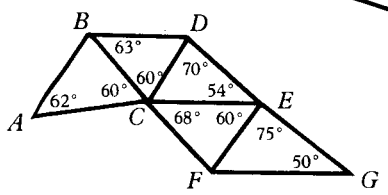
10. $AB = 15$, $AC = 16$, $BC = 17$.

B.

11. Enumérense los lados del cuadrilátero del más corto al más largo.



12. Enumérense todos los segmentos de esta figura del más corto al más largo. (Supóngase que todas las medidas indicadas de los ángulos son correctas.)

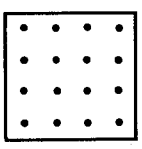


ACTIVIDADES

Empléese una matriz cuadrada de puntos de 3 × 3. Pueden dibujarse ocho triángulos de diferente tamaño y forma.

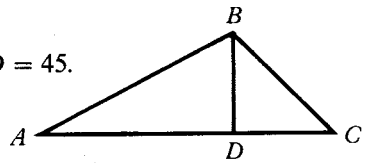
En una matriz cuadrada de puntos de 4 × 4 pueden dibujarse más de 30 triángulos.

Sugerencia: Trabájese en forma sistemática. No debe empezarse dibujando al azar. (Si no se dispone de papel de puntos, puede usarse papel milimetrado.)



13. **Dado:** $m\angle DBC = m\angle BCD = 45$.

Pruébese: $CD < AB$.



14. Pruébese que el segmento perpendicular de un punto a una recta es el segmento más corto del punto a la recta.

C.

15. Pruébese que la mediana del vértice Y del triángulo escaleno XYZ es mayor que la altura del vértice Y.

16. Pruébese que la suma de las longitudes de las tres alturas de $\triangle ABC$ es menor que la suma de los lados del triángulo.

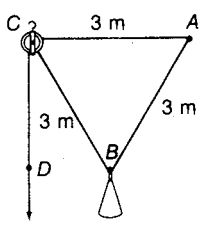
17. Los tres lugares principales de trabajo en una cocina son el refrigerador, la estufa y el lavadero, y pueden representarse como los puntos de un triángulo. Según una regla de arquitectura, «los tres lados del *triángulo de la cocina* deben sumar más de 12 pies y menos de 22 pies». Además, el lado más corto del triángulo debe estar entre el lavadero y la estufa.

A continuación, se muestra una tabla de «triángulos de cocina» posibles. Primero, debe decidirse si cada triángulo es o no posible. Después, decídase si los triángulos cumplen con la regla establecida.

	Estufa-lavadero	Estufa-refrigerador	Refrigerador-lavadero
a.	5 pies	4 pies	8 pies
b.	10 pies	11 pies	11 pies
c.	6 pies	8 pies	7 pies
d.	3 pies	7 pies	4 pies
e.	3 pies	8 pies	4 pies

SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase que *ABCD* es un cable flexible, *A* es un punto fijo y *C* es una polea fija. *B* es un peso que se desliza por el cable de manera que *AB* y *CB* tienen siempre la misma inclinación con respecto a la vertical. Encuéntrese a qué altura se eleva *B* si se tira de *D* 2 m hacia abajo.



Capítulo 7 Conceptos importantes

Términos

Mediana (pág. 455)

Postulados

Postulado de la desigualdad del triángulo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Teorema

7.1 **Teorema de Pitágoras.** Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

7.2 Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a, b y c, $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

7.3 La longitud de la hipotenusa de un triángulo 45°-45°-90° es $\sqrt{2}$ multiplicada por la longitud de un cateto.

7.4 La longitud del cateto más largo de un triángulo 30°-60°-90° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicado por la longitud de la hipotenusa o $\sqrt{3}$ multiplicada por la longitud del lado más corto.

7.5 Las bisectrices perpendiculares de los lados de un triángulo se intersecan en un punto O que equidista de los tres vértices de un triángulo.

7.6 Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto I que equidista de los tres lados de un triángulo.

7.7 Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un punto.

7.8 Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto que está a dos tercios de la distancia de cada vértice al lado opuesto.

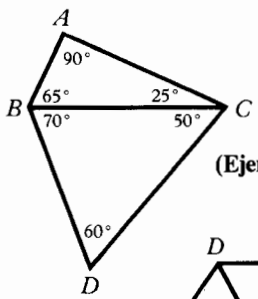
7.9 Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son desiguales, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo menor es menor que la longitud del lado opuesto al ángulo mayor.

7.10 Si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más corto es menor que la medida del ángulo opuesto al lado más largo.

Capítulo 7 Resumen

1. Indíquese si los siguientes problemas son falsos o verdaderos.
   - **a.** Un triángulo puede tener lados de 2 cm, 3 cm y 5 cm.
   - **b.** En el triángulo ABC, $m\angle A = 120$, $m\angle B = 20$ y $m\angle C = 40$. El lado más largo es $\overline{BC}$.
   - **c.** Un rectángulo de 10 cm por 24 cm tiene una diagonal de 26 cm.
   - **d.** Si el cateto más largo de un triángulo 30°-60°-90° tiene una longitud de $3\sqrt{3}$, entonces la longitud de la hipotenusa es 6.

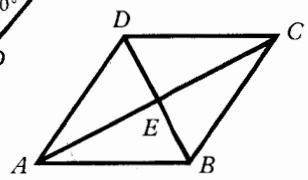
2. ¿Cuál es el lado más largo de la siguiente figura? (La figura no está dibujada a escala.)



(Ejercicio 2)

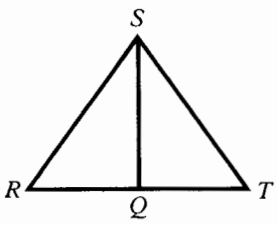
3. Encuéntrese la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo isósceles si la longitud de la hipotenusa es 4 cm.

4. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$, y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ con $BD = AB = 2$, encuéntrese AC.



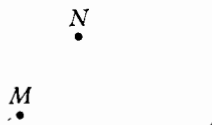
(Ejercicio 4)

5. Pruébese que la mediana $\overline{SQ}$ de un triángulo isósceles RST también es la bisectriz perpendicular de la base.



(Ejercicio 5)

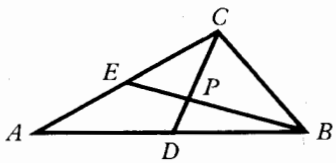
6. Localícese un punto equidistante de M, N y O.



(Ejercicio 6)

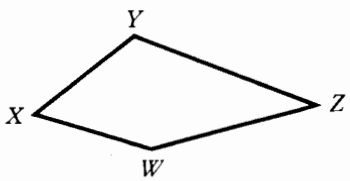
7. Si una escalera de 20 pies se coloca de manera que su base esté a 12 pies de la pared, ¿qué altura alcanzará la escalera?

8. E y D son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Si $EP = 4$, encuéntrese EB.



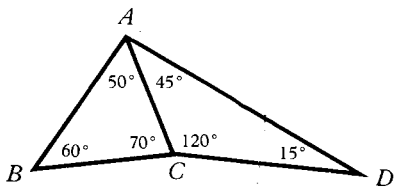
(Ejercicio 8)

9. **Dado:** $\overline{YZ}$ es el lado más largo de un cuadrilátero $XYZW$.
   $\overline{XW}$ es el lado más corto.
   Pruébese: $m\angle X > m\angle Z$.



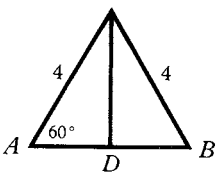
Capítulo 7 Examen

1. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
   a. Un triángulo puede tener lados de 6, 6 y 13.
   b. Si un triángulo tiene lados de 16, 30 y 44, entonces es un triángulo rectángulo.
   c. Si el ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 30°, entonces la base del triángulo es el lado más corto.
   d. Si el cateto más largo de un triángulo de 30°-60°-90° mide 2, entonces la longitud de la hipotenusa es $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



(Ejercicio 2)

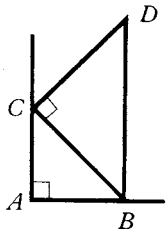
2. Dadas las medidas de ángulos indicadas, ¿cuál es el lado más corto de la figura? (La figura no está dibujada a escala.)



(Ejercicio 3)

3. En la figura siguiente, $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Si $AC = 4$, encuéntrense AD y CD.

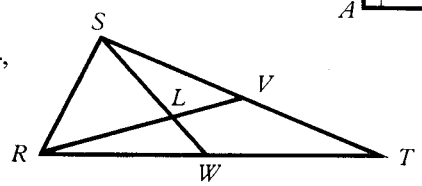
4. $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son triángulos rectángulos isósceles. Si $AC = 2$, encuéntrese BD.



(Ejercicio 4)

5. Pruébese que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles también es una mediana.

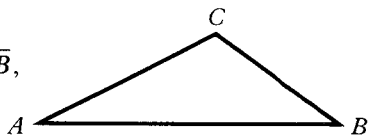
6. $\overline{SW}$ y $\overline{RV}$ son medianas de $\triangle RST$. $SL = 4$, $SW = 6$ y $RV = 9$. Encuéntrese RL.



(Ejercicio 6)

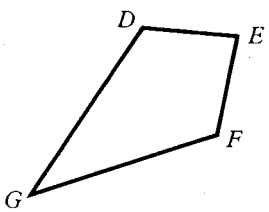
7. Si se coloca una viga contra una pared, a 80 cm de ella y apoyada a 150 cm del suelo, ¿cuál es la longitud de la viga?

8. En $\triangle ABC$, localícese el punto que es equidistante de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



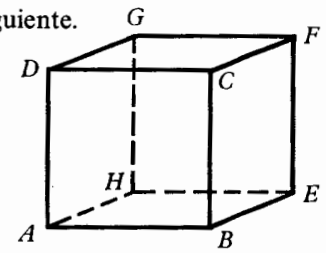
(Ejercicio 8)

9. **Dado:** $DE = EF$, $DG = FG$
   $DE < DG$.
   Pruébese: $m\angle G < m\angle E$.

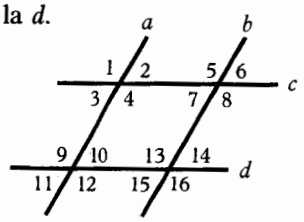


Resumen global (Caps. 4 a 7)

1. Utilícese la figura de un cubo para identificar lo siguiente.
   - **a.** una recta paralela al plano $ABEH$.
   - **b.** una recta alabeada a $\overleftrightarrow{DC}$.
   - **c.** un plano perpendicular a $\overleftrightarrow{CB}$.
   - **d.** una recta paralela a $\overleftrightarrow{GC}$.
   - **e.** un plano paralelo al plano $CFEB$.

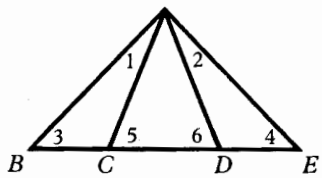


2. Supóngase que la recta a es paralela a la b y la c es paralela a la d.
   - **a.** Si $m\angle 1 = 105$, encuéntrese $m\angle 14$.
   - **b.** Si $m\angle 5 = 2x - 10$ y $m\angle 10 = x + 5$, encuéntrense $m\angle 5$ y $m\angle 10$.
   - **c.** Si $m\angle 12$ es 10 veces el doble de la medida de $\angle 11$, encuéntrense $m\angle 12$ y $m\angle 11$.



3. **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$.
   Pruébese: $\triangle ABC \cong \triangle AED$.

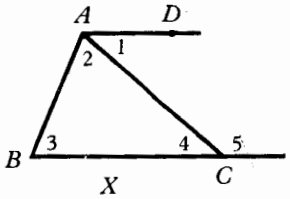
4. **Dado:** $\overline{DE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.
   Pruébese: $\triangle BDA \cong \triangle ECA$.



(Ejercicio 3, 4)

5. Si $\angle ACB$ es el ángulo del vértice de un triángulo isósceles. ABC y $m\angle 2 = 70$, encuéntrese $m\angle 5$.

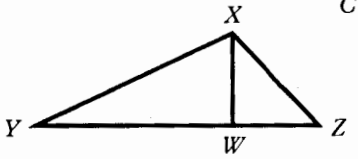
6. Si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m\angle 3 = 45$, $m\angle 1 = 65$, encuéntrese $m\angle 2$.



(Ejercicios 5, 6)

7. Si $\overline{XW}$ es perpendicular a $\overline{YZ}$, $m\angle Y = 30$, $m\angle Z = 45$ y $XW = 3$, encuéntrense las longitudes de $\overline{XY}$, $\overline{YW}$ y $\overline{XZ}$.

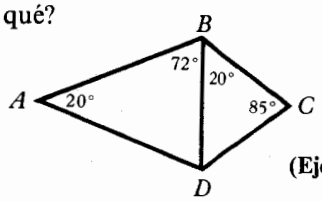
8. Si $\overline{XZ}$ es una altura de $\overline{XY}$, $XY = 12$ y $XZ = 5$, encuéntrese YZ.



(Ejercicios 7, 8)

9. Si dos lados cortos de un triángulo miden 5 cm y 3 cm, ¿es posible que el lado más largo mida 7 cm? ¿Por qué?

10. **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$.
    Encuéntrese: **a.** $m\angle ADB$.
    b. $m\angle BDC$.
    c. $m\angle ADC$.

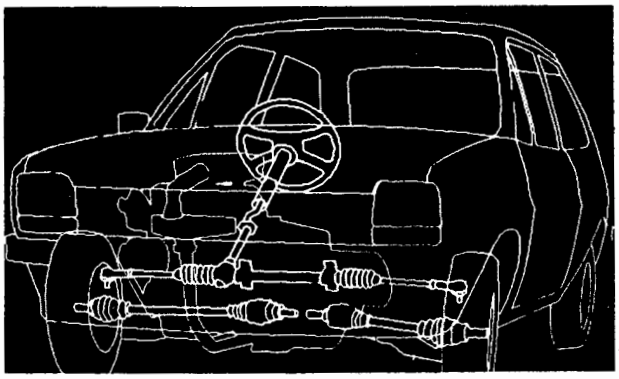


(Ejercicios 10, 11)

11. Enumérense los lados del cuadrilátero $ABCD$ del más corto al más largo.

LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Gráficas por computador: diseño asistido por computador

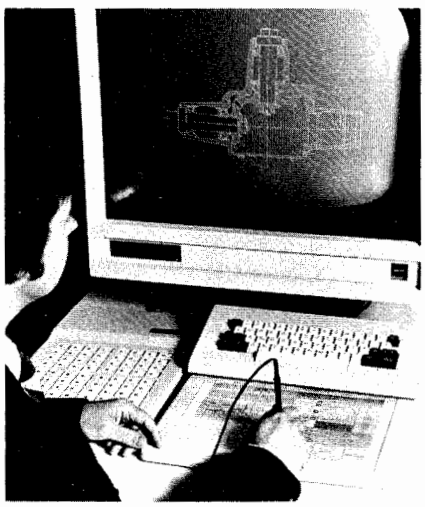


Las gráficas por computador han revolucionado el trabajo de los diseñadores industriales. El diseñador debe ser capaz de imaginar y analizar formas complejas compuestas de figuras geométricas. Con diseños asistidos por computador (*Computer Aided Design*, CAD), el diseñador emplea los computadores para dibujar diseños.

La fotografía superior muestra un diseño de un automóvil generado por un computador. El computador puede desplegar en la pantalla este diseño en infinidad de posiciones. Es decir, puede presentarse en la pantalla una vista frontal, de arriba, de abajo, etc., del automóvil.

Las fotografías muestran a unos diseñadores manejando los terminales de un computador. El diseñador de la derecha usa una pluma electrónica para alterar las dimensiones de una sección de un modelo. Al tocar la pantalla con la pluma, el diseñador se comunica con el computador.

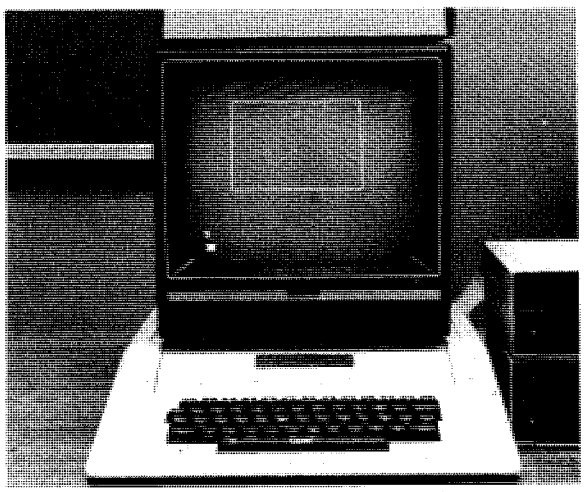
El diseñador de la izquierda está trabajando con una sección transversal de un modelo tridimensional. El tablero que tiene delante se utiliza para dar órdenes al computador. Al colocar la pluma electrónica en diferentes cuadros, puede añadir o borrar porciones del dibujo. También puede pedir al computador que amplíe una parte del dibujo. La biblioteca del computador incluye dibujos de partes estándar, como cojinetes o la transmisión, que pueden añadirse al diseño.



Ultimamente, con el uso de los microcomputadores, las gráficas por computador son accesibles para los estudiantes. En un modelo popular de microcomputador, la pantalla está dividida en 280 filas y 160 columnas invisibles. Por ejemplo, el espacio que está en la fila 40 y en la columna 20, es el punto llamado (40, 20). Iluminando un conjunto grande de puntos, aparecen líneas en la pantalla. Por ejemplo, el siguiente programa despliega en la pantalla un rectángulo cuyos vértices son los puntos (40, 20), (220, 20), (220, 120) y (40, 120).

El programa, o lista de instrucciones al computador, se muestra a continuación. La línea 10 indica al computador que se prepare para recibir instrucciones sobre gráficas (HGR). En la línea 20, HPLOT es una instrucción para dibujar en la pantalla una línea del punto (40, 20) al punto (220, 20). Compruébense las demás instrucciones para ver cómo se dibuja un rectángulo.

```
10  HGR
20  HPLOT 40, 20 TO 220, 20
30  HPLOT 40, 20 TO 40, 120
40  HPLOT 40, 120 TO 220, 120
50  HPLOT 220, 20 TO 220, 120
60  END
```



1. Escríbanse los mandatos HPLOT para formar un cuadrado en la pantalla.
2. Escríbanse cuatro mandatos HPLOT para formar un rectángulo el doble de alto que de ancho.
3. Créese una figura compuesta de segmentos de recta. Después, escríbanse los mandatos HPLOT que desplegarán la figura en la pantalla de un televisor.

TEMA 12

Cuadriláteros y polígonos

CAPÍTULO 8

8.1 Cuadriláteros 476

8.2 Paralelogramos 480

8.3 Cuadriláteros que son paralelogramos 486

8.4 El teorema del segmento medio 492

8.5 Rectángulos, rombos y cuadrados 498

8.6 Trapecios 504

8.7 Los ángulos de un polígono 508

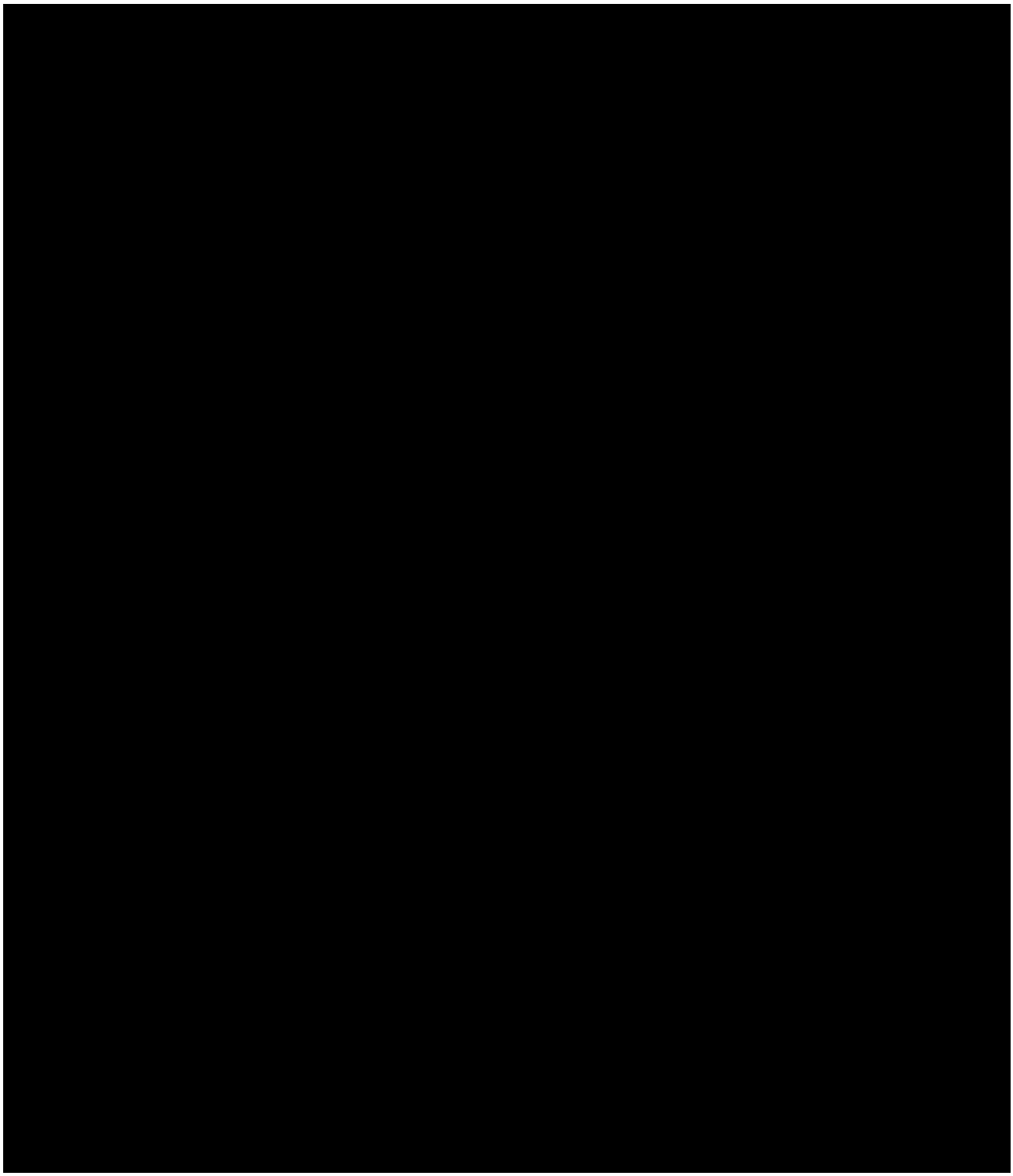
Conceptos importantes 512

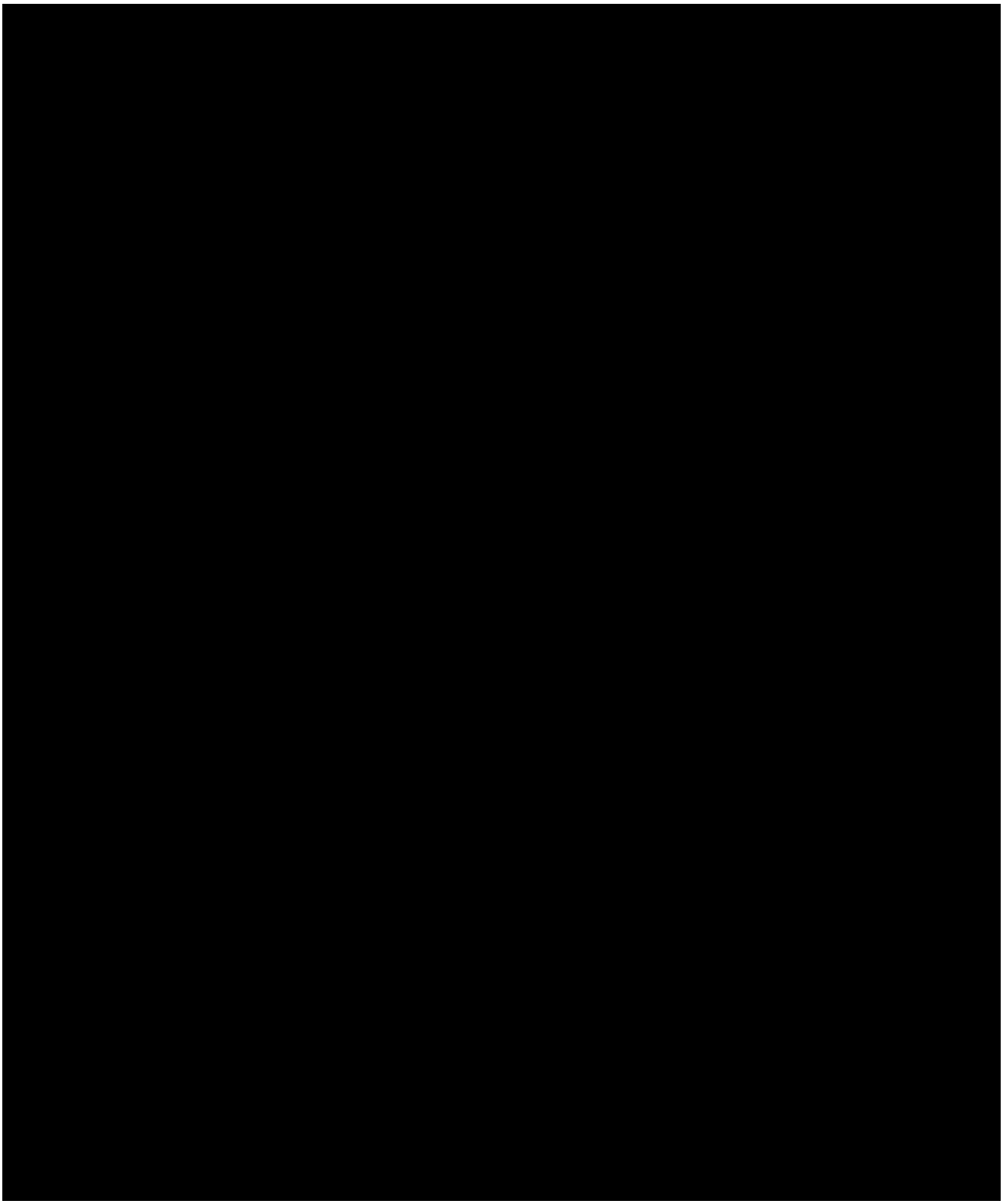
Resumen 513

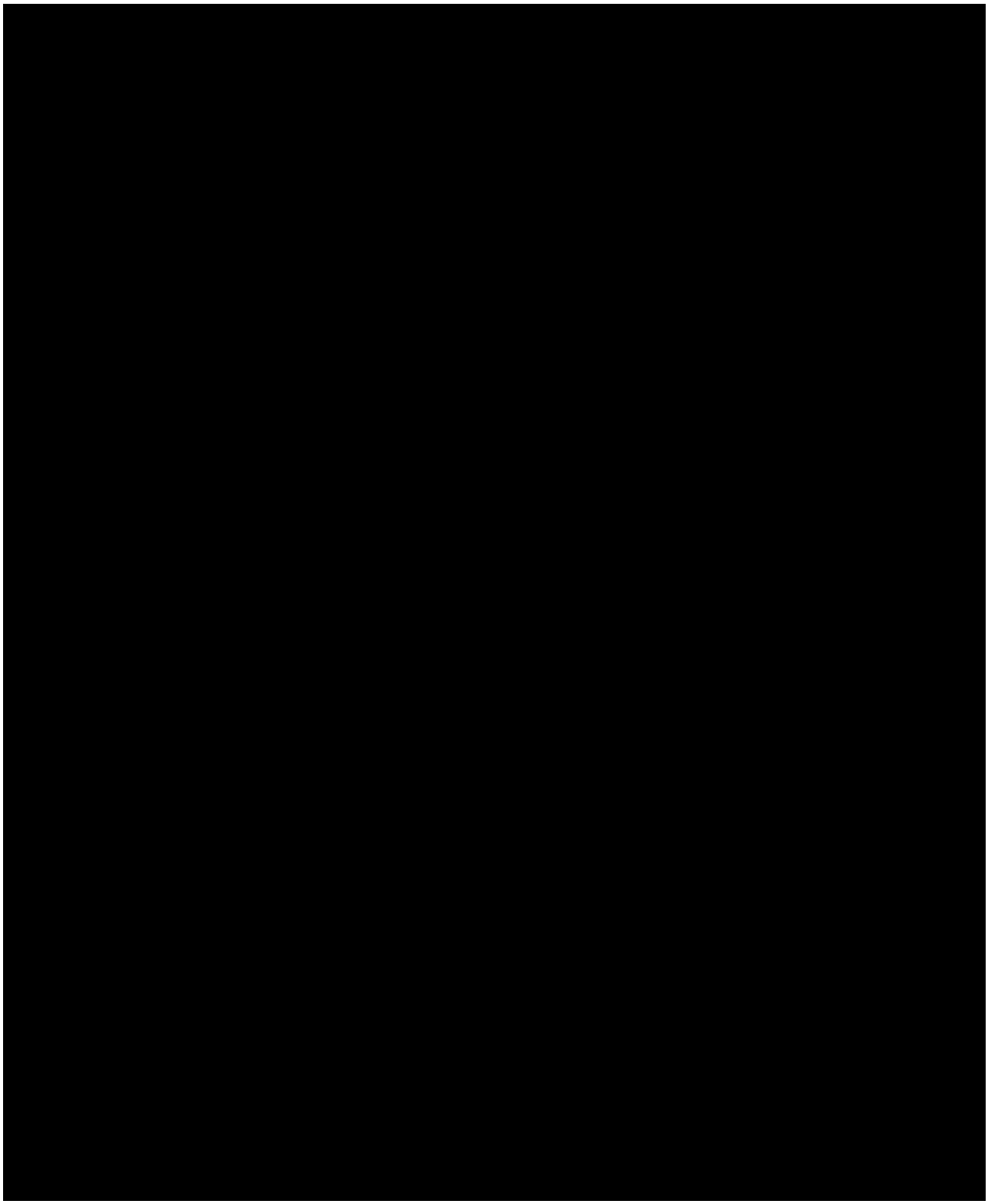
Examen 514

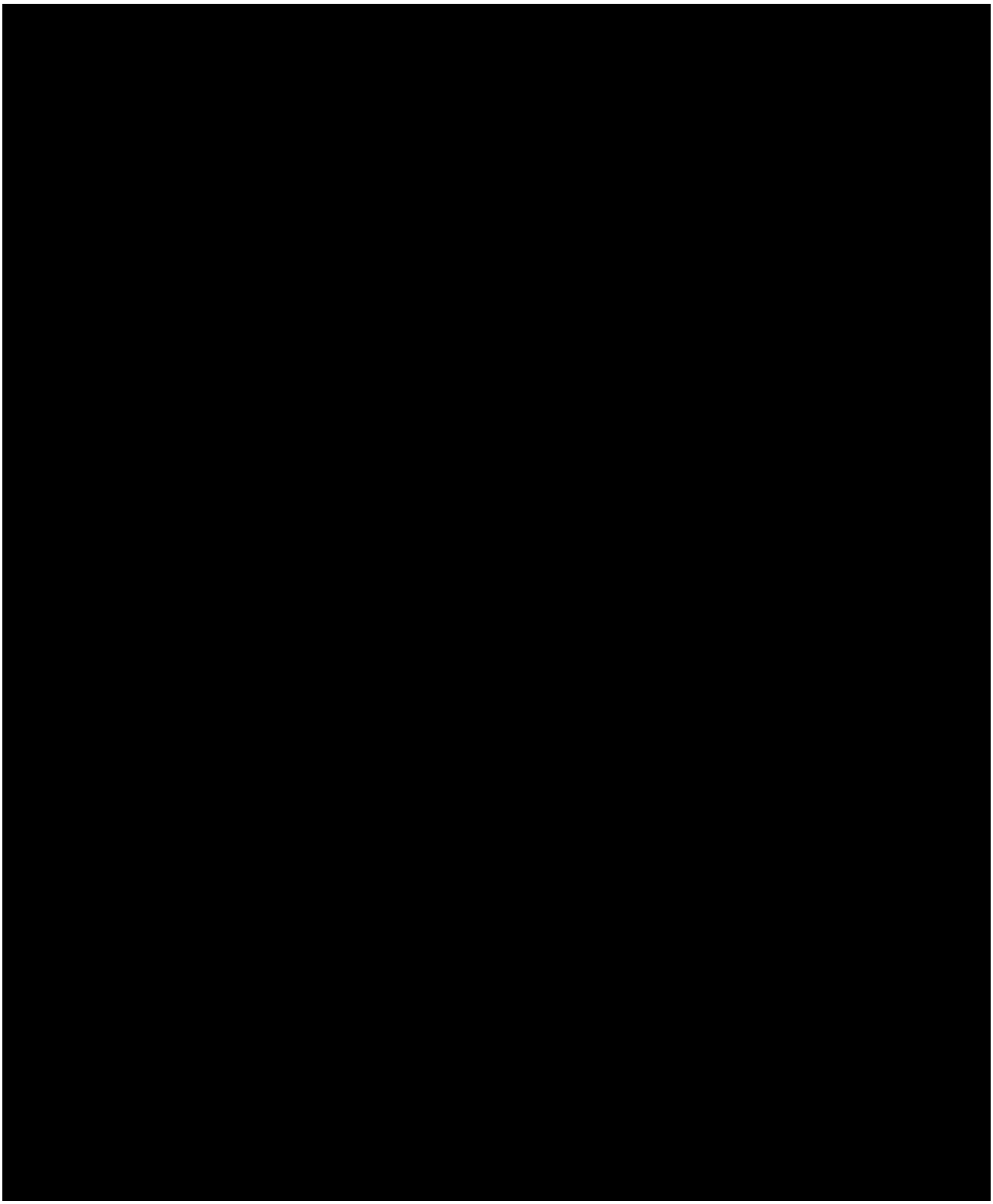
Repaso de álgebra 515

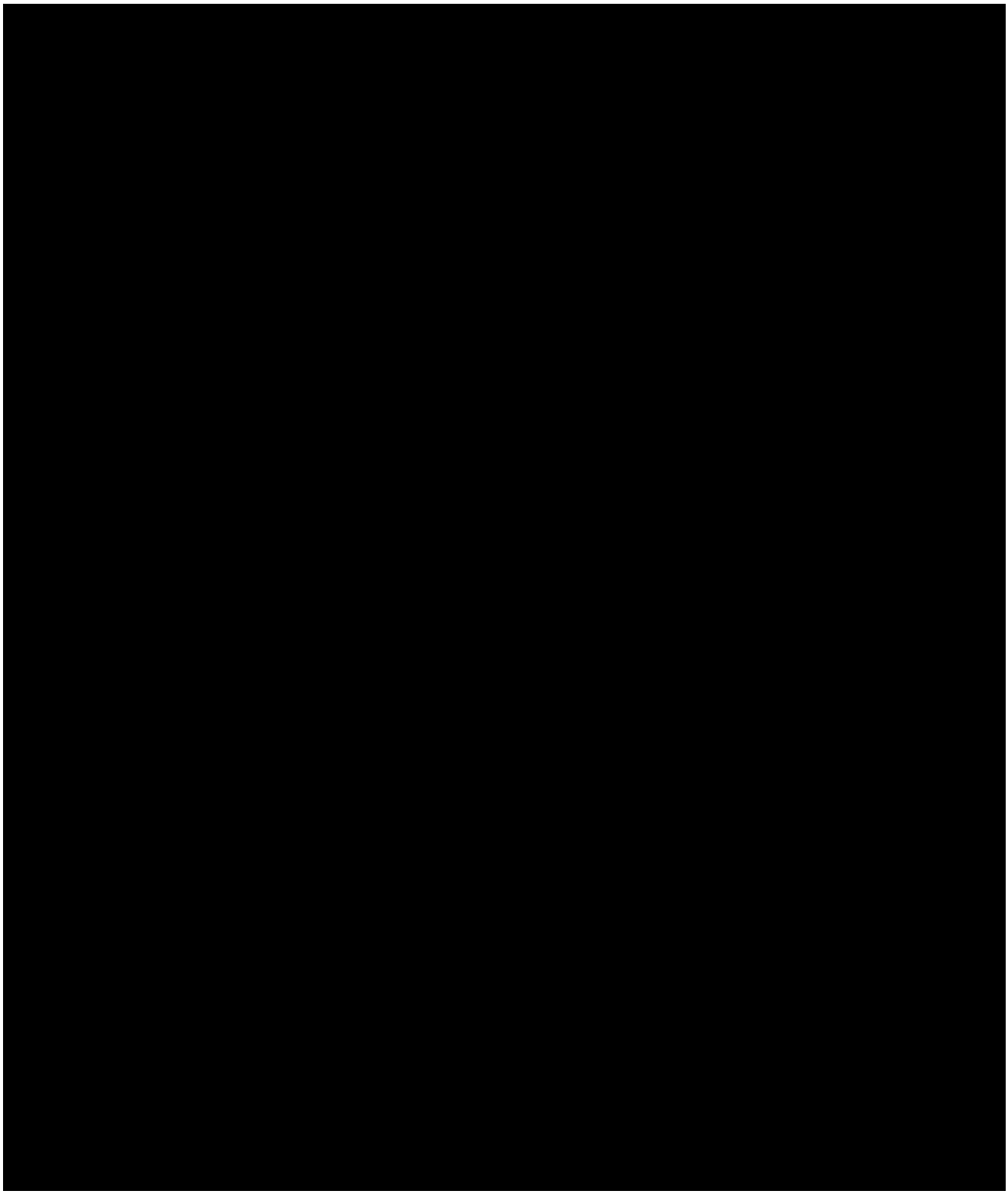
La geometría en nuestro mundo
Arquitectura: El rectángulo áureo 516

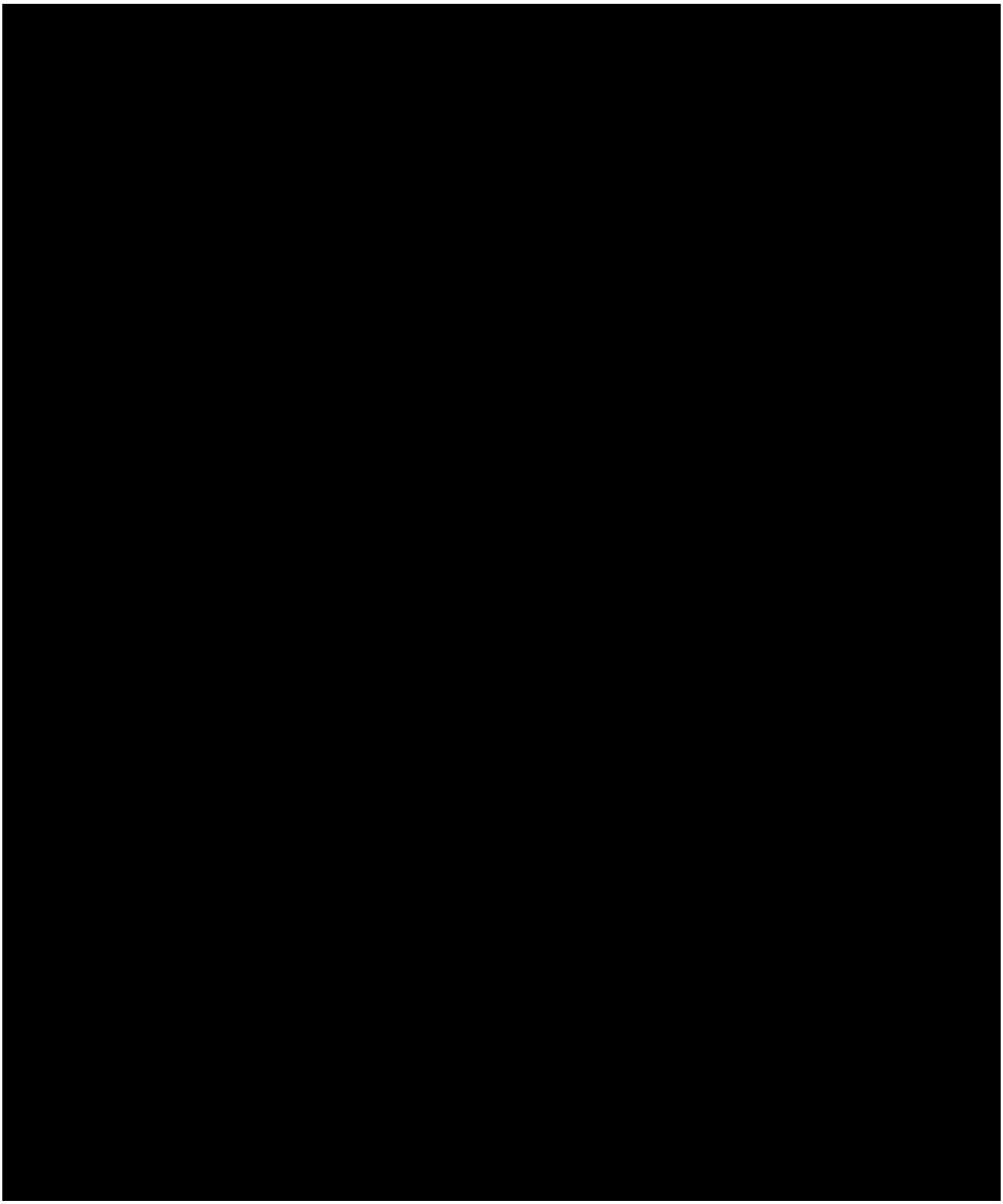


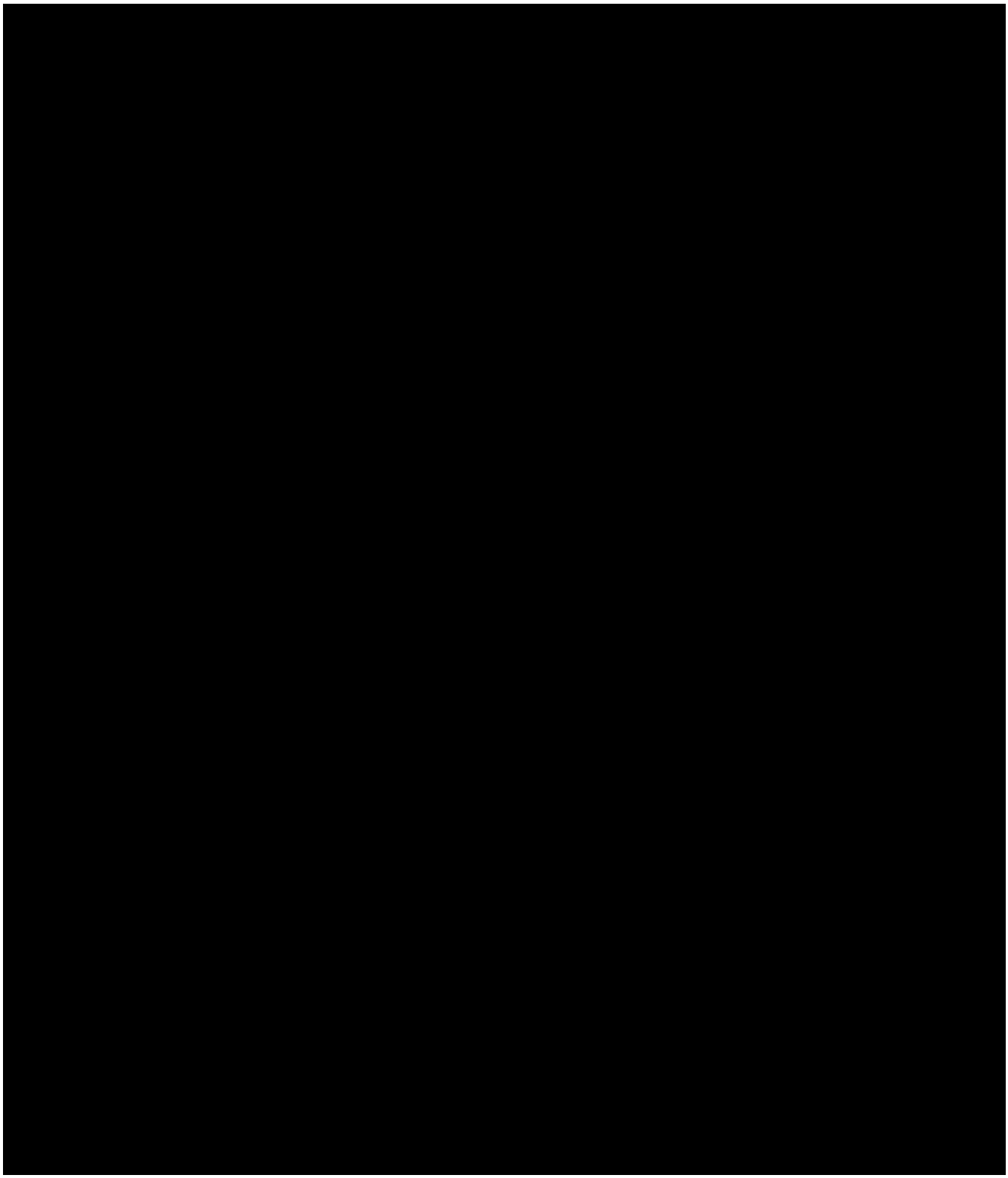


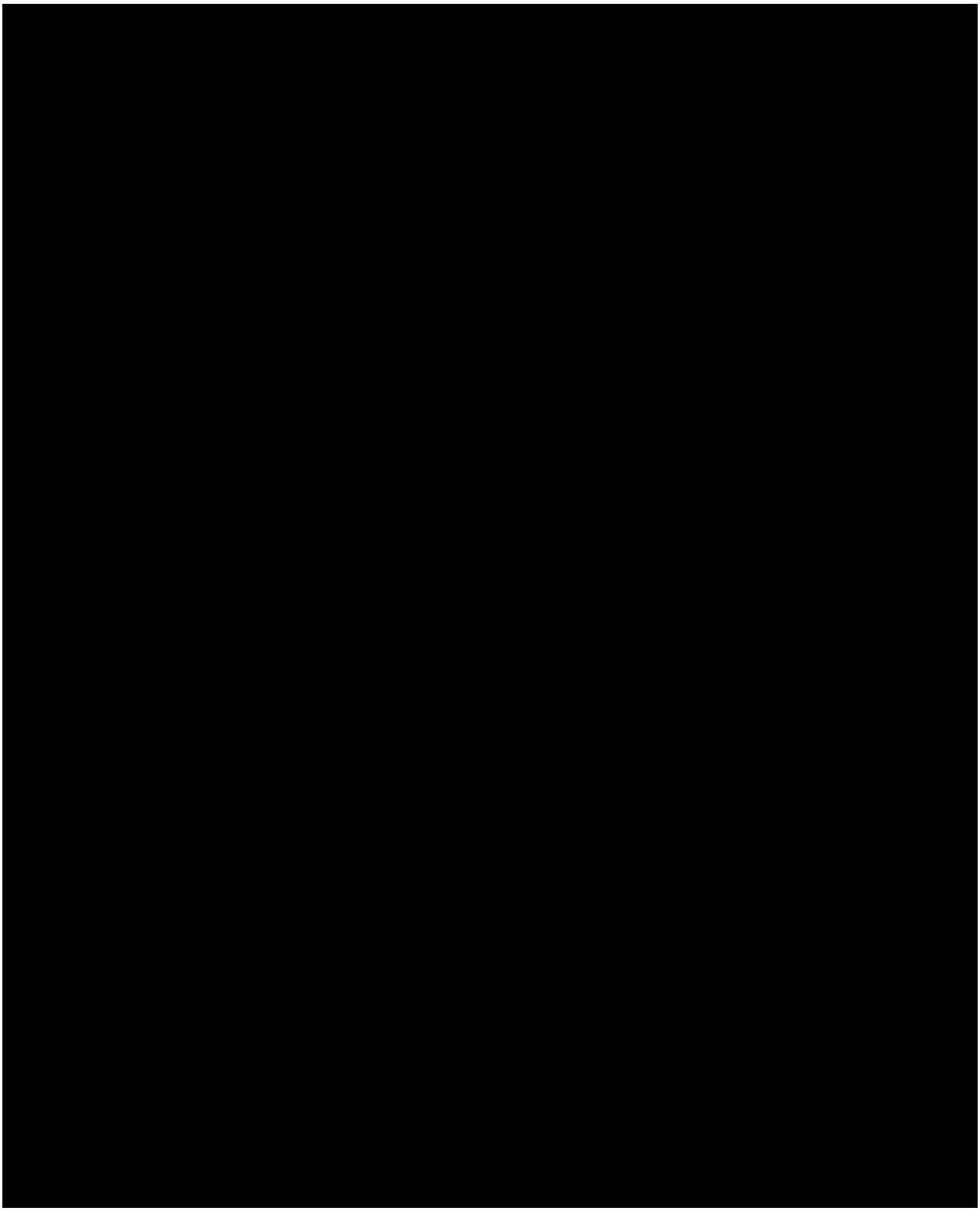


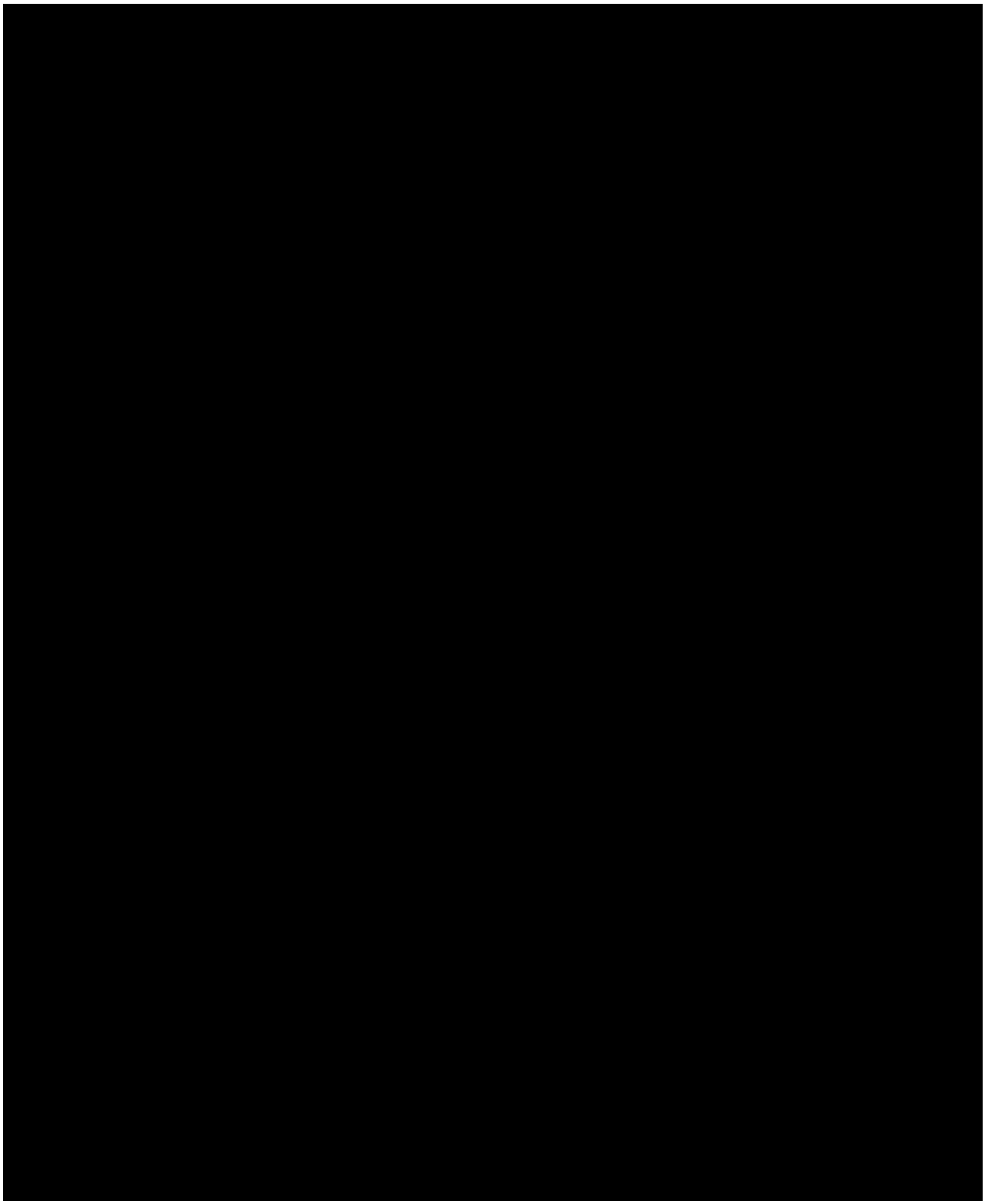


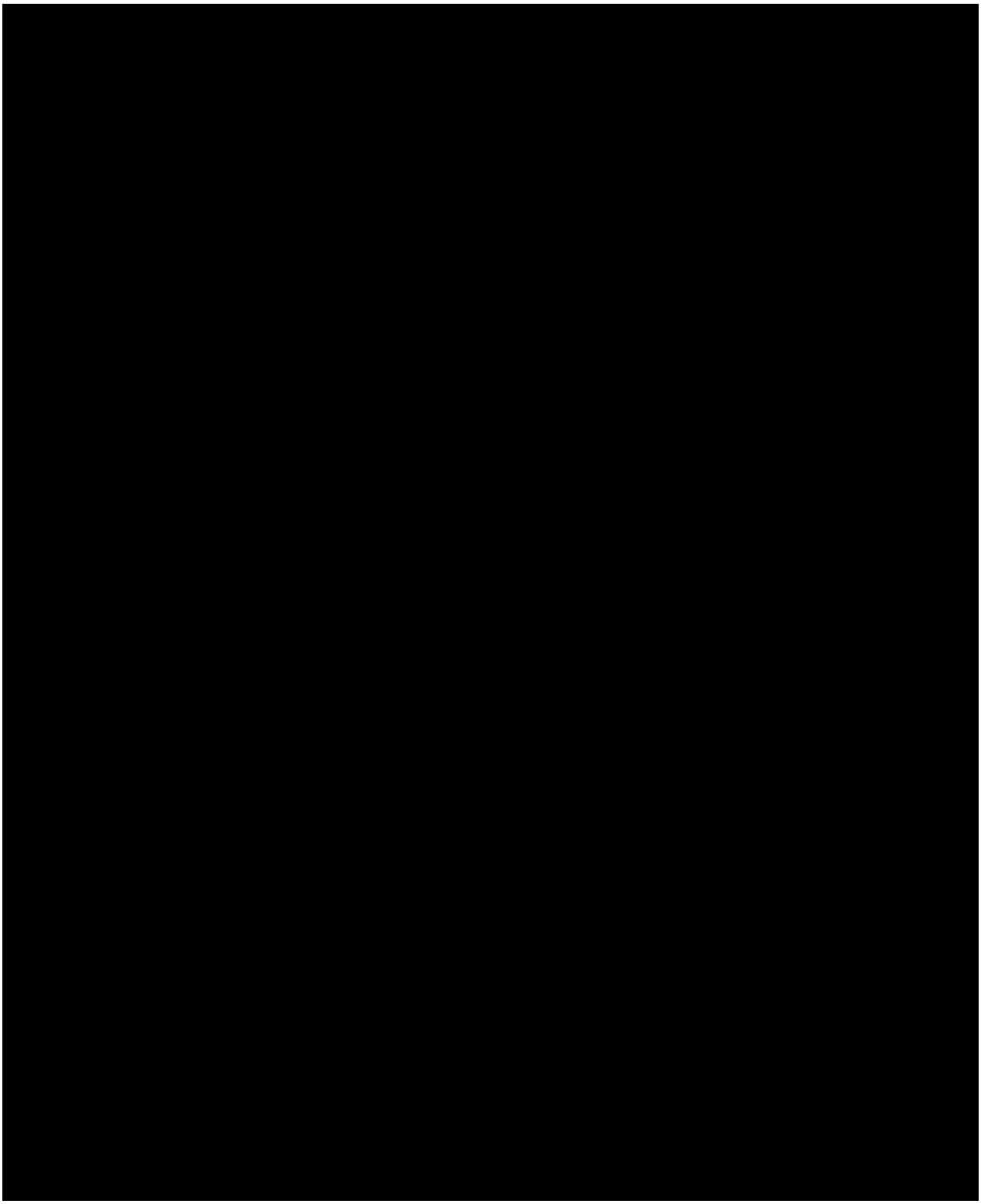


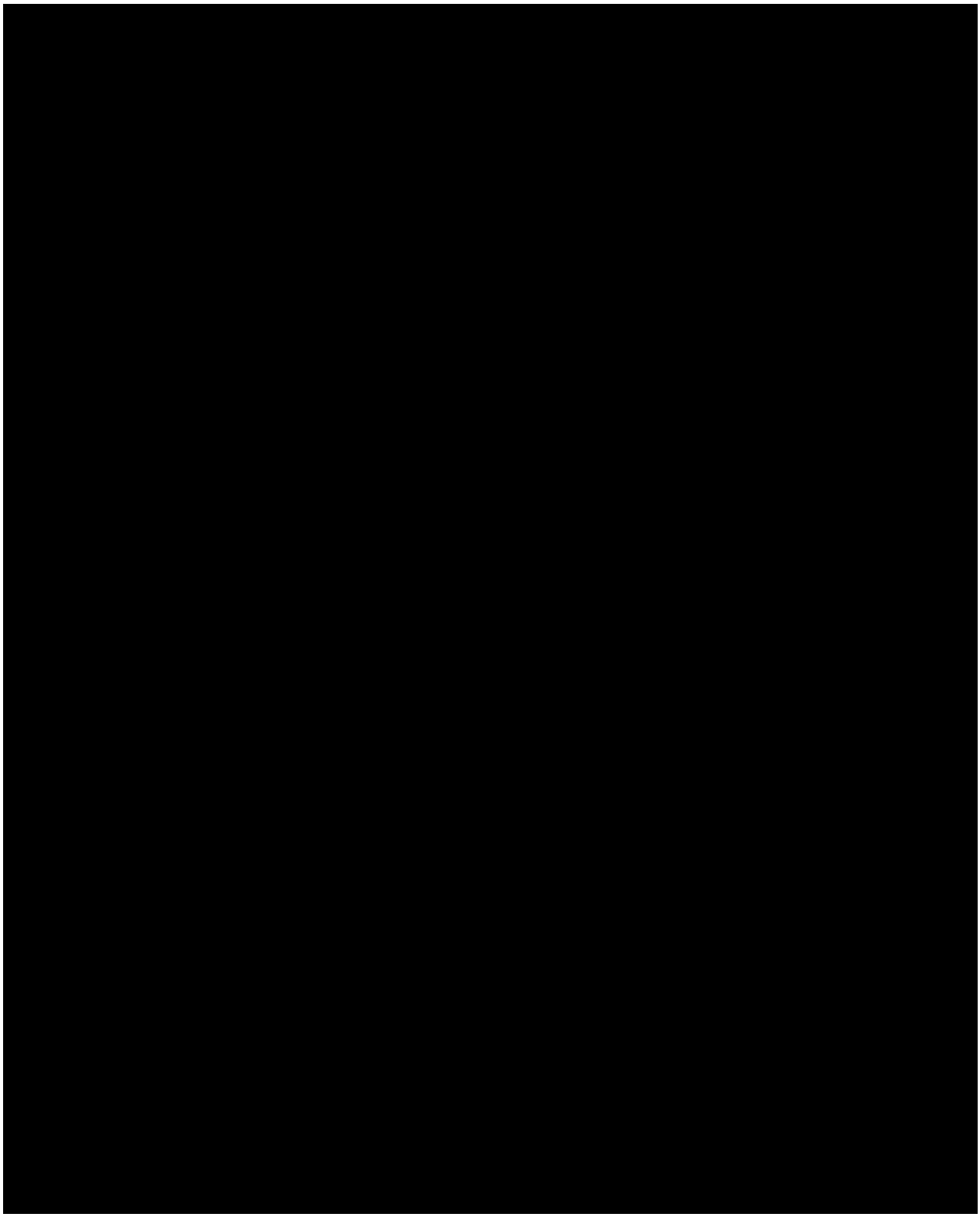


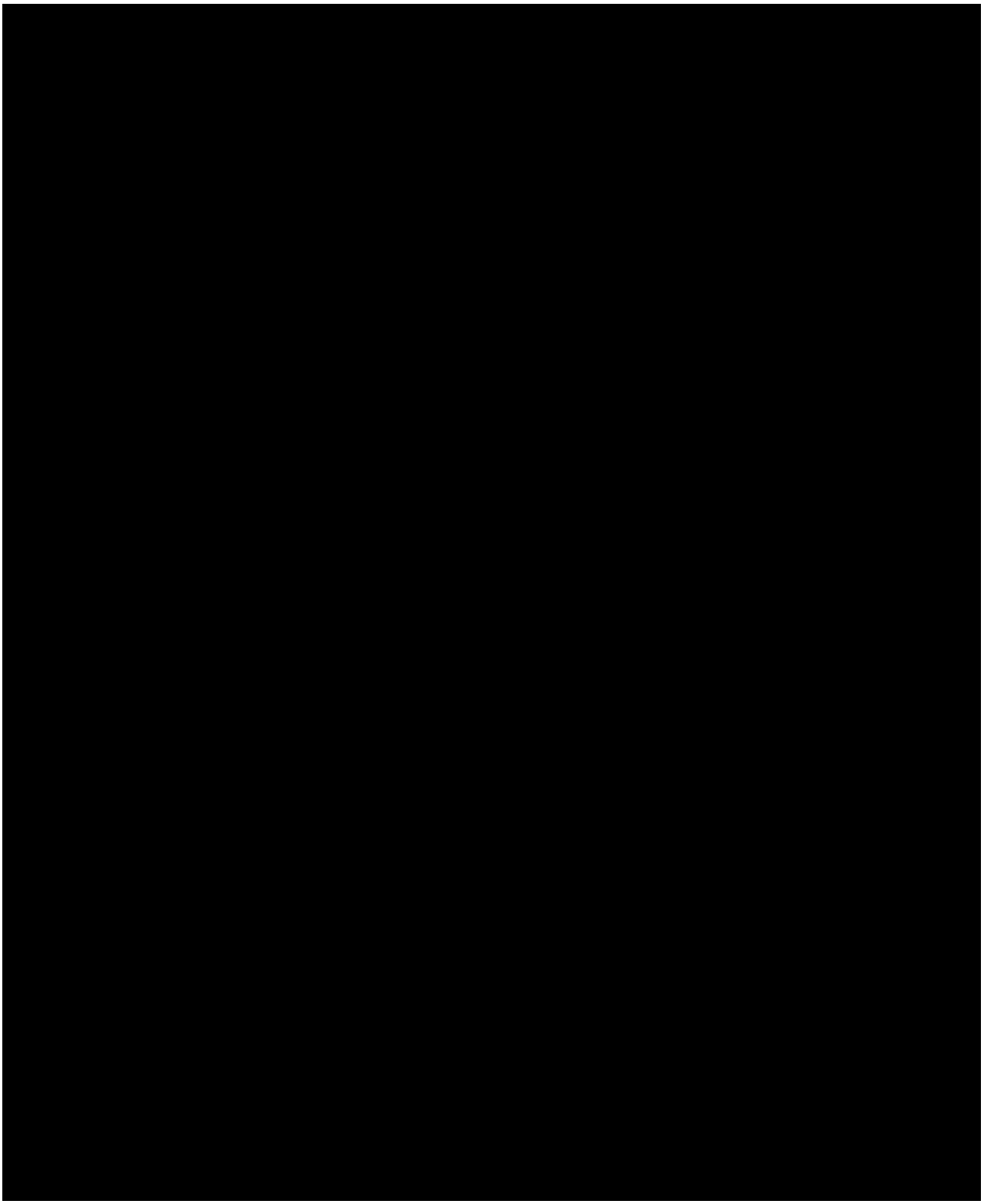


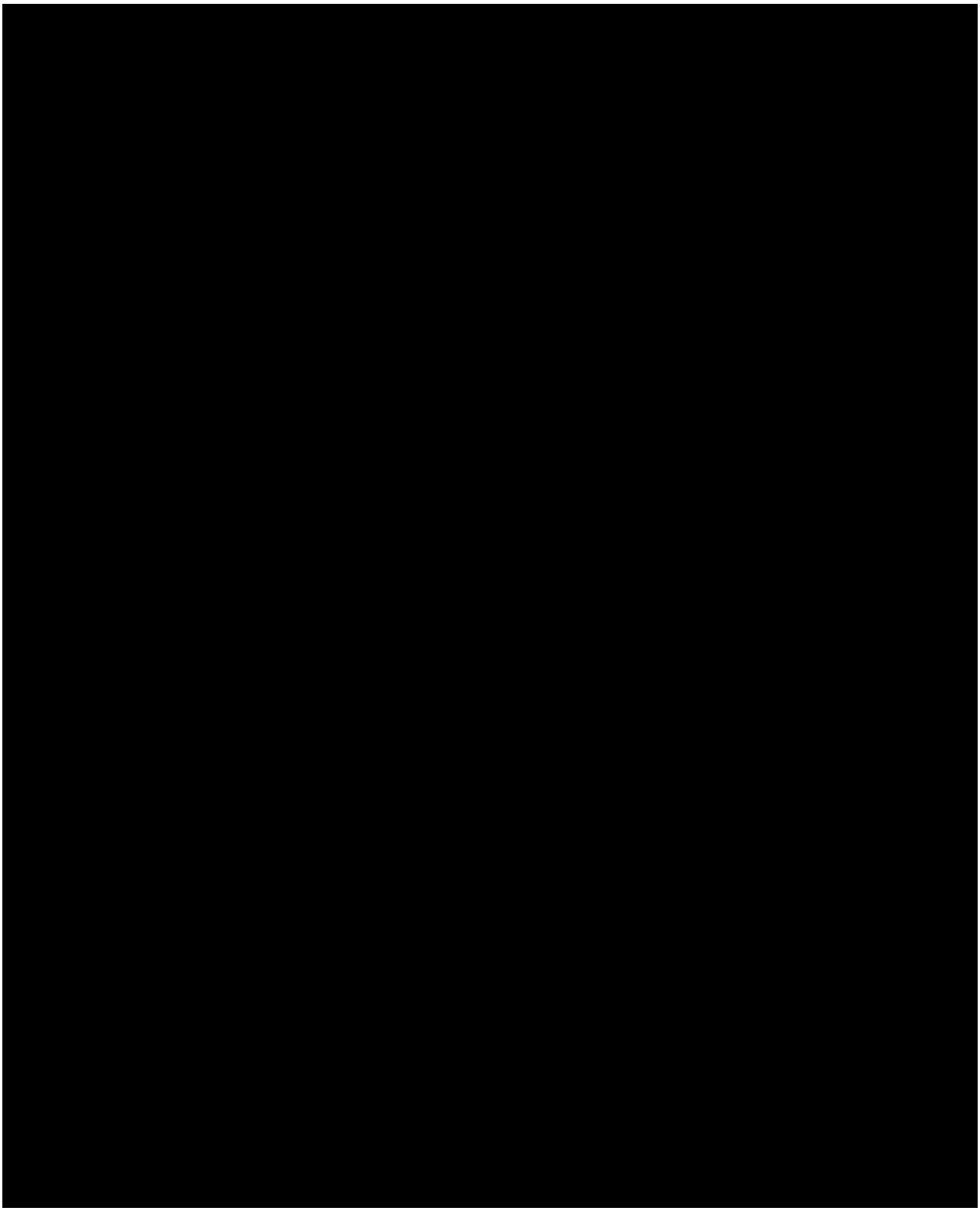


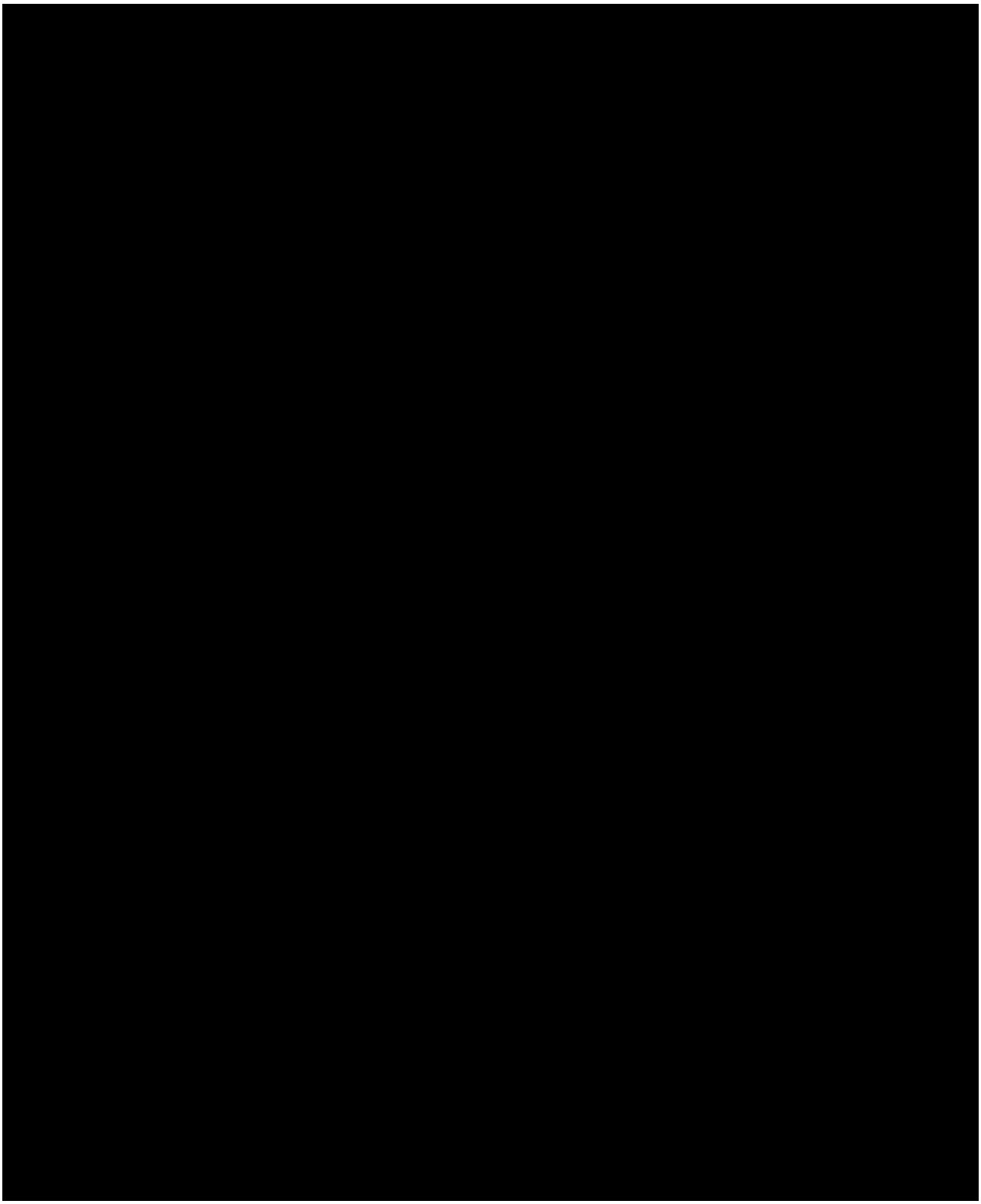


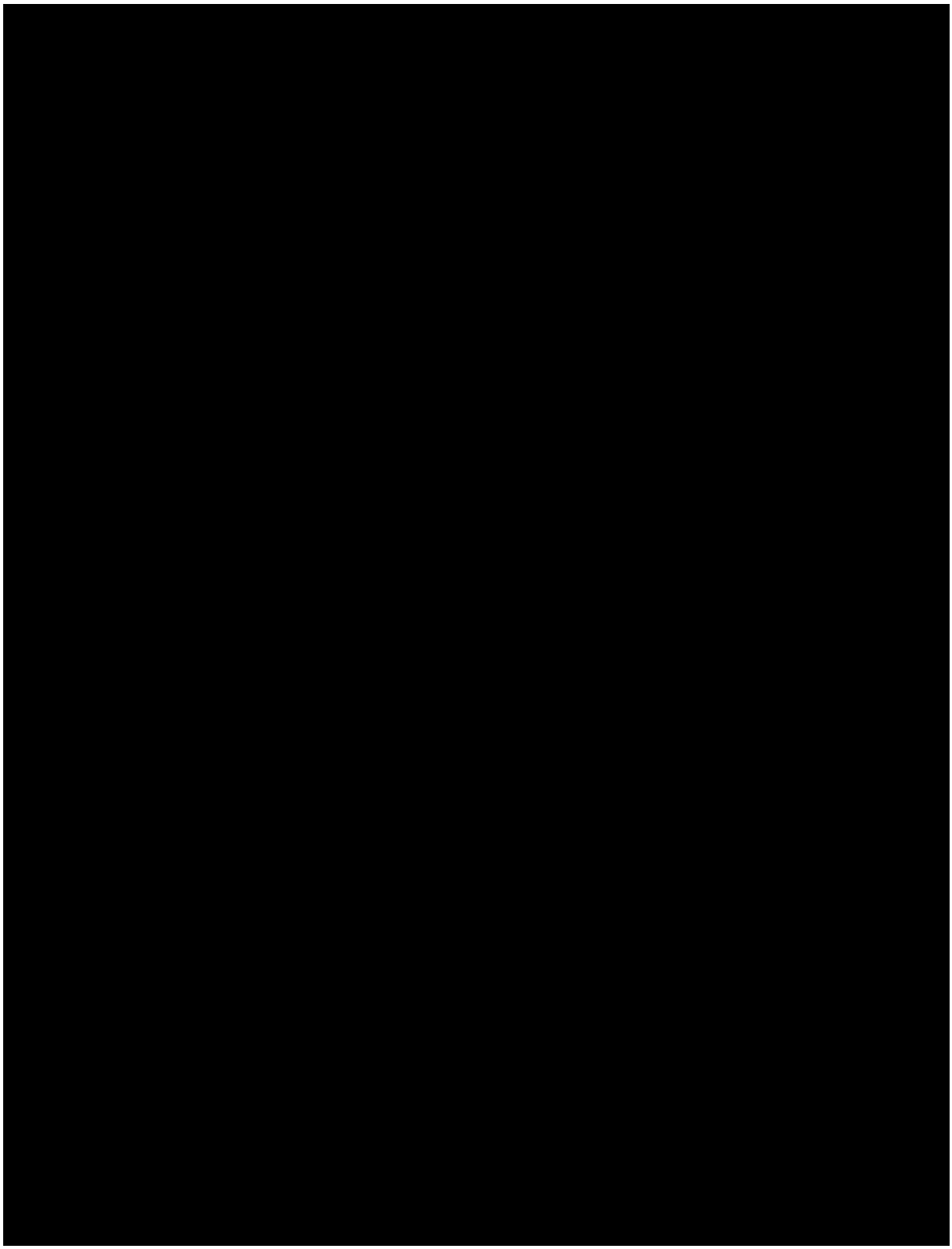


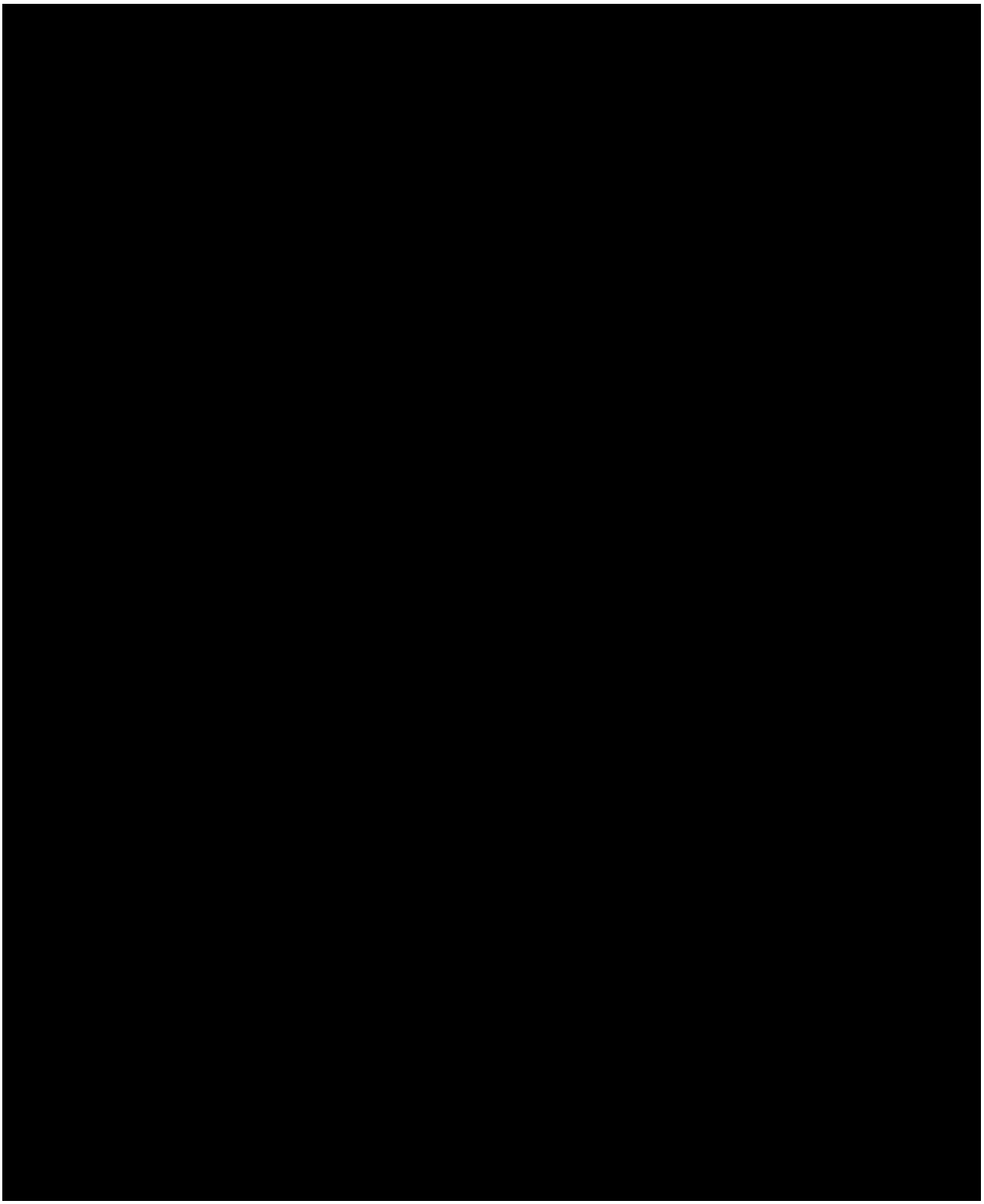


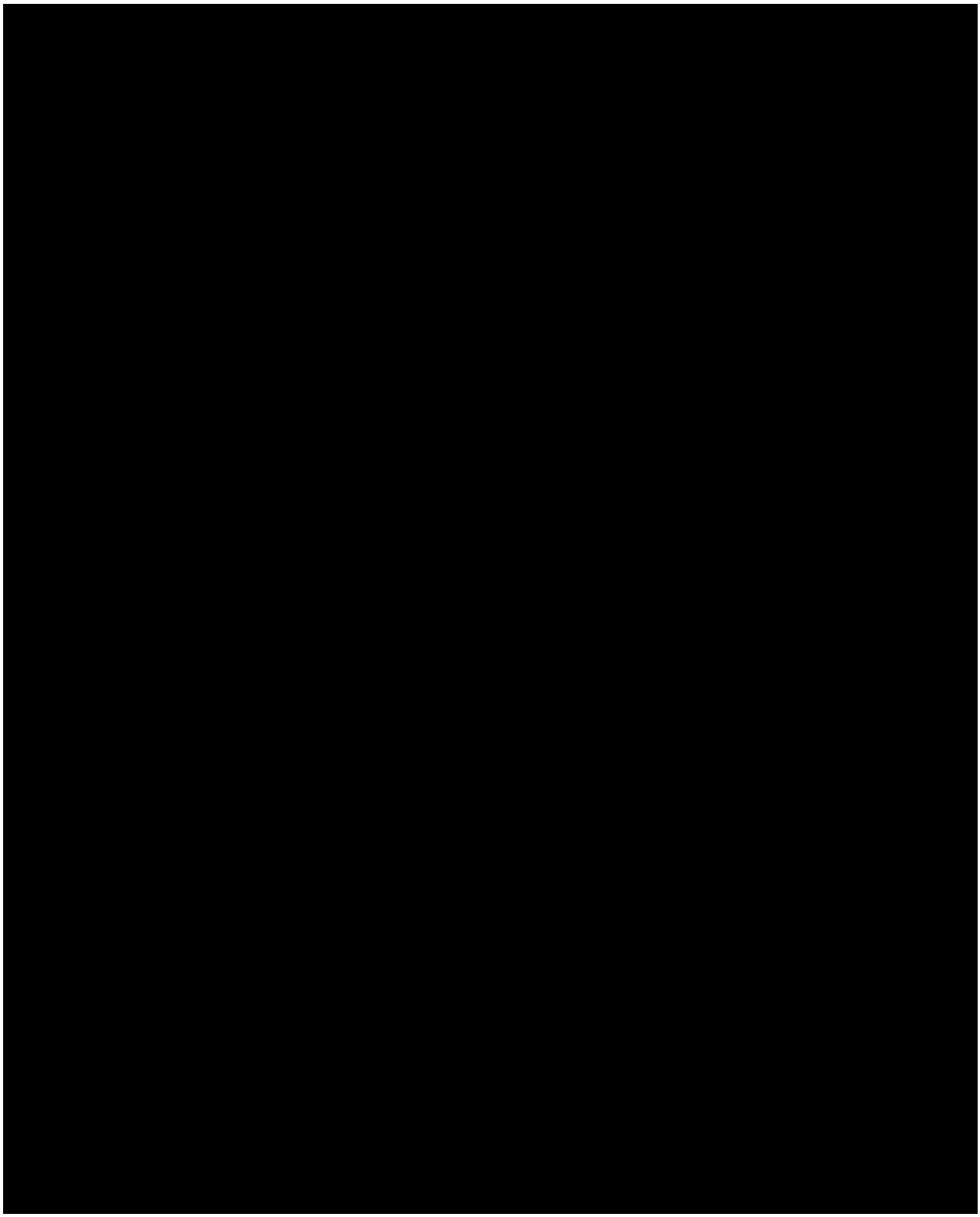


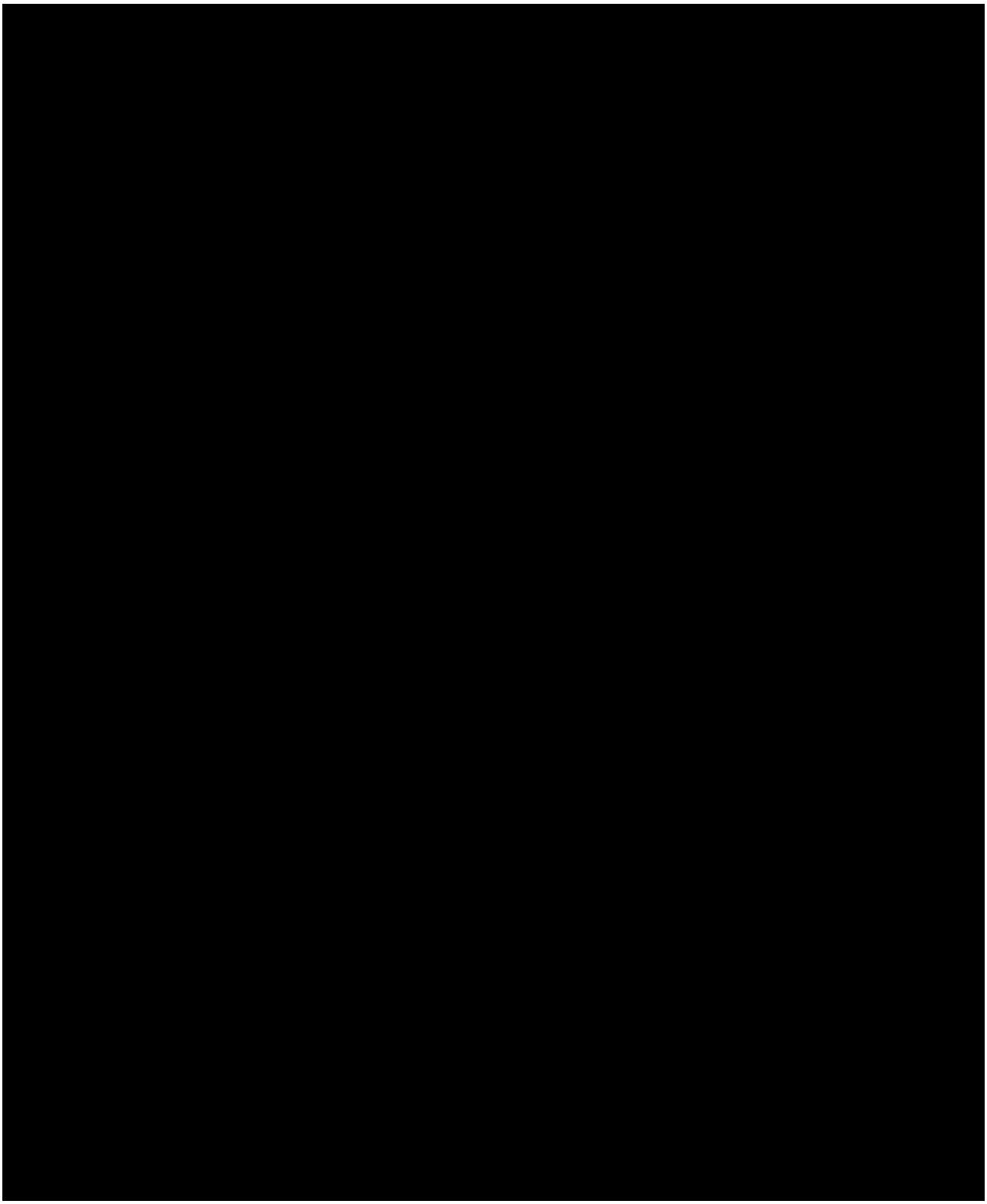


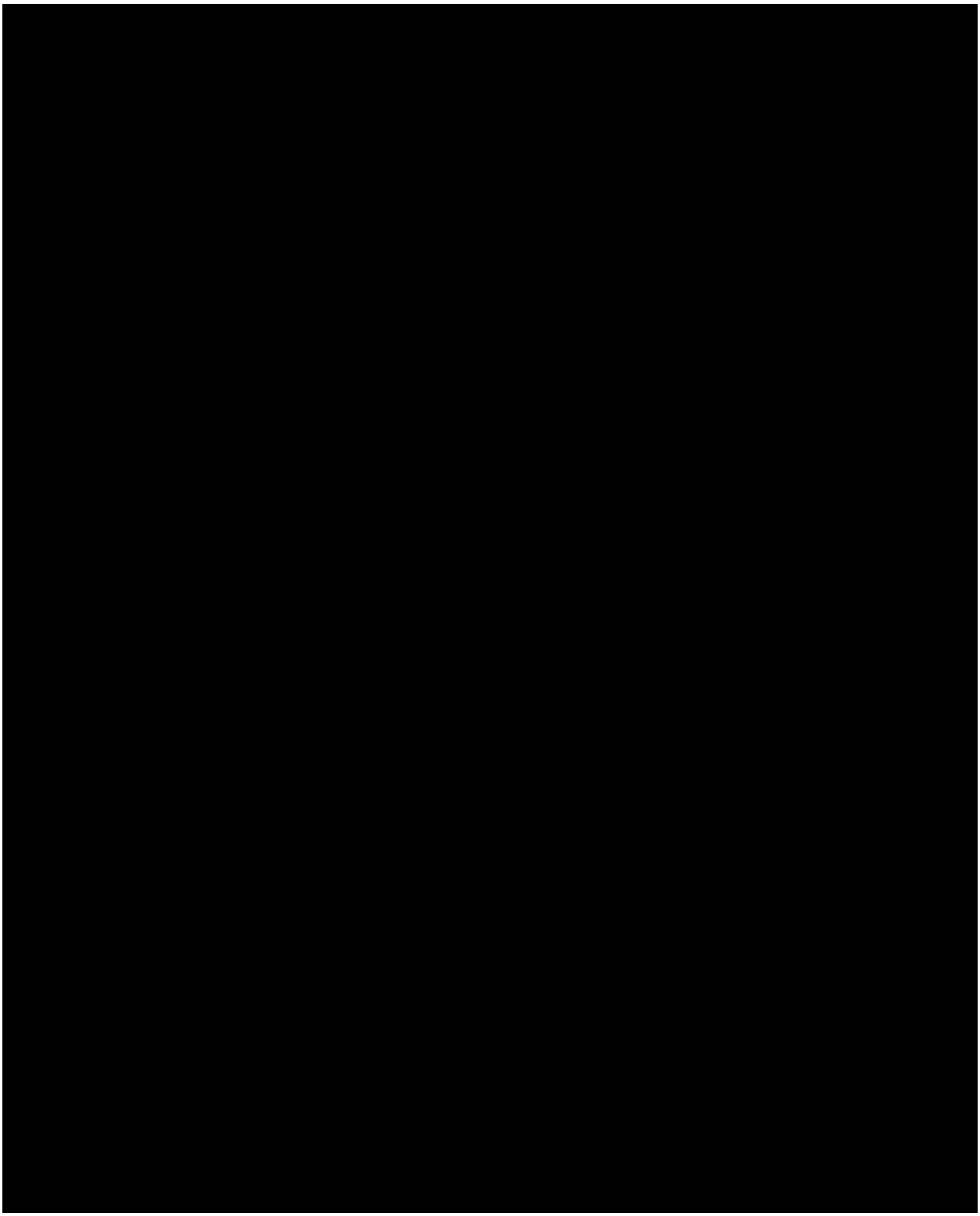


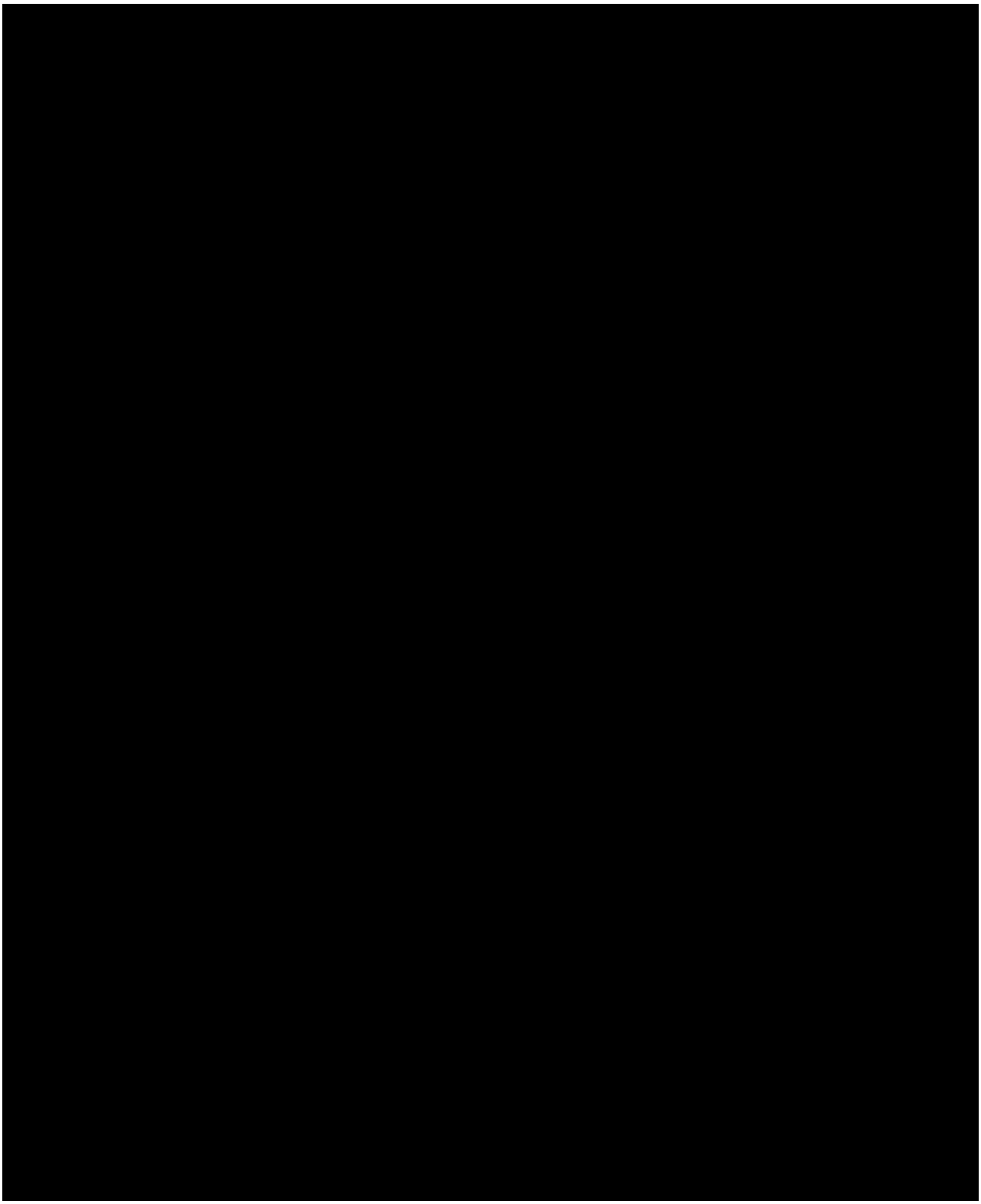


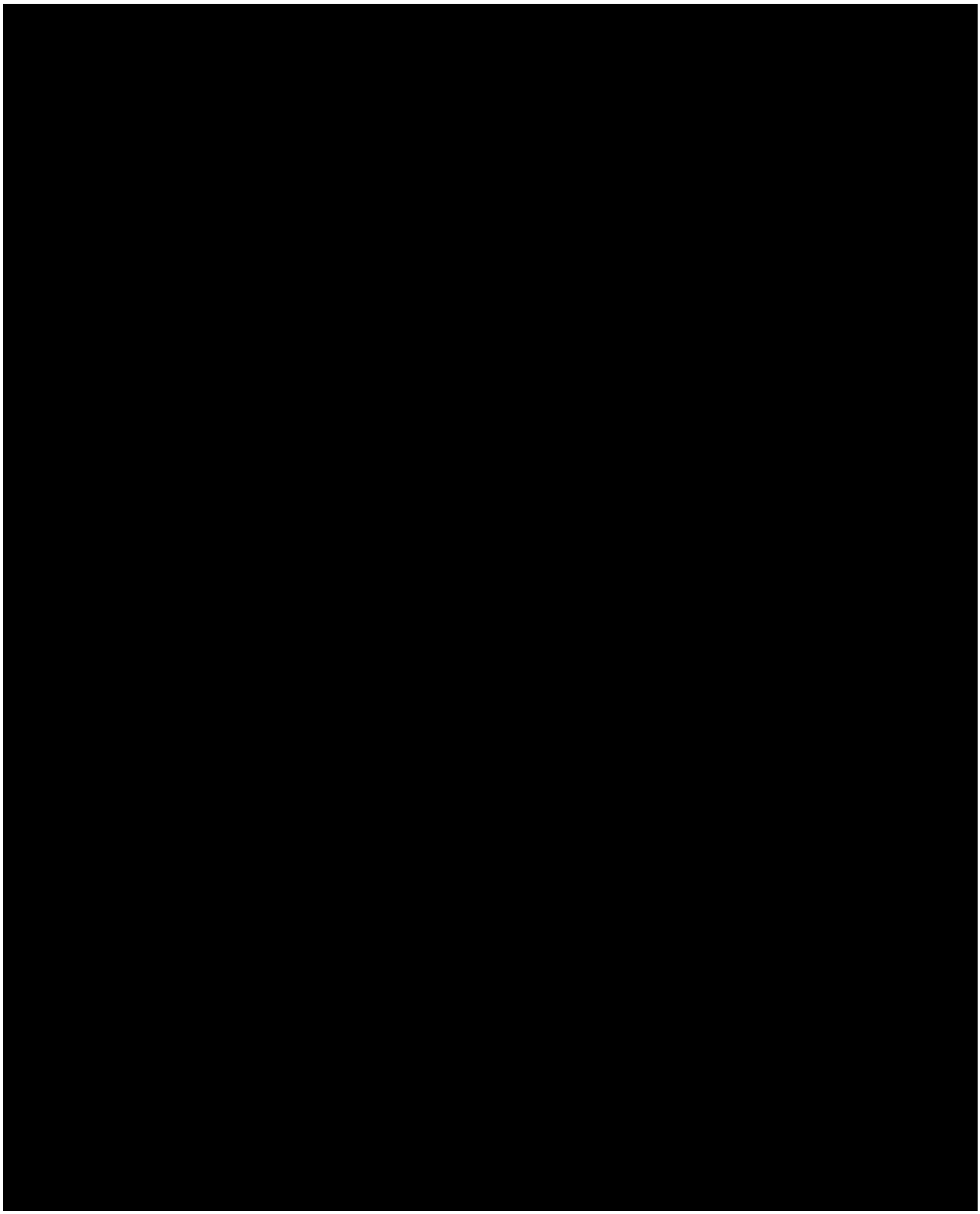


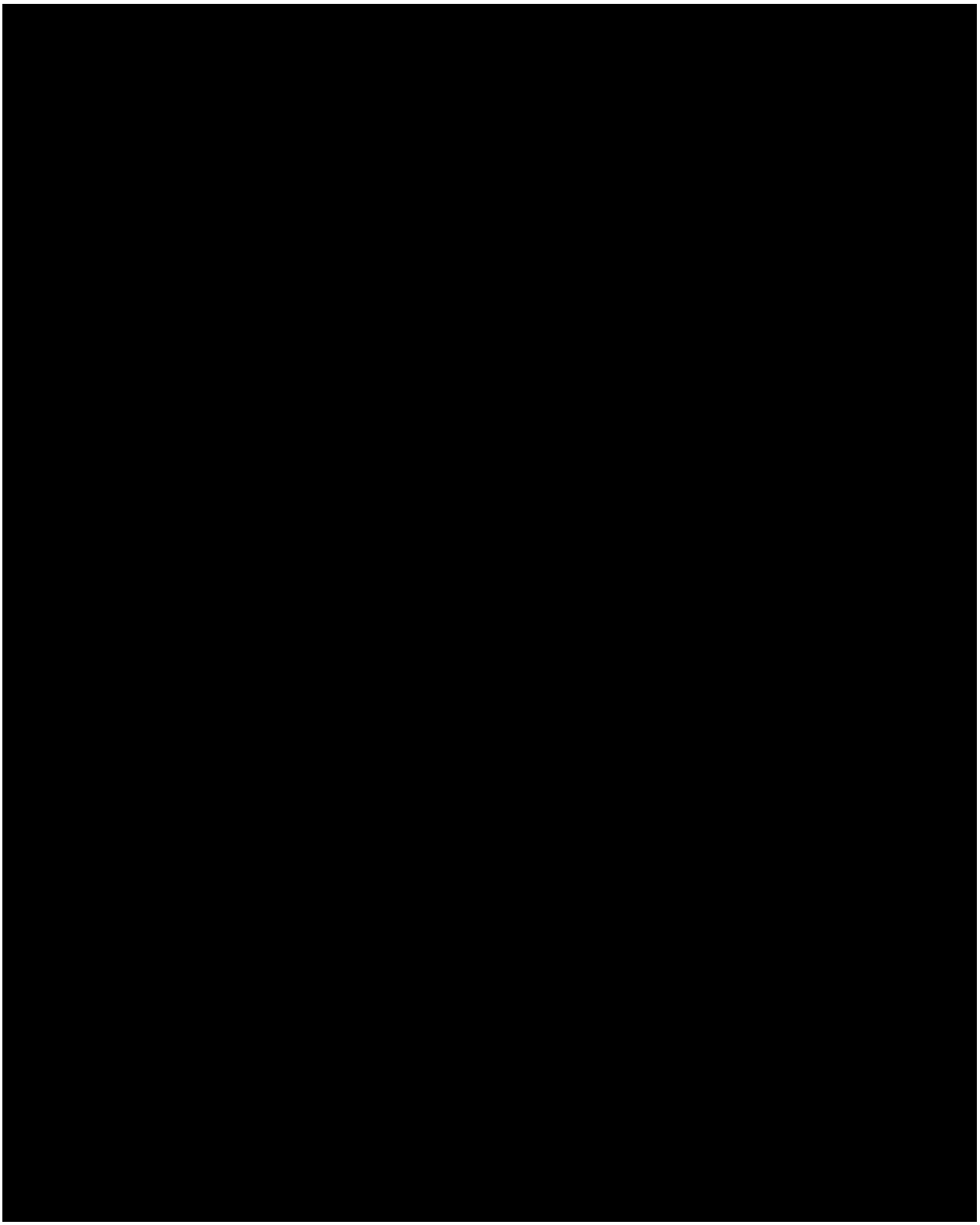


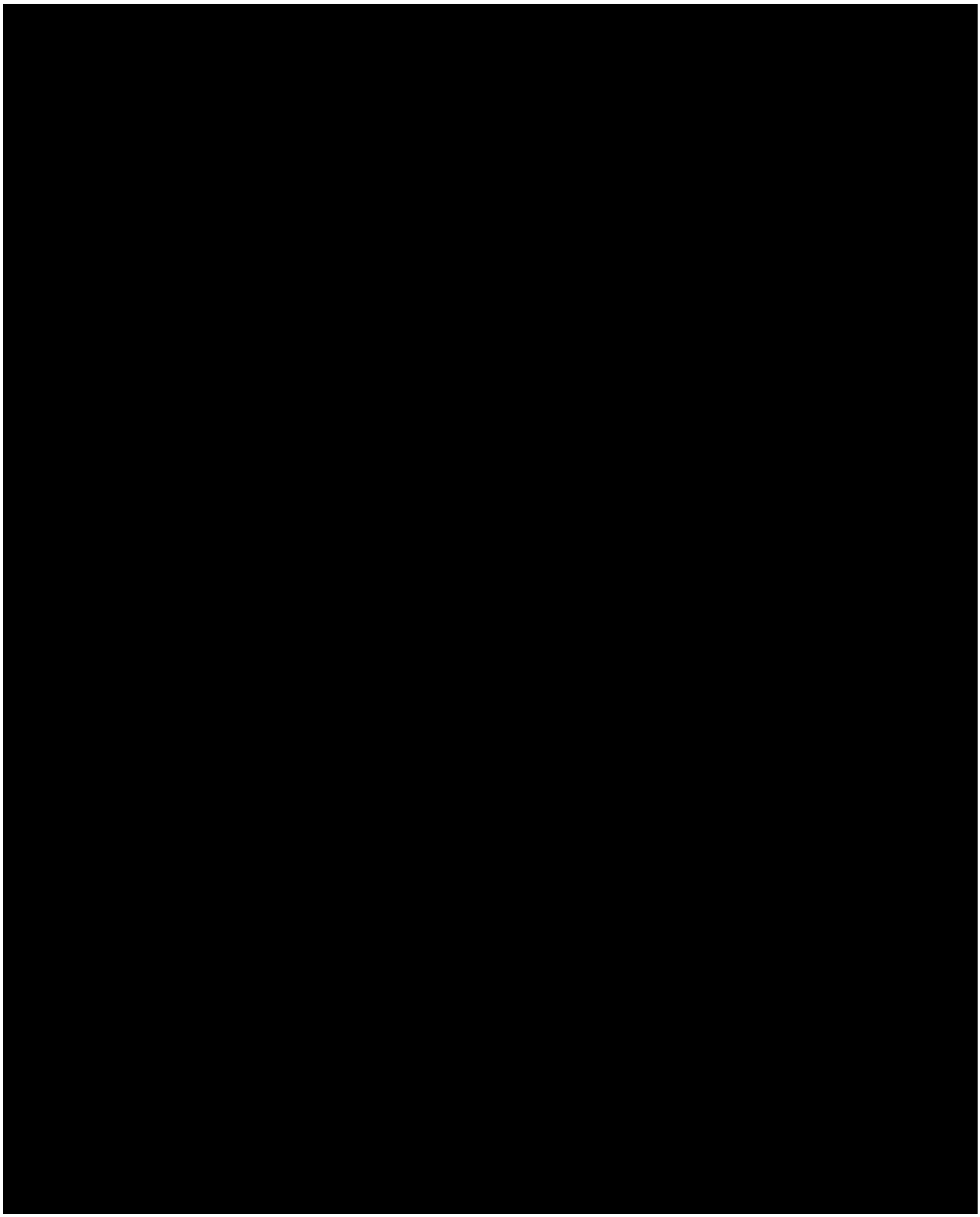


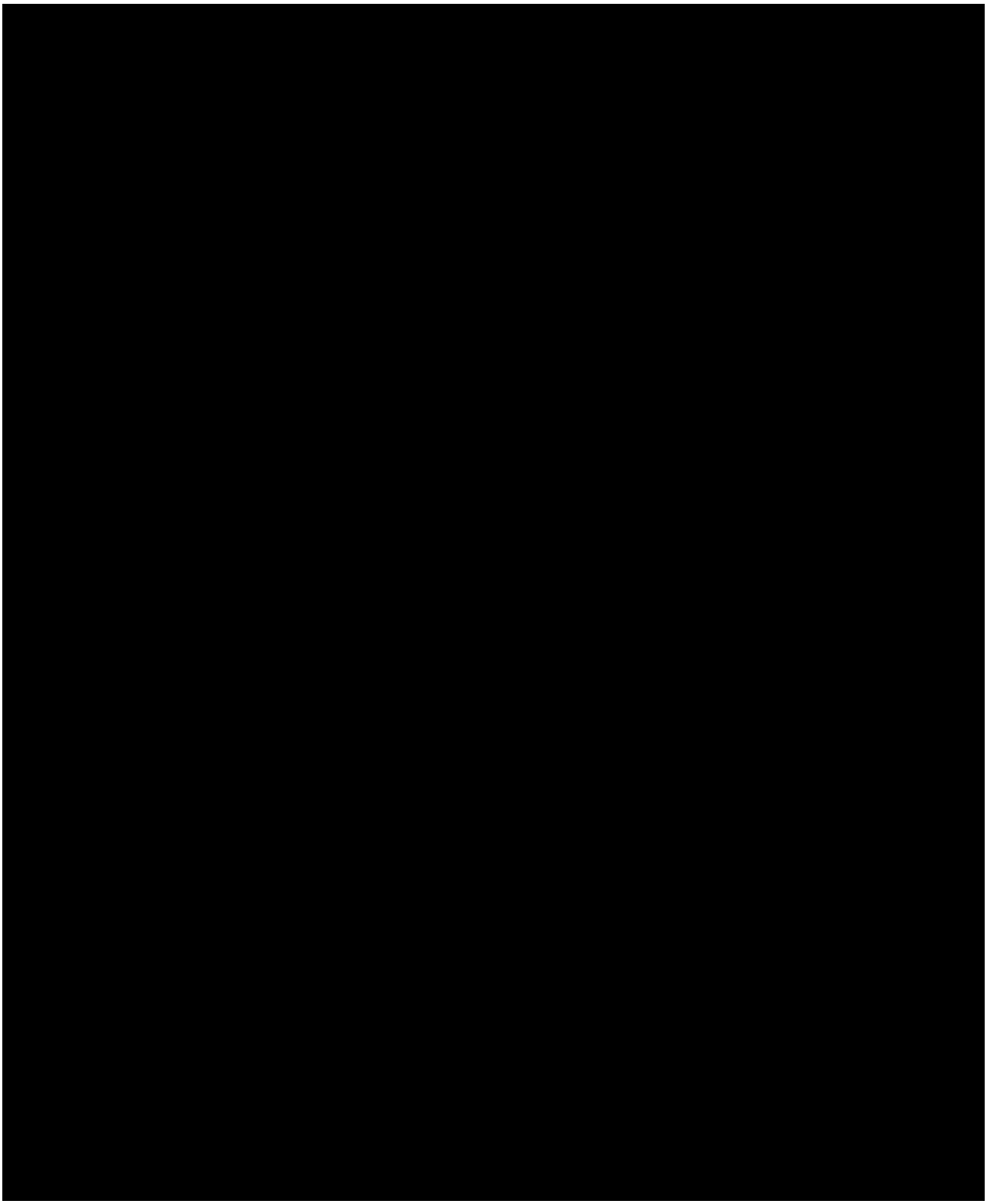


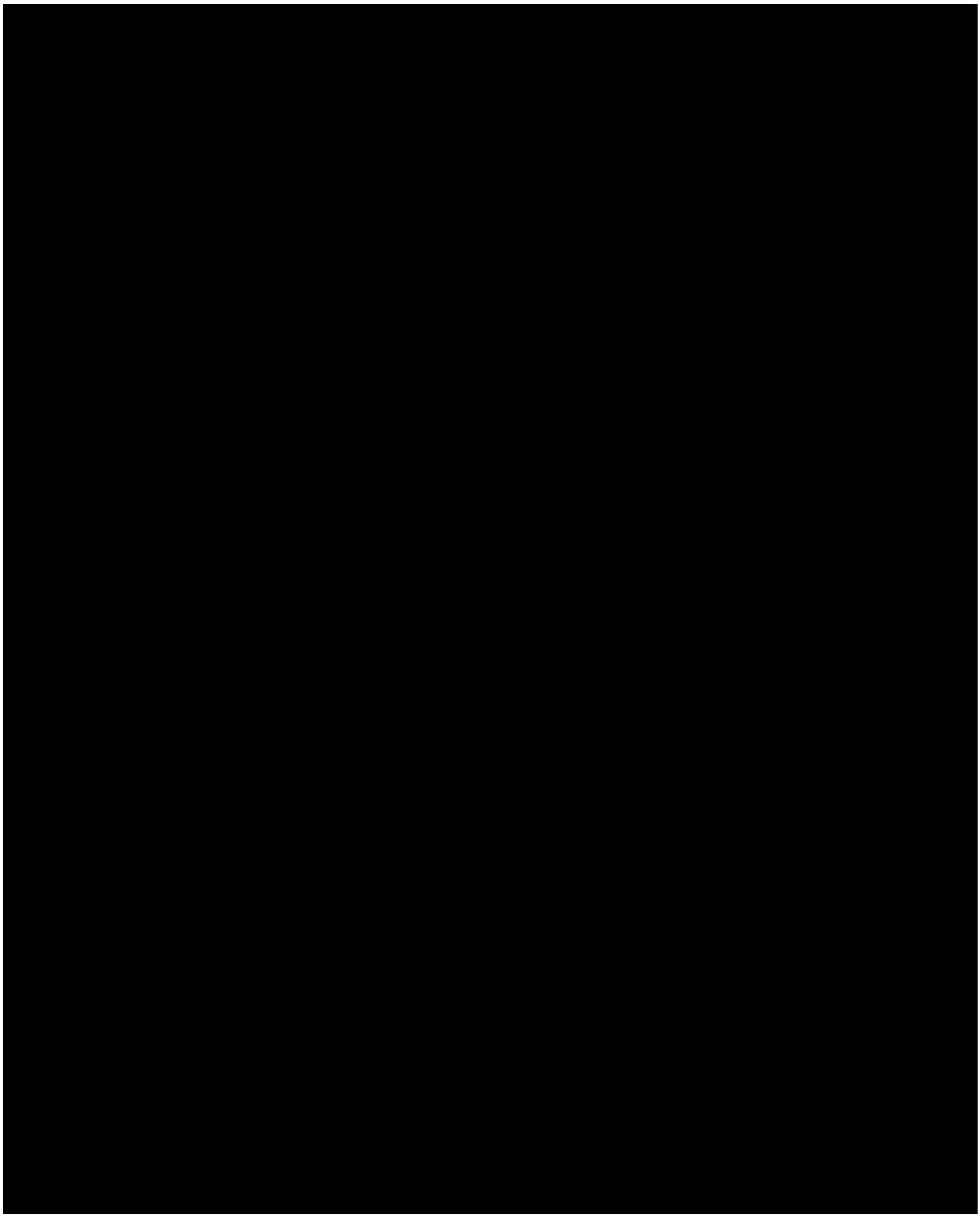


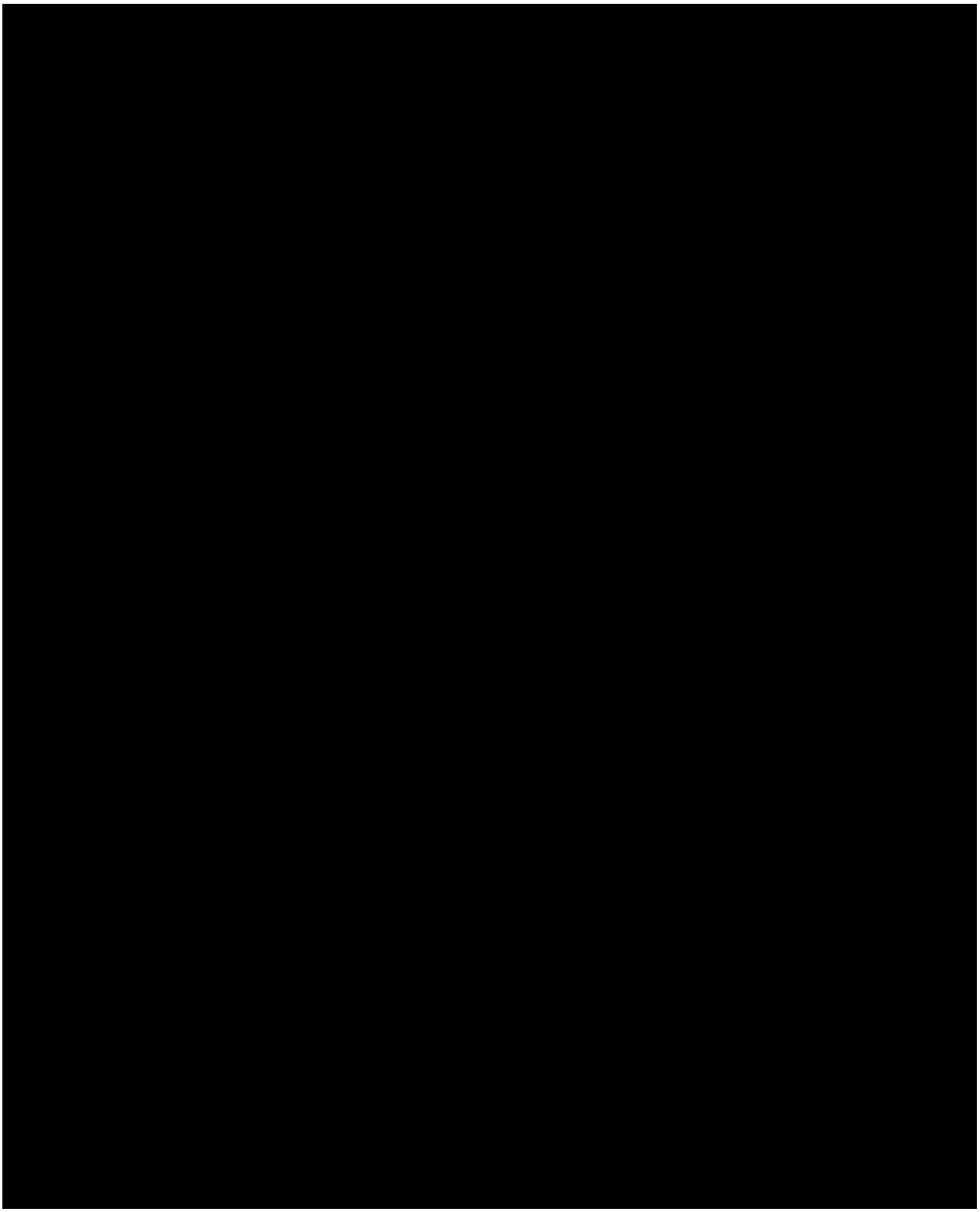


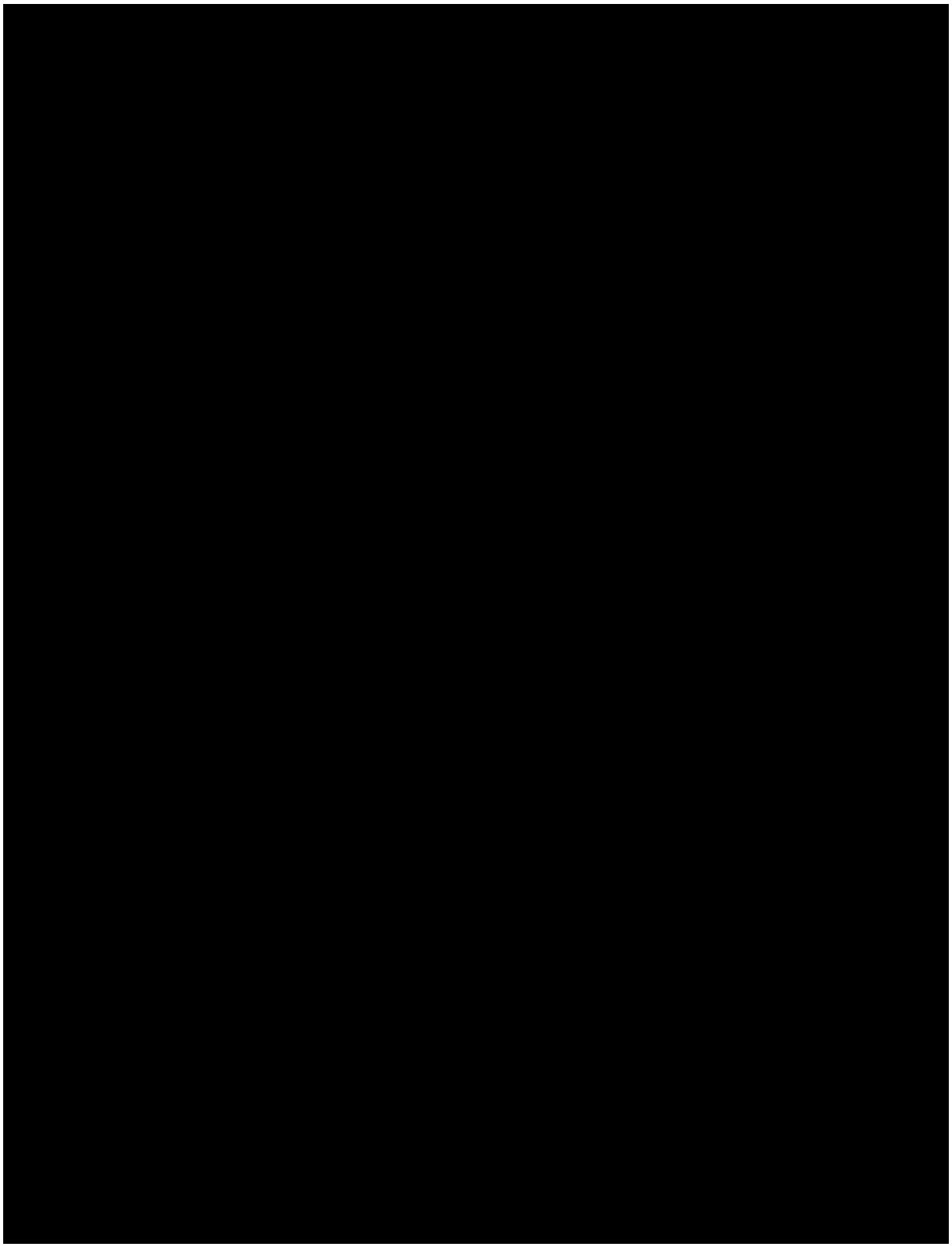


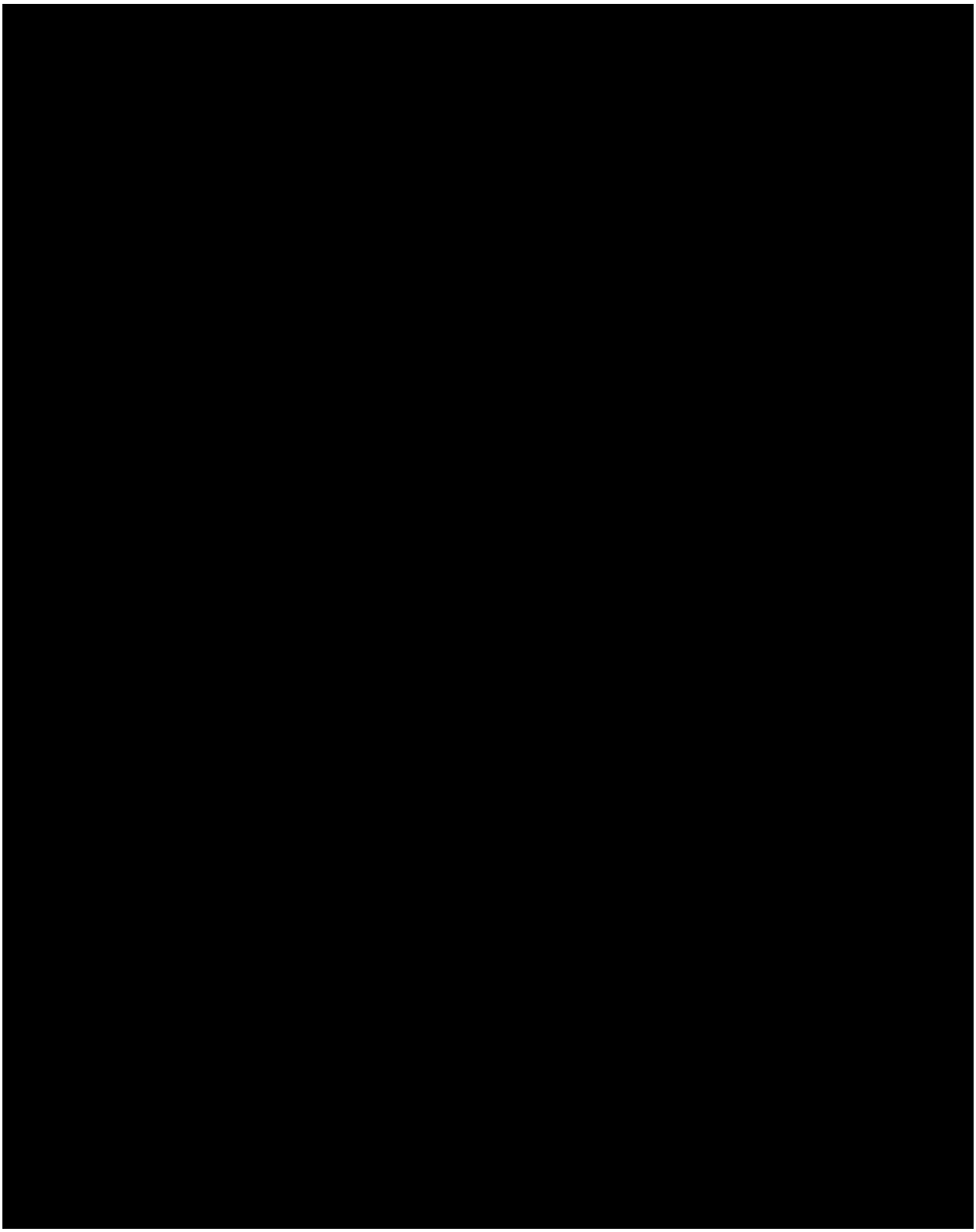


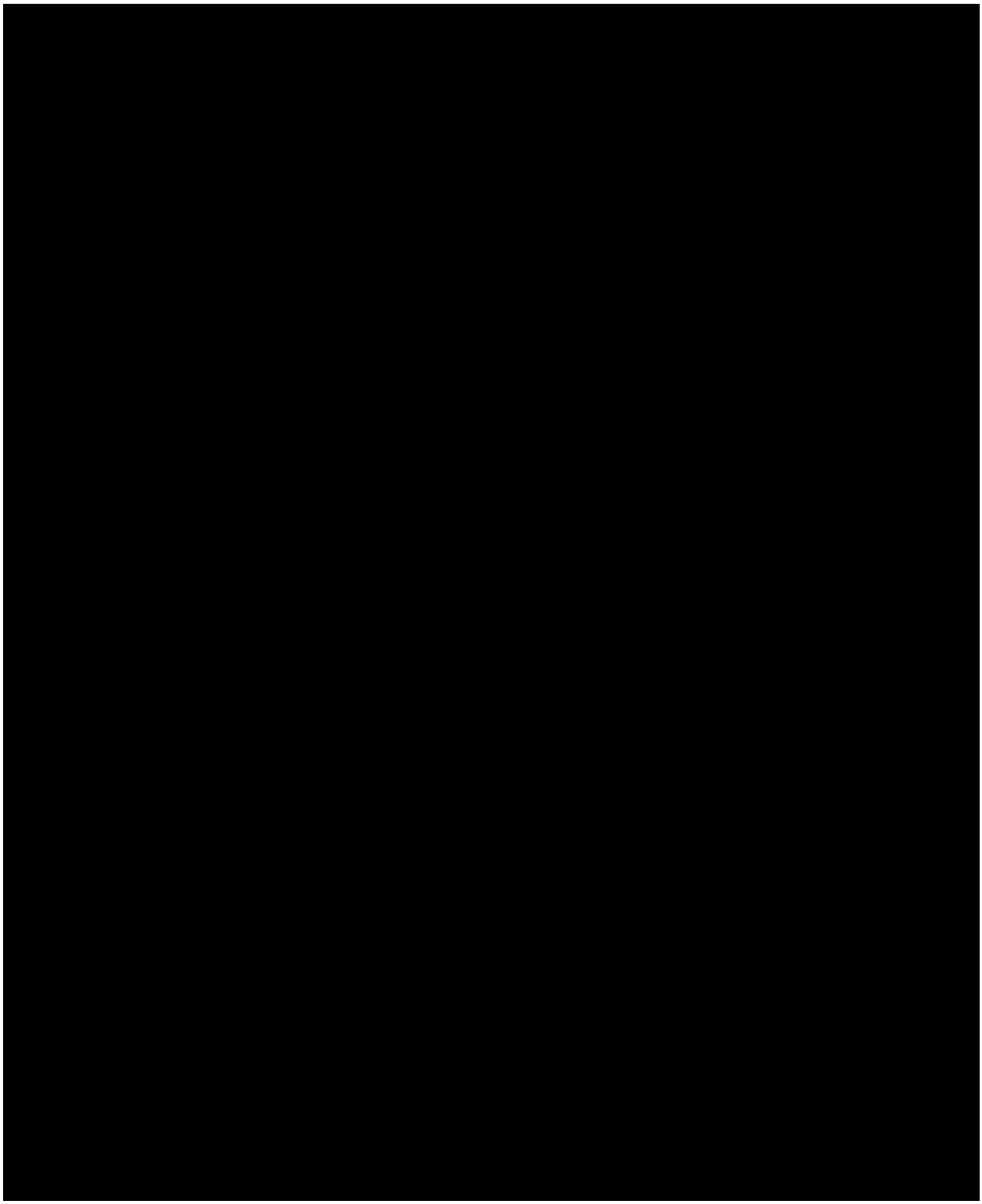


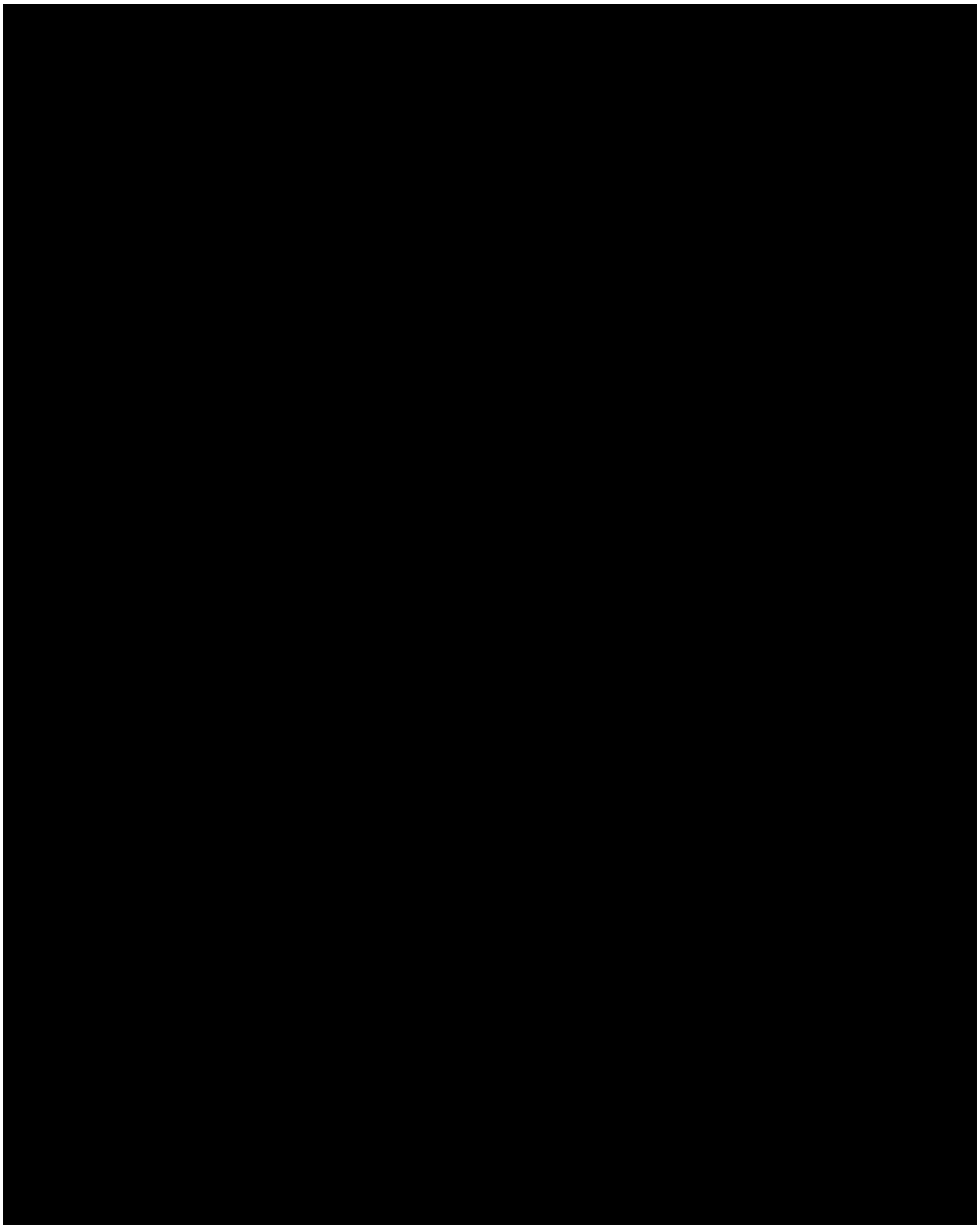


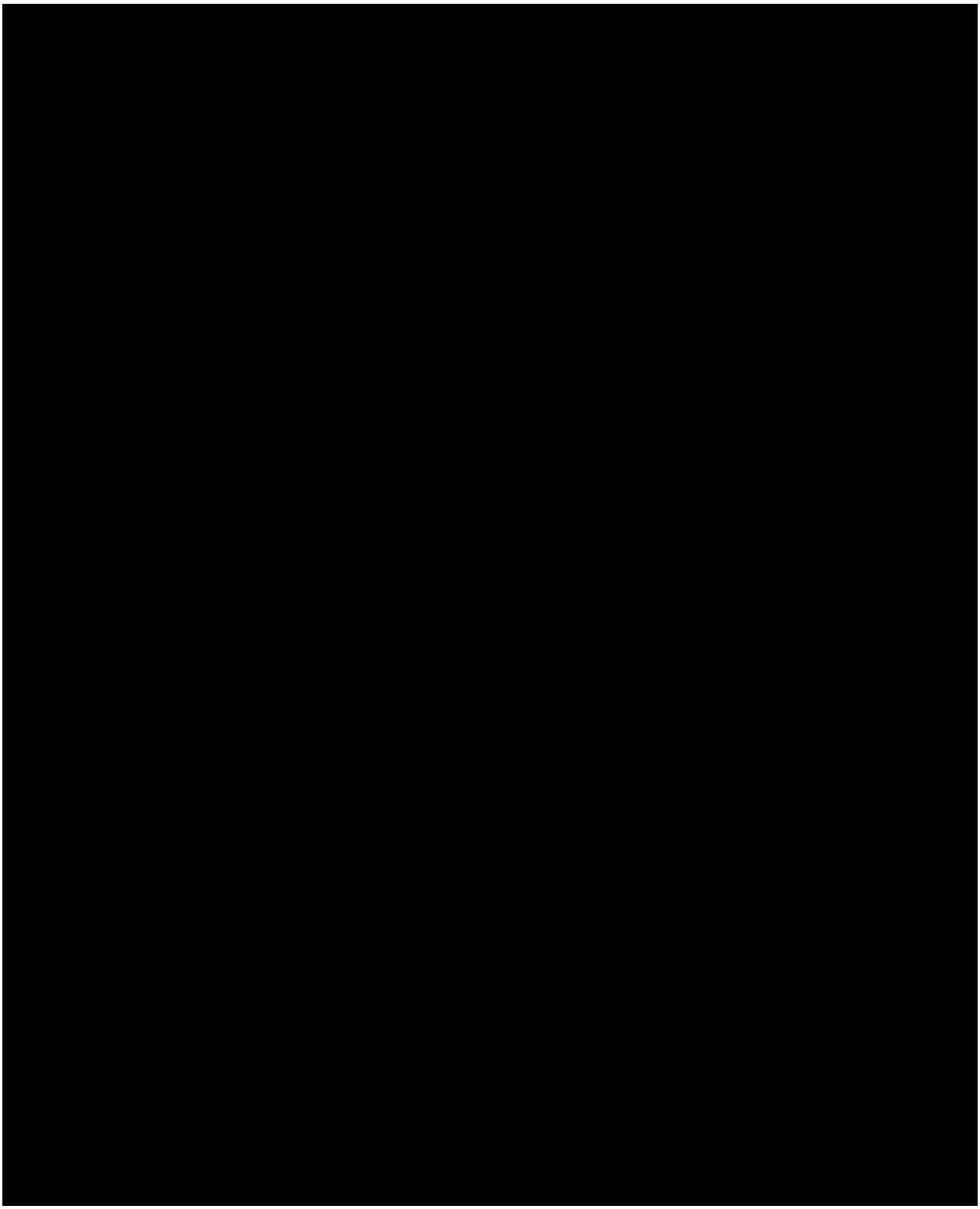


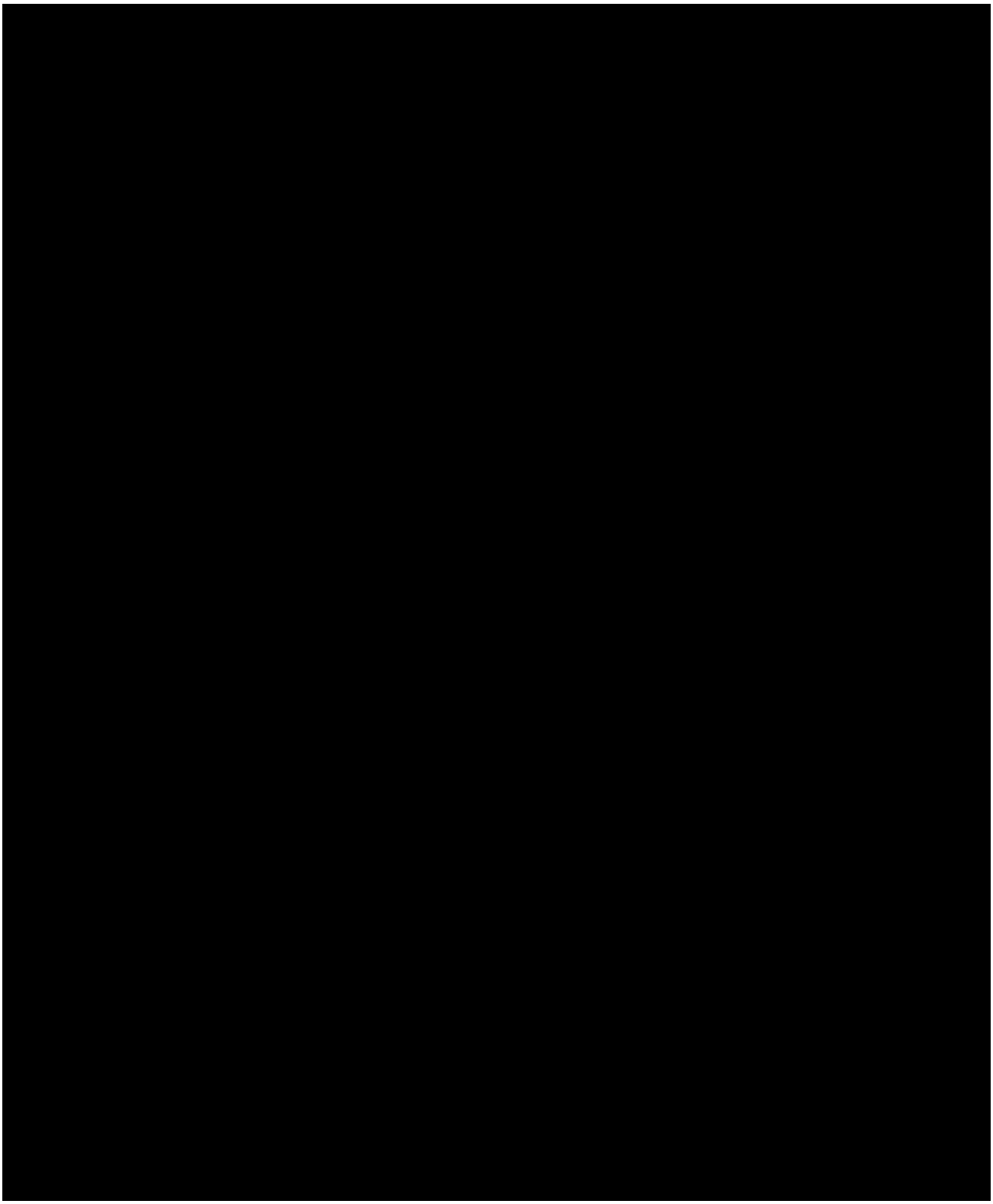


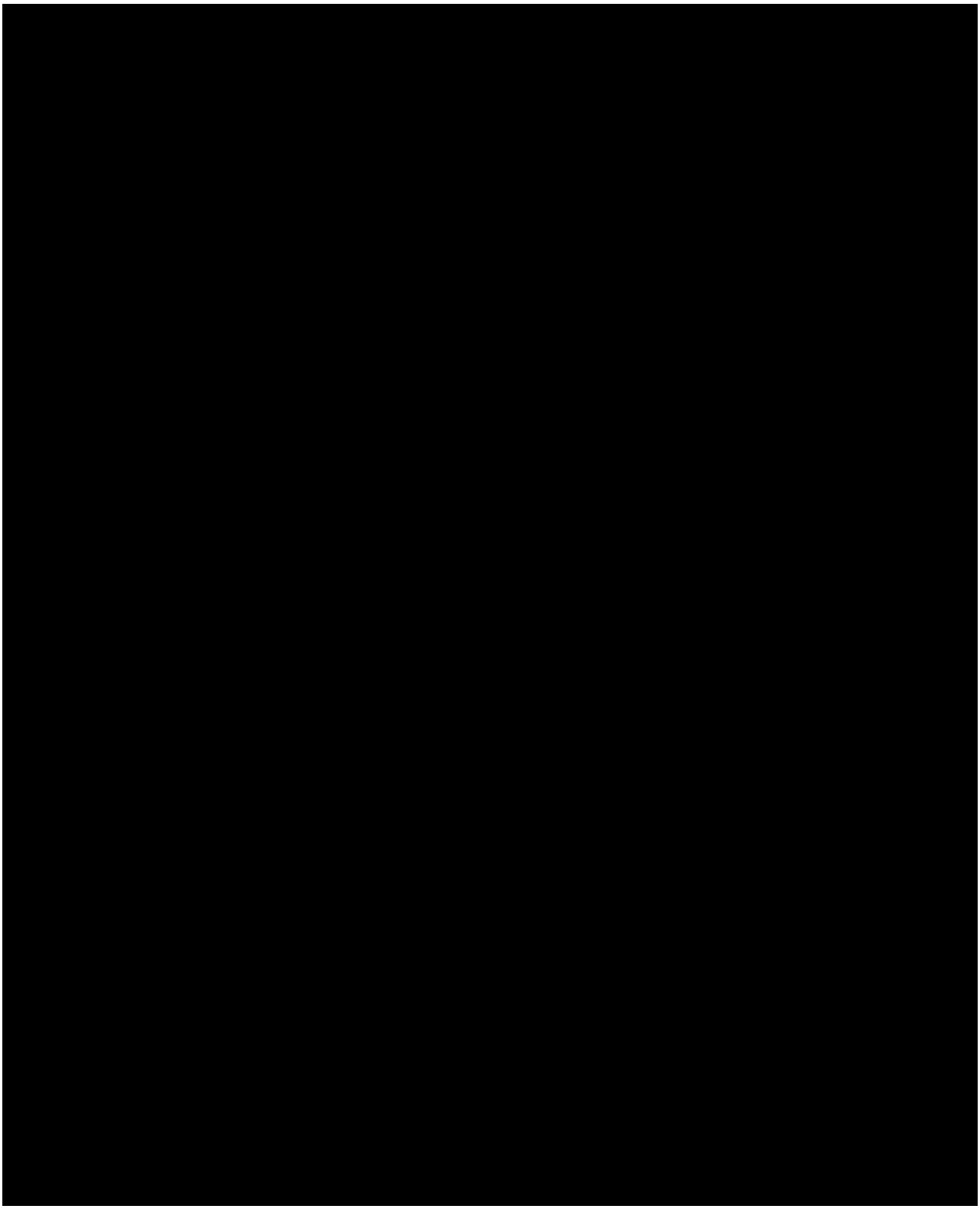


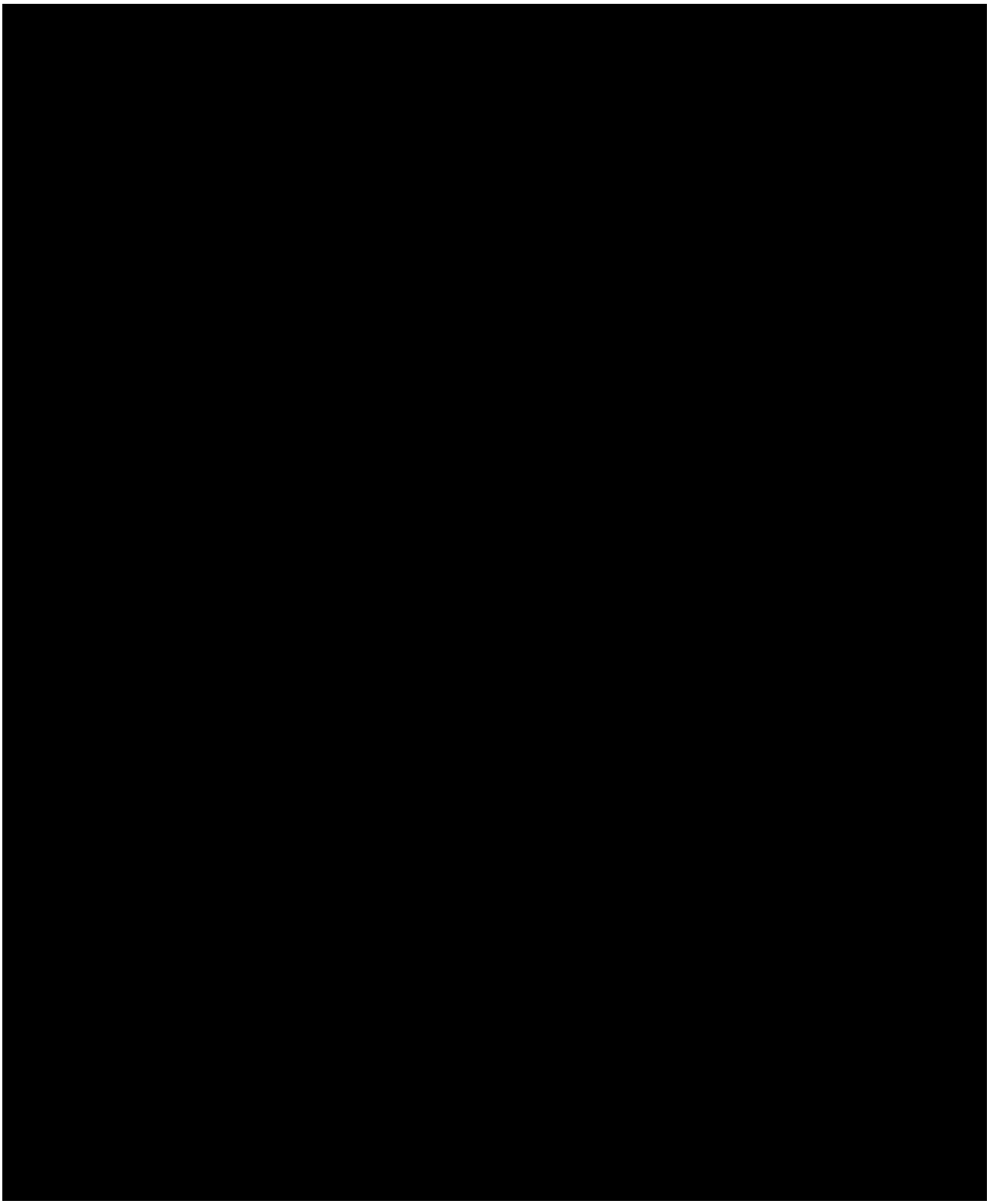


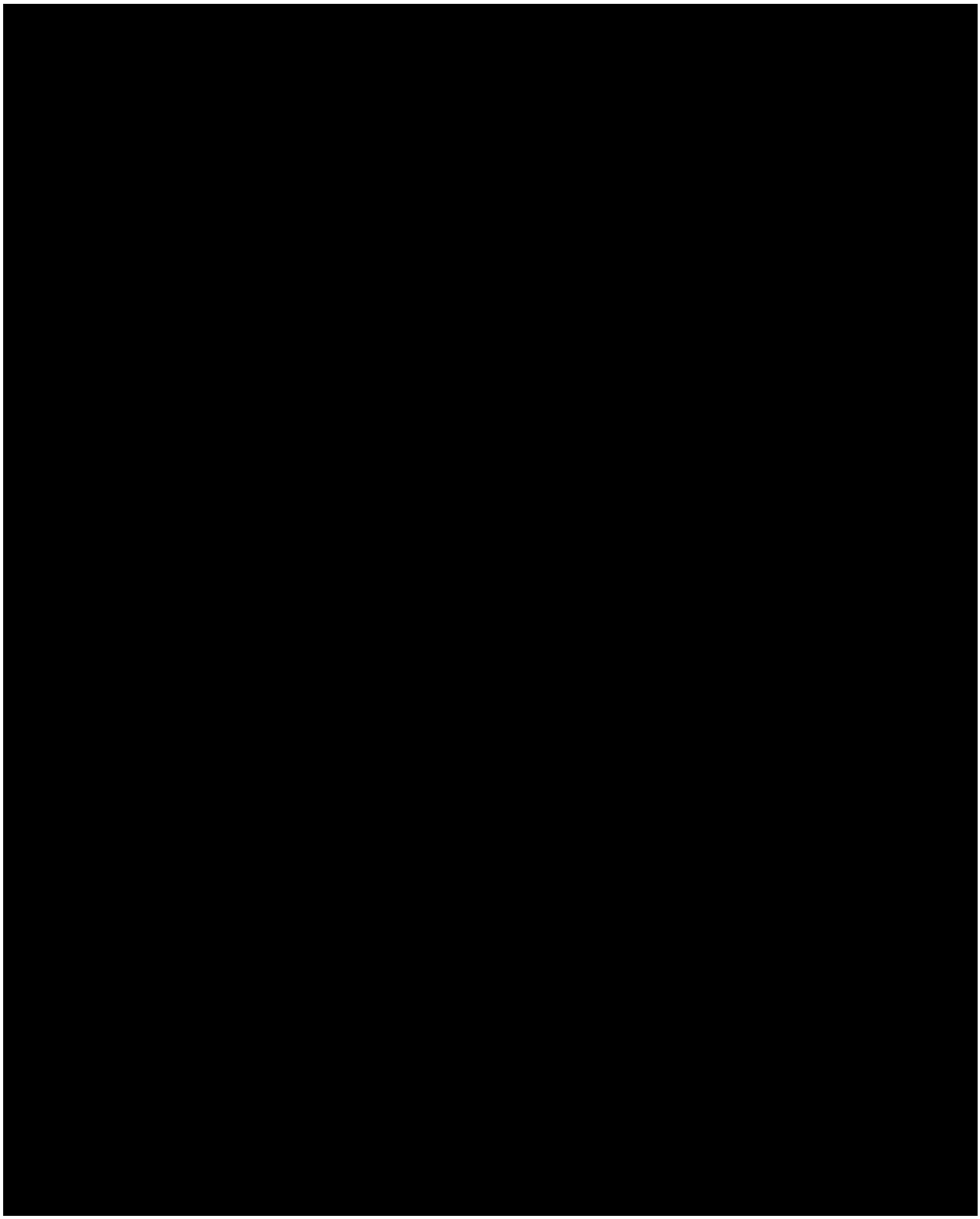


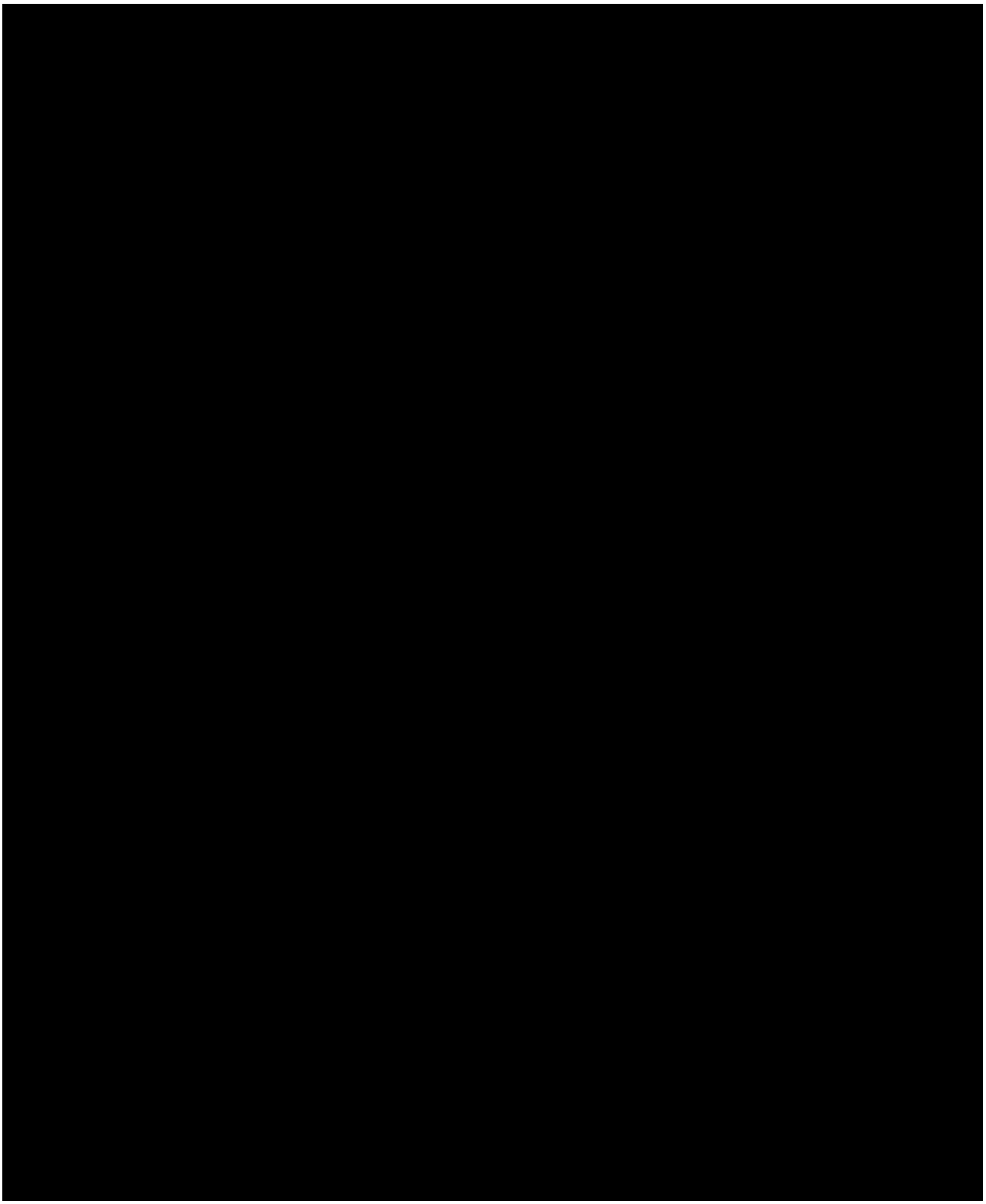


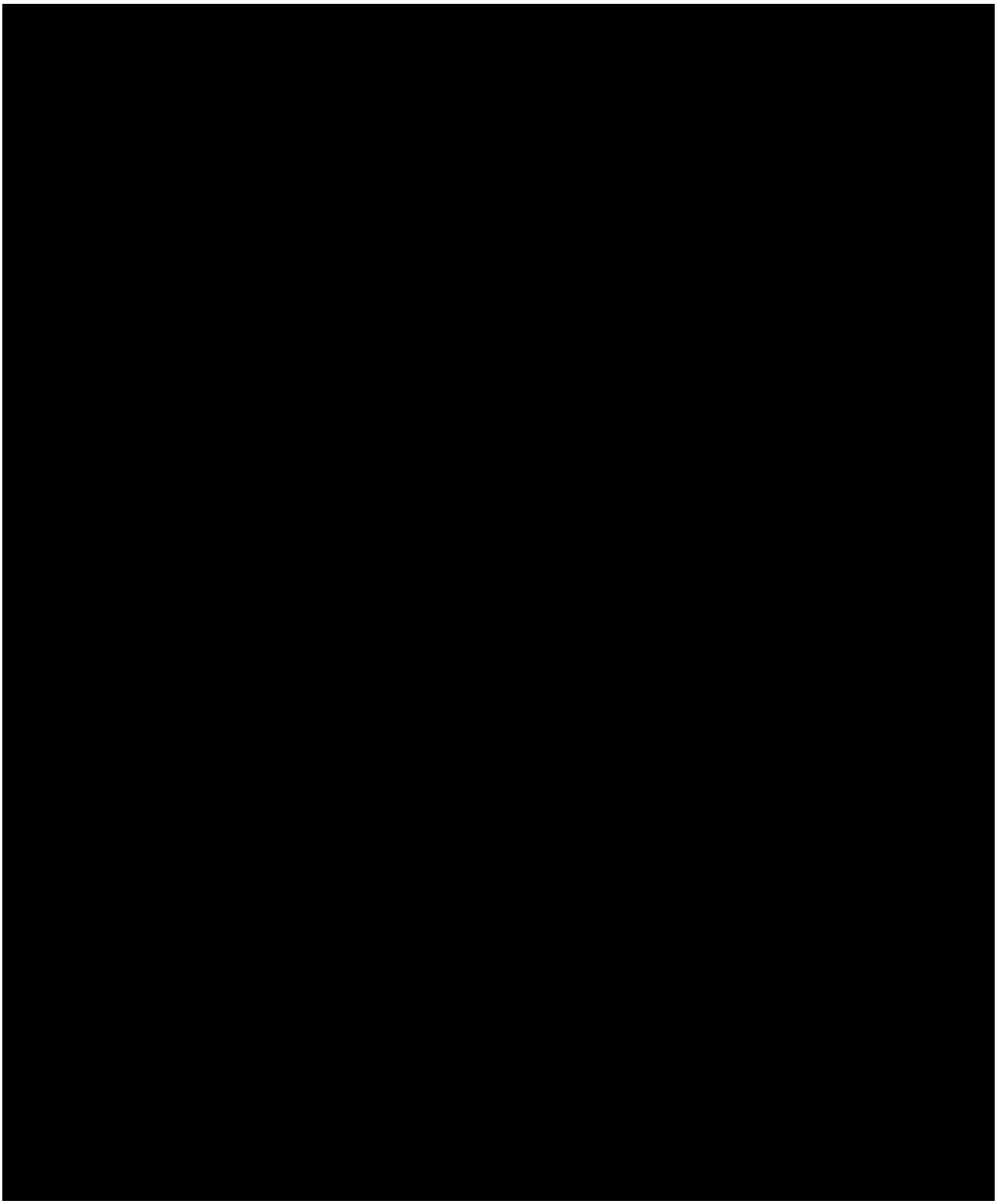


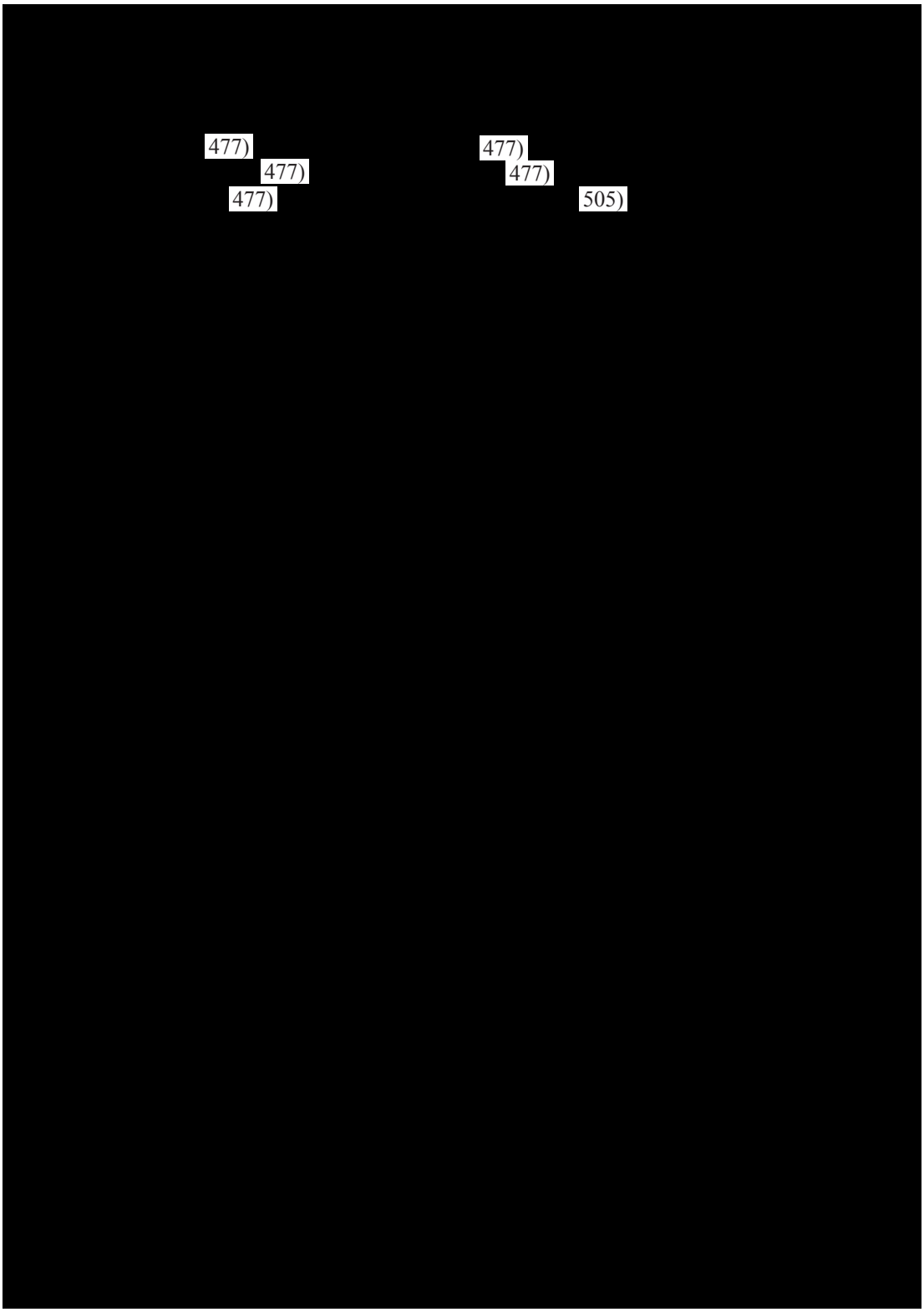


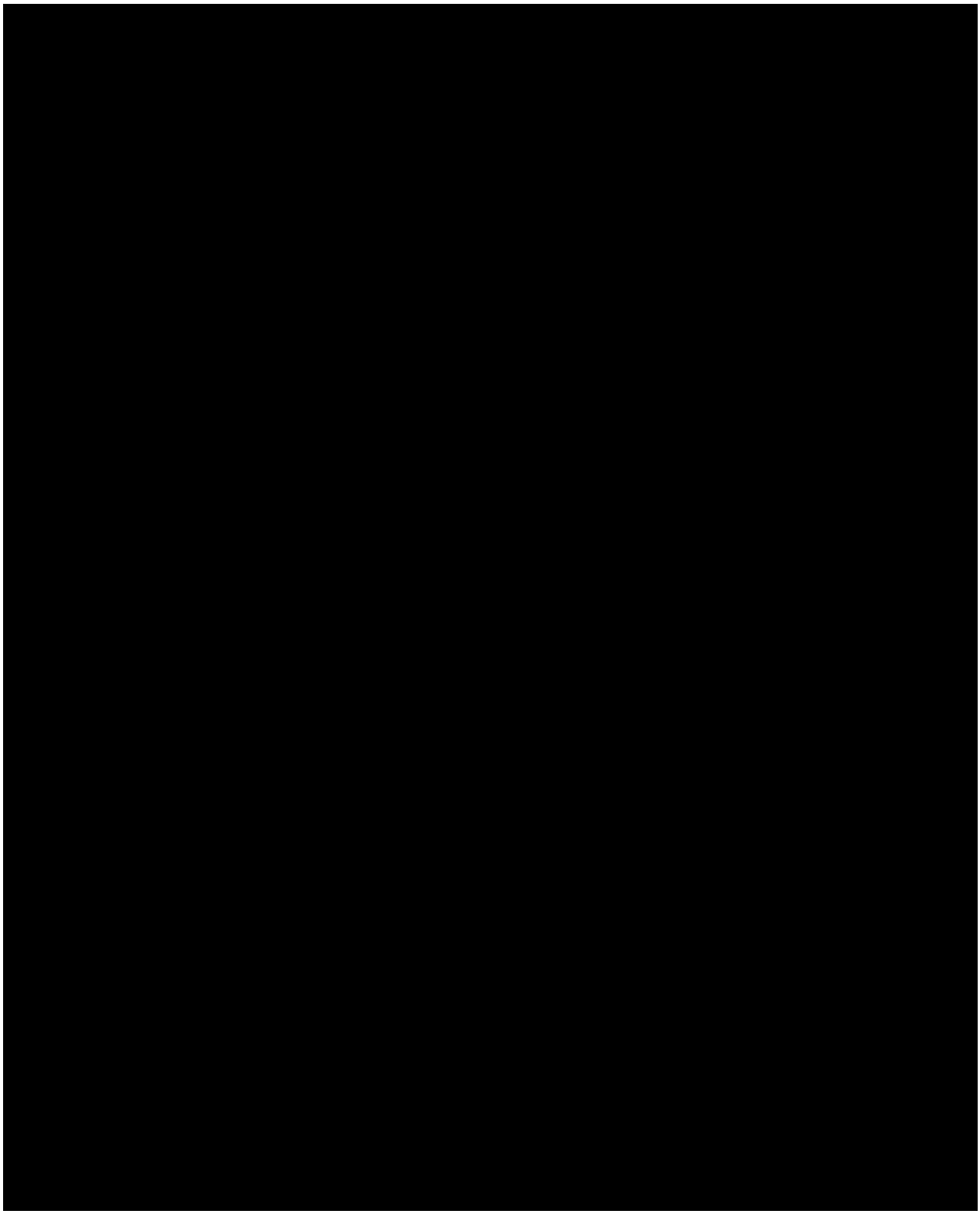


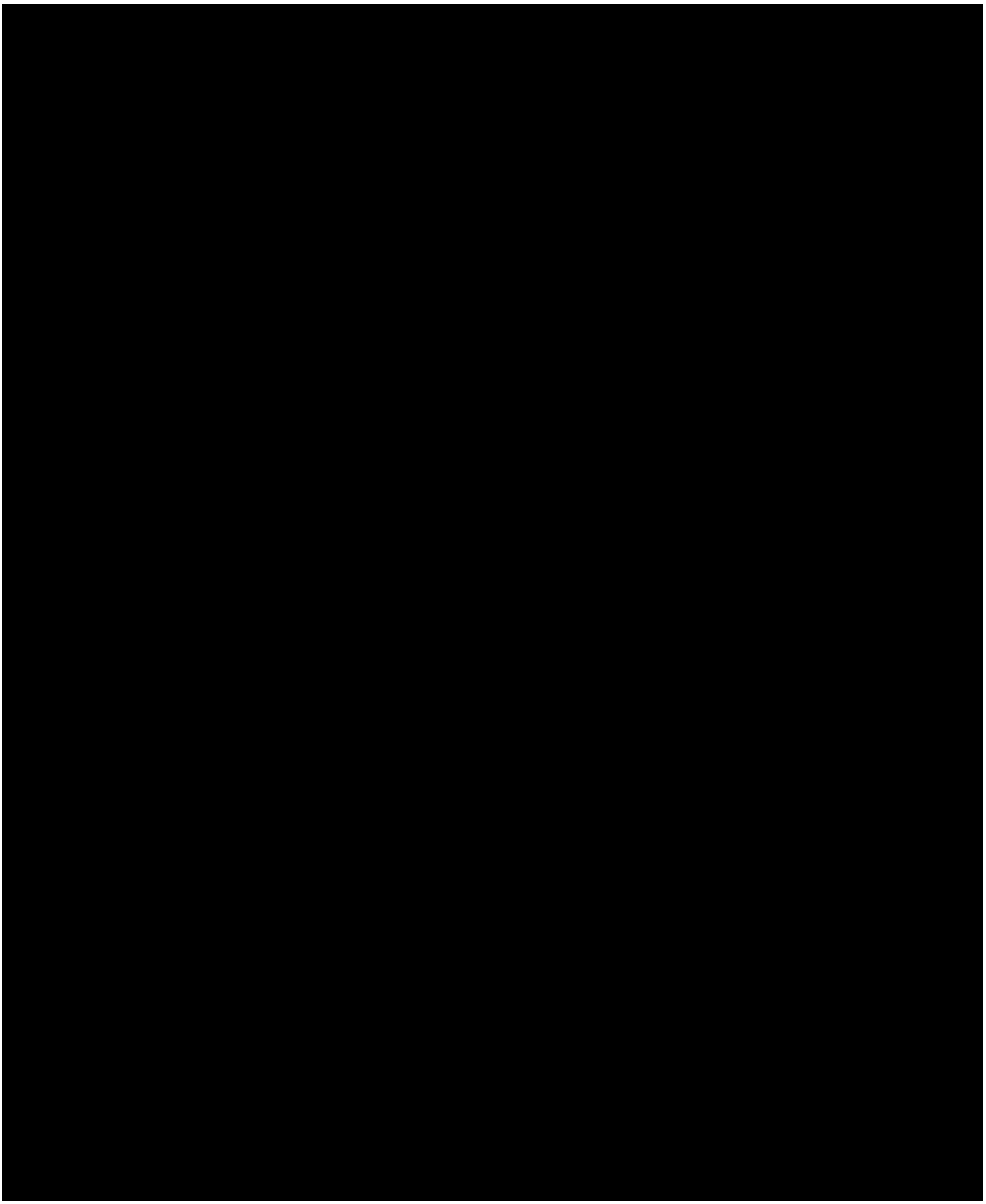


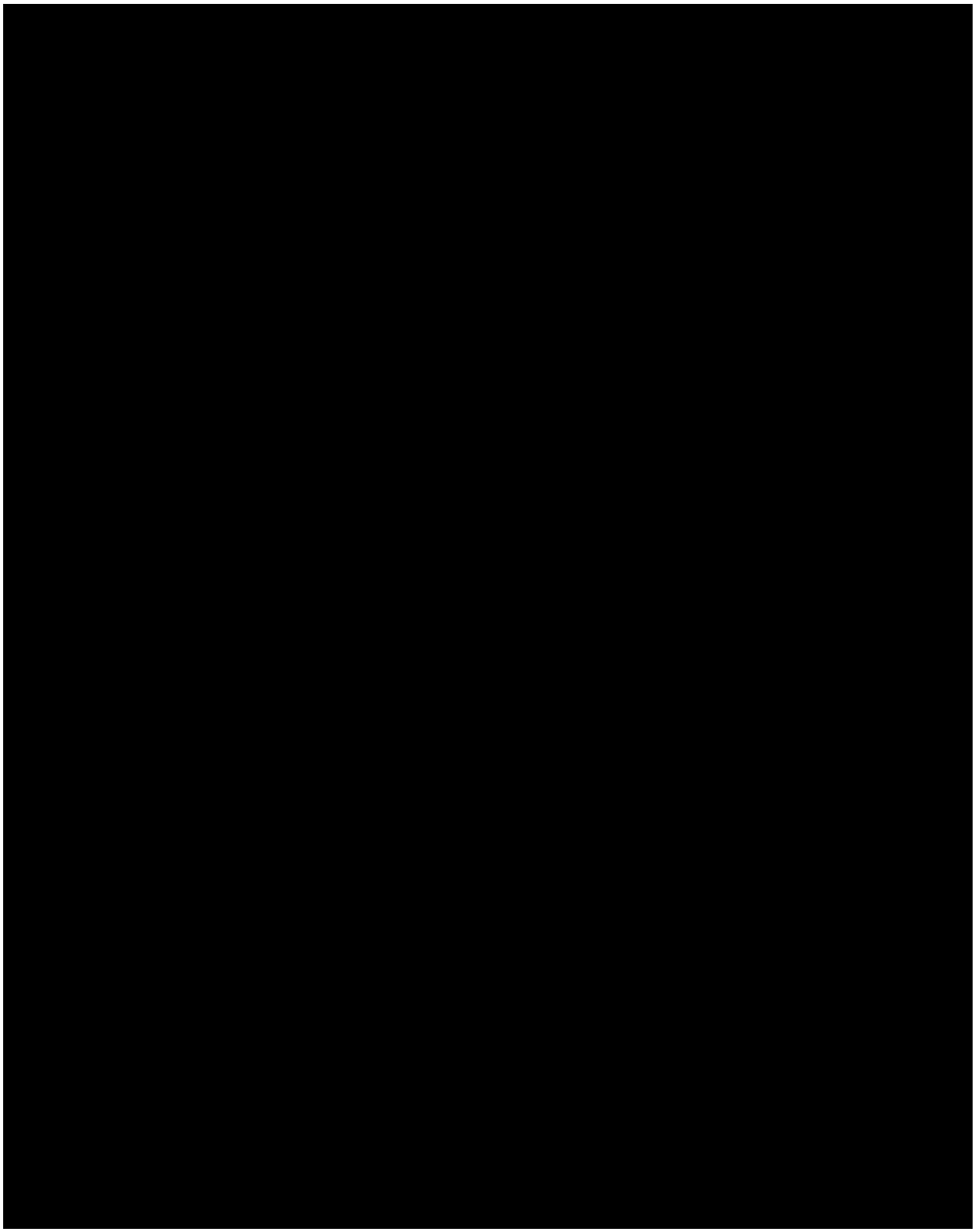


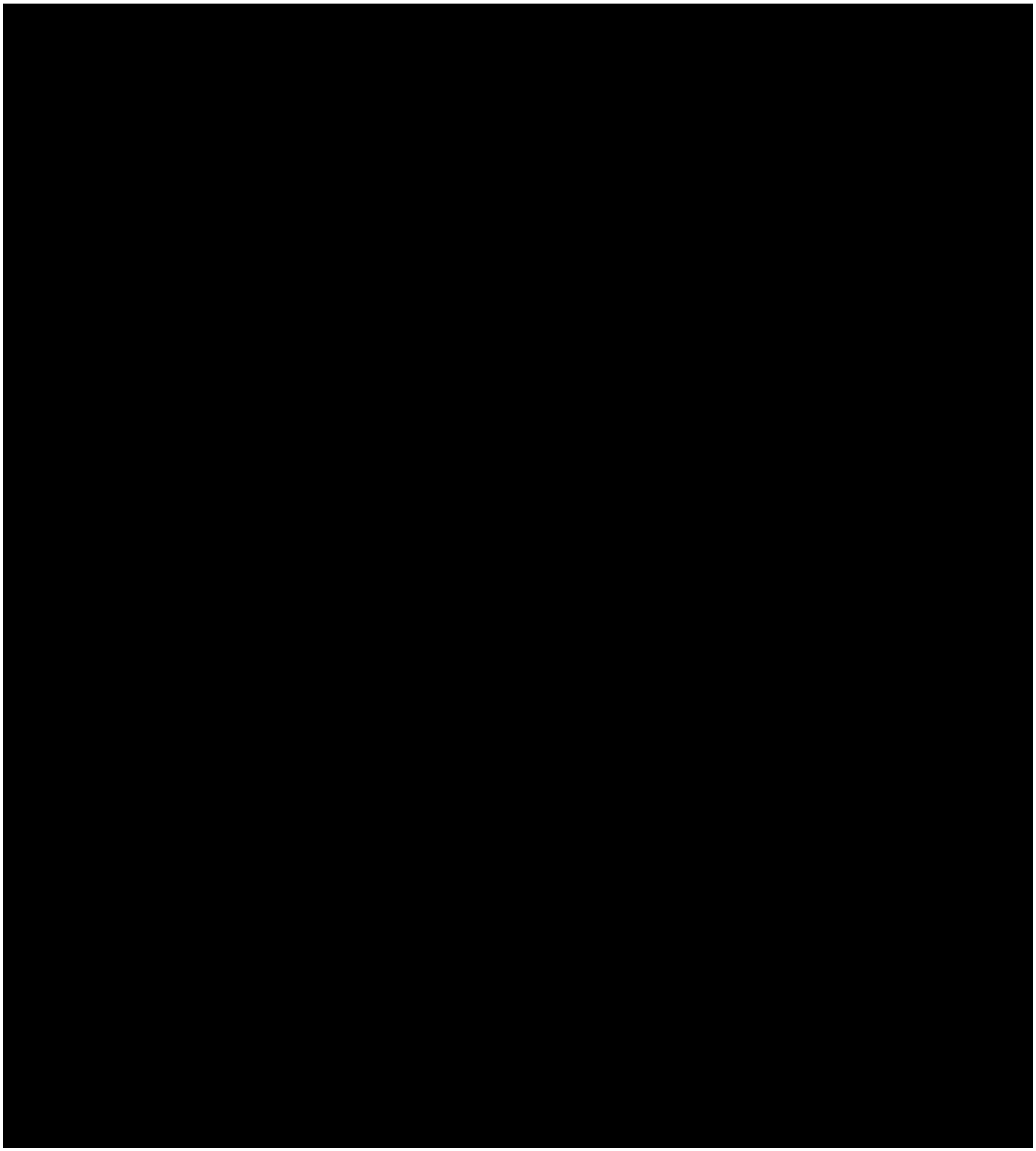


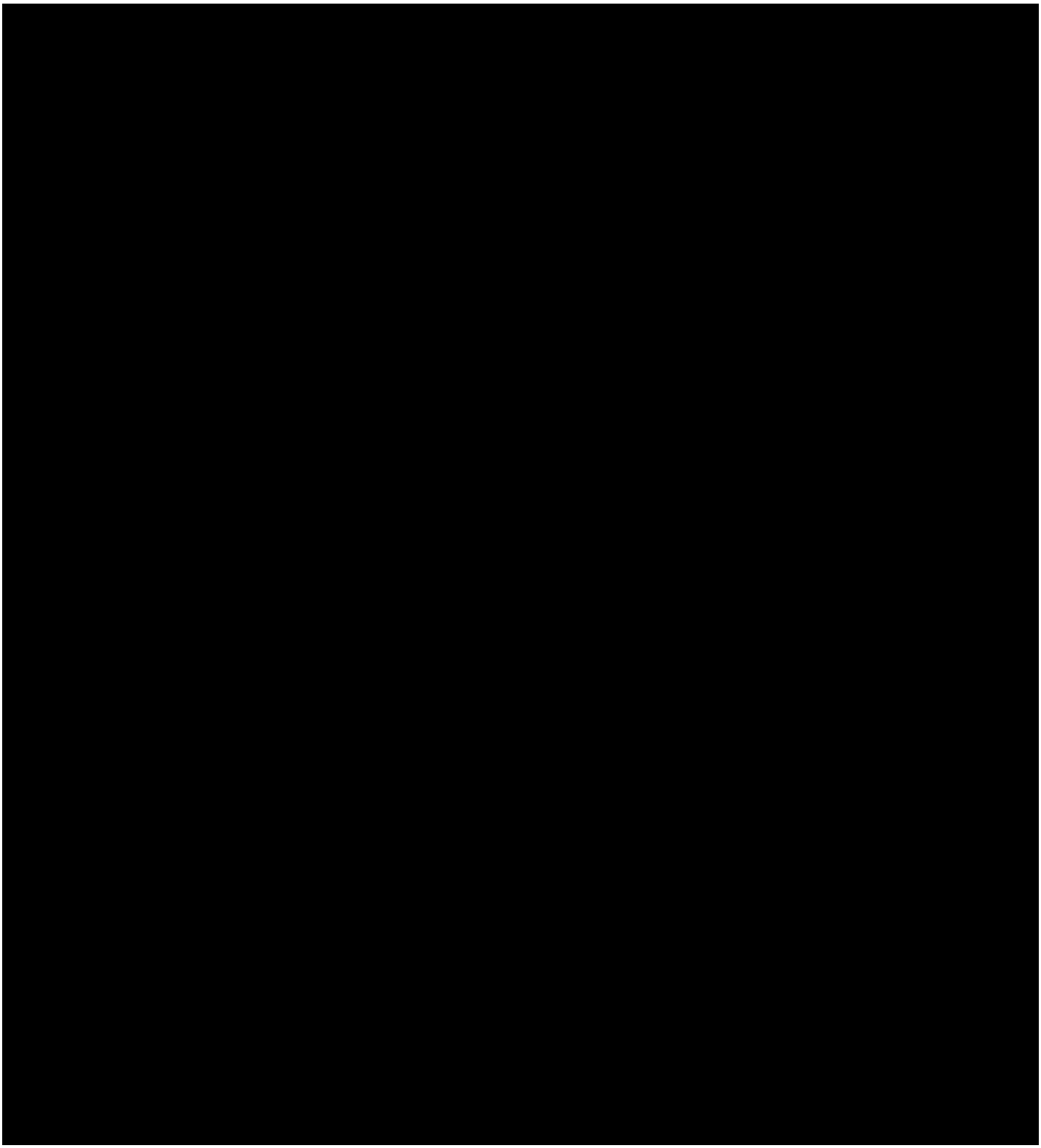

477)
477)
477)
477)
477)
505)











TEMA 13

Semejanza

CAPÍTULO 9

9.1 Proporciones 520

9.2 Teorema fundamental de la proporcionalidad 524

9.3 Polígonos semejantes 528

9.4 El postulado de la semejanza AAA 532

9.5 Triángulos rectángulos y triángulos semejantes 538

9.6 Teoremas de la semejanza LLL y LAL 542

9.7 Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes 546

9.8 Razones trigonométricas de ángulos especiales 550

Conceptos importantes 552

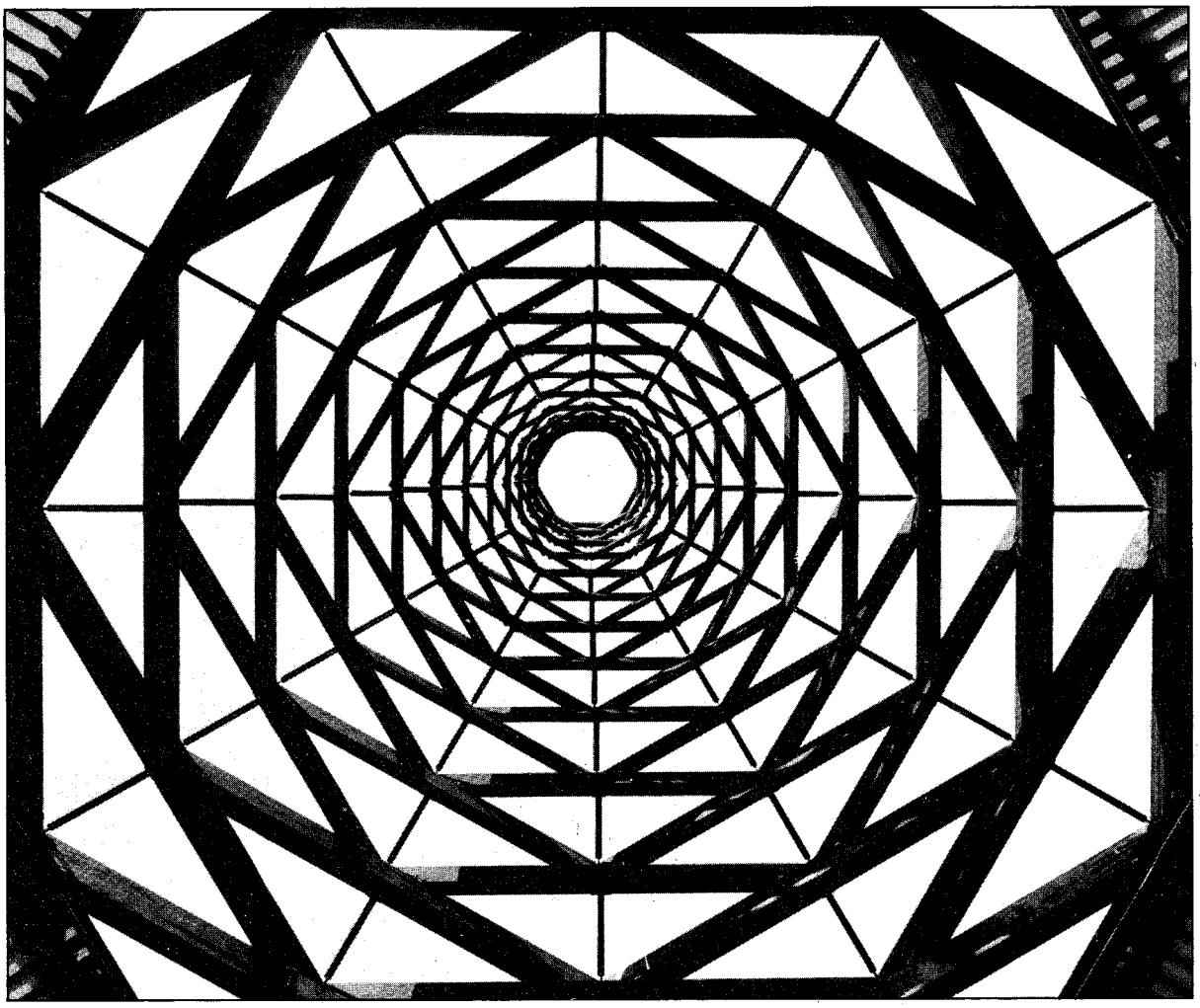
Resumen 553

Examen 554

Técnicas para la solución de problemas

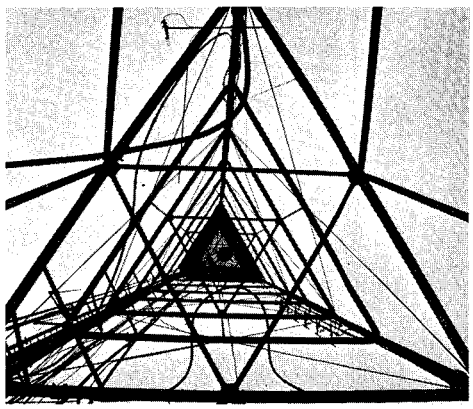
Trabájese hacia atrás 555

Semejanza

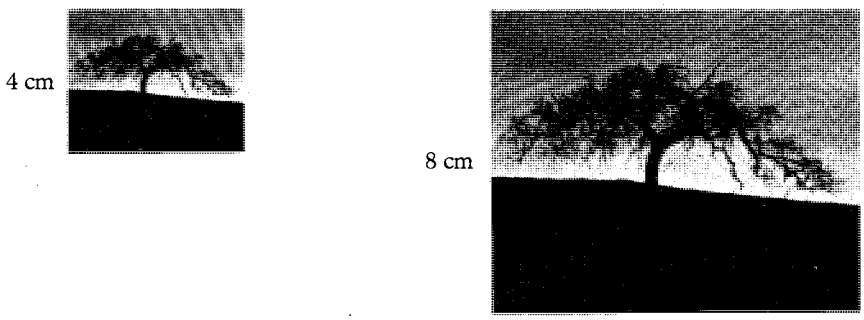


9.1 Proporciones

En este capítulo se estudiarán polígonos que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. En esta fotografía hay muchos triángulos que tienen la misma forma.



La idea de la «misma forma» aparece en las ampliaciones o reducciones. Considérense las fotografías siguientes.



Ambas son fotografías de un mismo objeto, pero una es más grande que la otra. Las fotografías tienen la «misma forma». Si se comparan las razones entre el ancho y el largo de cada foto, se observa que las razones son iguales.

$$\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$

Esta ecuación se denomina *proporción,* porque se compone de dos razones iguales, $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$.

Definición 9.1

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. $b \neq 0, d \neq 0$.

(Es importante recordar que un denominador no puede ser igual a cero.)

En esta sección se repasarán algunas propiedades algebraicas de las proporciones. Las pruebas de estos teoremas se omiten, pero todos van precedidos de un ejemplo numérico.

Ejemplo 1 En una proporción, los productos cruzados son iguales.

$$\frac{4}{8} \times \frac{2}{4} \quad \text{ó} \quad 4 \times 4 = 2 \times 8$$

Teorema 9.1 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.

Ejemplo 2 En una proporción, puede añadirse 1 a ambos lados.

Si $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$, entonces $\frac{9}{3} + \frac{3}{3} = \frac{12}{4} + \frac{4}{4}$ ó $\frac{9+3}{3} = \frac{12+4}{4}$.

Teorema 9.2 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Ejemplo 3 En una proporción, puede restarse 1 de ambos lados.

Si $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$, entonces $\frac{9}{3} - \frac{3}{3} = \frac{12}{4} - \frac{4}{4}$ ó $\frac{9-3}{3} = \frac{12-4}{4}$.

Teorema 9.3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Ejemplo 4 Si $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$, entonces $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Teorema 9.4 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Ejemplo 5 Si $9 \times 4 = 3 \times 12$, entonces $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$.

Teorema 9.5 Si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

EJERCICIOS

A.

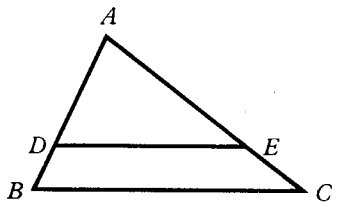
1. Dado que $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, ¿cuál de los teoremas se usa para concluir los casos siguientes?

a. $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$. **b.** $\frac{9}{5} = \frac{27}{15}$. **c.** $\frac{-1}{5} = \frac{-3}{15}$.

2. Supóngase que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ¿Qué teorema se usa para concluir los casos siguientes?

a. $\frac{AD - DB}{DB} = \frac{AE - EC}{EC}$. **b.** $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$.

c. $\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC}$.



3. Empléense el teorema 9.5 y los siguientes productos para formar proporciones.

a. $3 \times 4 = 2 \times 6$. **b.** $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{6}$.

c. $2 \cdot MN = 3 \cdot XY$. **d.** $AB \cdot CD = EF \cdot GH$.

4. Empléese el teorema 9.1 para despejar x en las siguientes proporciones.

a. $\frac{4}{5} = \frac{x}{25}$. **b.** $\frac{6}{9} = \frac{18}{x}$. **c.** $\frac{x - 4}{x} = \frac{3}{4}$.

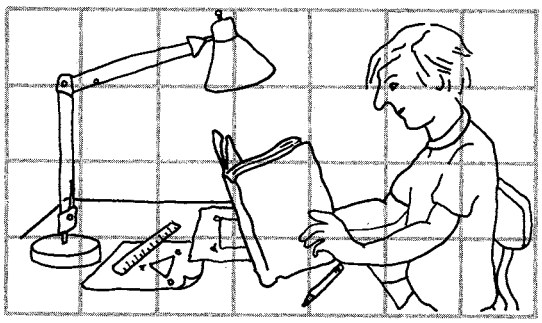
B.

5. Formúlese la contrarrecíproca del teorema 9.1. Empléese esta contrarrecíproca para mostrar que las siguientes ecuaciones no son proporciones.

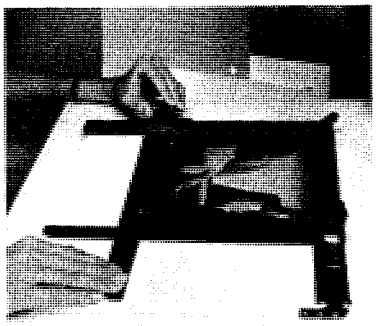
a. $\frac{12}{13} = \frac{13}{14}$. **b.** $\frac{23}{33} = \frac{31}{41}$. **c.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + 1}$.

ACTIVIDADES

A este dibujo se le sobrepuso una cuadrícula de 1 cm^2. Dibújese una copia más grande del dibujo con una cuadrícula de 2 cm^2.



6. Las medidas de dos ángulos complementarios están en una razón de $\frac{2}{3}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.
7. Si dos calculadoras cuestan 28 dólares, ¿cuánto costarán cinco calculadoras?
8. Dos números están en la razón de 2:3. ¿Cuál es la razón de sus cuadrados?
9. Las medidas de dos ángulos suplementarios están en la razón de $\frac{3}{5}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.
10. Un segmento de 56 cm se divide en una razón de 3 a 5. Encuéntrese la longitud de los dos segmentos.
11. Una fotografía de 5 × 7 se amplía en un factor de $\frac{5}{2}$. ¿Cuál es el tamaño de la ampliación?
12. Las áreas de dos triángulos están en una razón de 4 a 9. El triángulo más pequeño tiene un área de 50 cm^2. Encuéntrese el área del triángulo grande.

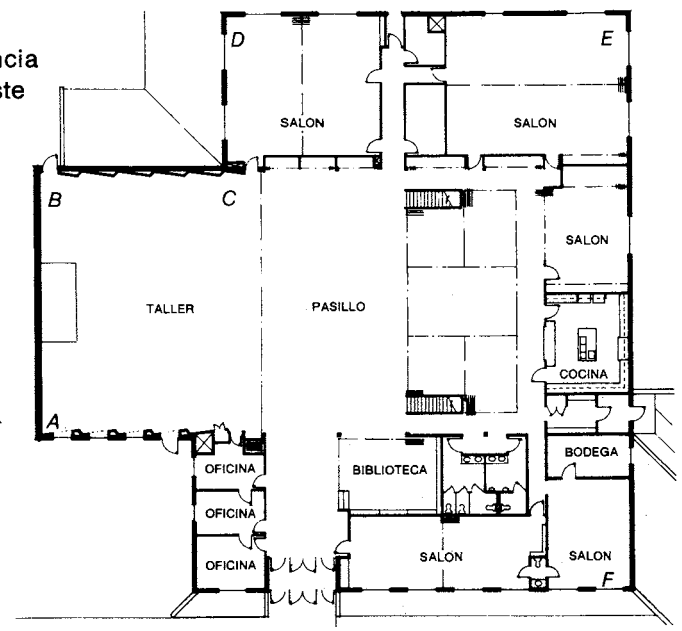


C.

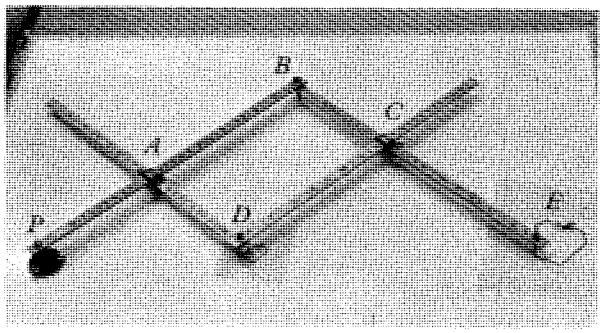
13. Despéjese x en la proporción. $\frac{-3}{x} = \frac{x-8}{5}$

SOLUCION DE PROBLEMAS

1. Con una regla y la escala que se proporciona, encuéntrese la distancia real de norte a sur y de este a oeste de la construcción.
2. Escríbanse las proporciones empleadas en la solución del problema 1.
3. Si todas las paredes, desde *A* hasta *F*, partiendo hacia el norte alrededor de la construcción, se vaciaron en hormigón y este vaciado costó 20 dólares pie, estímese el costo total del vaciado.



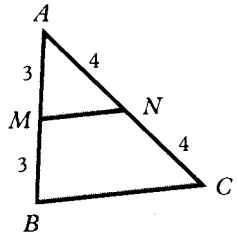
9.2 Teorema fundamental de la proporcionalidad



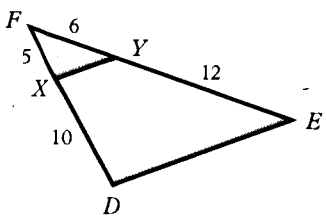
El instrumento articulado llamado pantógrafo es útil para los diseñadores y otras personas que necesiten ampliar o reducir dibujos como se muestra en la fotografía. El pantógrafo se coloca sobre una superficie plana y se fija la punta P. Cuando la punta D sigue los detalles del dibujo original, el lápiz E reproduce la figura ampliada. El pantógrafo se basa en el teorema de esta sección.

En los triángulos siguientes, se trazó un segmento paralelo a un lado del triángulo.

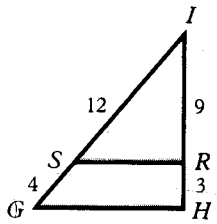
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$



$\overline{XY} \parallel \overline{DE}$



$\overline{SR} \parallel \overline{GH}$



Obsérvese que

$$\frac{AM}{MB} = 1, \frac{AN}{NC} = 1, \quad \text{o} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}.$$

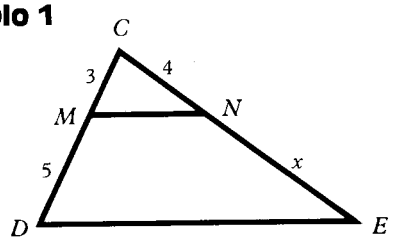
$$\frac{FX}{XD} = \frac{1}{2}, \frac{FY}{YE} = \frac{1}{2}, \quad \text{o} \quad \frac{FX}{XD} = \frac{FY}{YE}.$$

$$\frac{IS}{SG} = \frac{3}{1}, \frac{IR}{RH} = \frac{3}{1}, \quad \text{o} \quad \frac{IS}{SG} = \frac{IR}{RH}.$$

Estas observaciones se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 9.6 Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

Ejemplo 1



En esta figura, $\overline{MN} \parallel \overline{DE}$.
Encuéntrese NE.

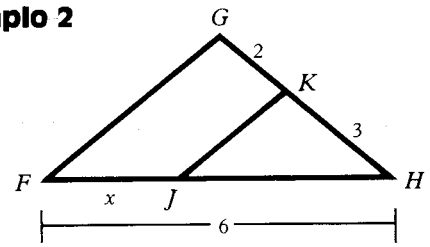
Por el teorema 9.6, $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{CN}{NE}$,

por tanto, $\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{x}$,

$3x = 20$,

o bien $x = \dfrac{20}{3}$.

Ejemplo 2



Encuéntrese FJ en la figura si $\overline{GF} \parallel \overline{KJ}$.

Por el teorema 9.6, $\dfrac{GK}{KH} = \dfrac{FJ}{JH}$,

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{6 - x}$,

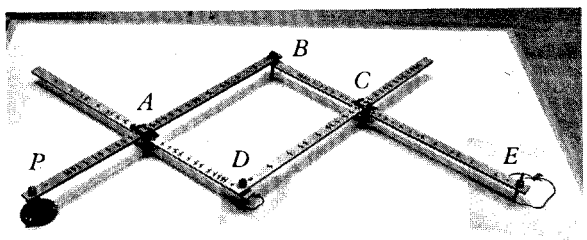
$3x = 12 - 2x$,

$5x = 12$,

o bien $x = \dfrac{12}{5}$.

APLICACION

1. Un pantógrafo se construye de manera que $AB = CD$, $AD = BC$, y P, D y E son colineales. Así, por el teorema 8.4, se puede concluir que $ABCD$ es un paralelogramo.
2. Dado que $ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ en $\triangle PBE$. Por tanto, por el teorema 9.6, se puede concluir que la razón $\dfrac{PD}{DE}$ siempre es constante e igual a la razón $\dfrac{PA}{AB}$.



Este hecho ayuda a explicar el funcionamiento del pantógrafo.

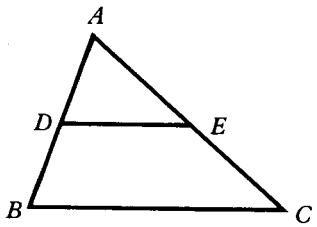
La recíproca del teorema 9.6 también es verdad y se enuncia a continuación.

Teorema 9.7 Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.

EJERCICIOS

A.

1. Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.



(Ejercicios 1, 2)

a. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

b. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

c. $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

d. $\frac{AD}{AE} = \frac{EC}{BD}$.

e. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

f. $\frac{AD}{AB - AD} = \frac{AE}{AC - EC}$.

2. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.

a. Si $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b. Si $\frac{DB}{AE} = \frac{EC}{AD}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

c. Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

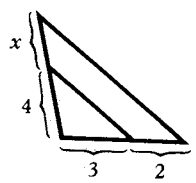
d. Si $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

e. Si $\frac{DB}{AB-DB} = \frac{EC}{AC-EC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

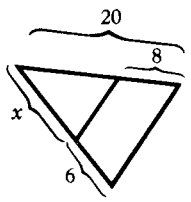
f. Si $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

En los ejercicios 3 a 8, despéjese x. Supóngase que las rectas que parecen paralelas lo son.

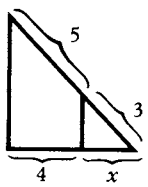
3.



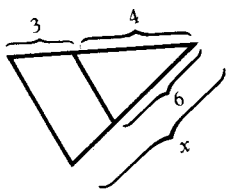
4.



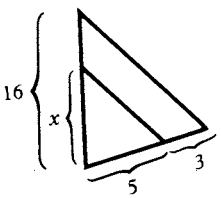
5.



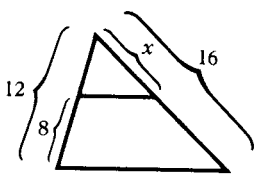
6.



7.



8.

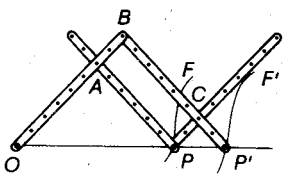


ACTIVIDADES

Para esta actividad se necesitarán tiras de cartulina o de madera de 30 cm o más de largo y algunos sujetadores.

1. Constrúyase un pantógrafo uniendo las tiras de manera que $AB = PC$ y $AP = BC$.

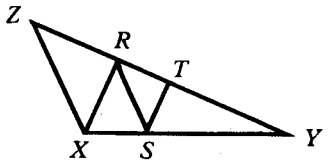
2. Empléese el pantógrafo para ampliar alguna figura.



B.

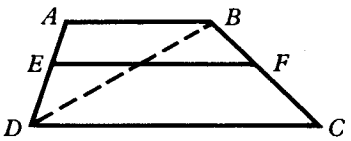
9. Dado: $\overline{RS} \parallel \overline{ZX}$, $\overline{RX} \parallel \overline{TS}$.

Pruébese: $\dfrac{TY}{RT} = \dfrac{RY}{RZ}$.



10. Dado: $ABCD$ es un trapecio
$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.

Pruébese: $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$.



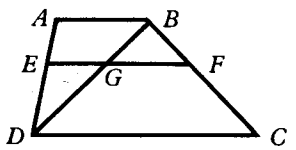
(*Sugerencia:* Trácese $\overline{BD}$. Considérense $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$.)

11. Dado: $ABCD$ es un trapecio
$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$,
$\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{1}{4}$, $BC = 30$.

Encuéntrense: BF y FC.

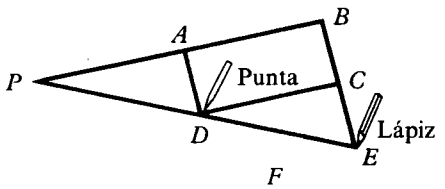
12. Dado: $ABCD$ es un trapecio
$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$,
$\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{3}{4}$, $AD = 8$, $BC = 12$.

Encuéntrense: AE, ED, BF, FC.



(Ejercicios 11, 12)

13. En este pantógrafo, $PA = 8$ cm y $AB = 24$ cm. Si la punta D traza un segmento de 14 cm, ¿cuál es la longitud del segmento que se dibuja en E?



14. Dado: $\triangle ABC$, $m\angle 1 = m\angle 2$.

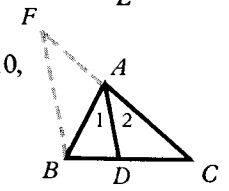
Pruébese: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

(*Indicación:* Constrúyanse $\overline{FB} \parallel \overline{AD}$.)

15. Dado: $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$, $AB = 10$, $AC = 15$, $BC = 18$.

Encuéntrense: BD y DC.

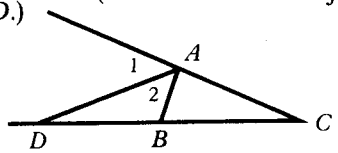
(*Indicación:* Véase Ejercicio 14.)



(Ejercicios 14, 15)

16. Dado: $\triangle ABC$, $m\angle 1 = m\angle 2$.

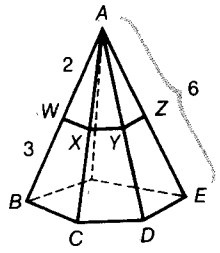
Pruébese: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.



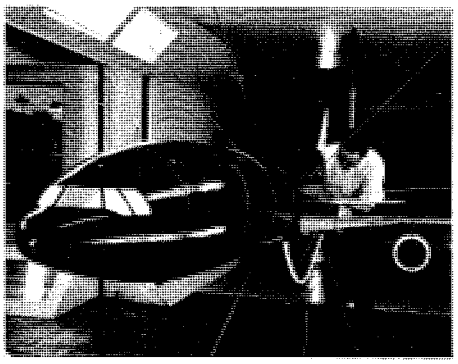
(*Indicación:* Empléese el teorema fundamental de la proporcionalidad y una recta auxiliar.)

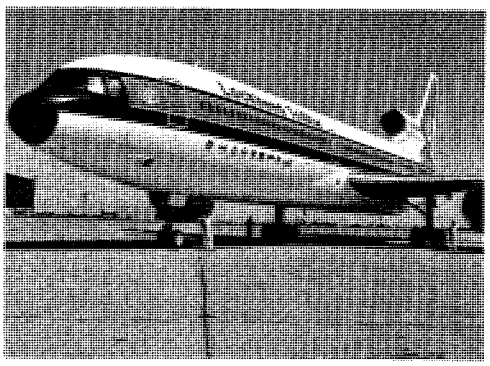
SOLUCION DE PROBLEMAS

En esta pirámide pentagonal,
$\overline{WX} \parallel \overline{BC}$, $\overline{XY} \parallel \overline{CD}$, $\overline{YZ} \parallel \overline{DE}$, y $AW = 2$, $WB = 3$, $AE = 6$
Encuéntrense AZ y ZE.



9.3 Polígonos semejantes

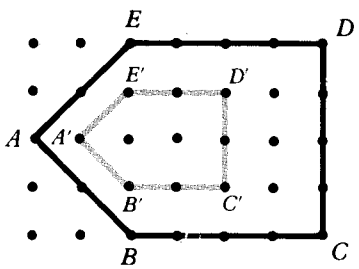




Con frecuencia, los diseñadores industriales construyen modelos de proyectos que luego se fabricarán en tamaño natural. El modelo del aeroplano tiene la misma forma que el avión real.

En esta sección se tratarán los polígonos y se describirá lo que significa *idéntica forma* o *semejanza.* Considérense las siguientes figuras.

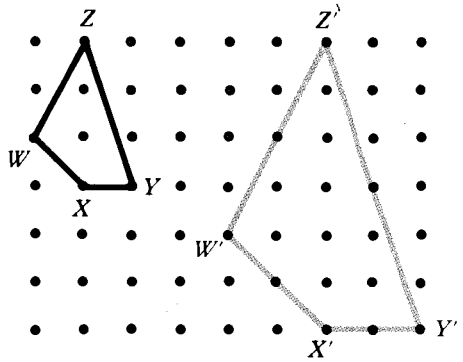
$ABCDE$ es semejante a $A'B'C'D'E'$



$\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$.
$\angle D \cong \angle D'$, $\angle E \cong \angle E'$.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} = 2.$$

$WXYZ$ es semejante a $W'X'Y'Z'$

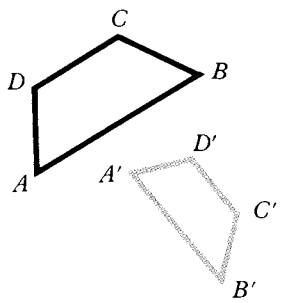


$\angle W \cong \angle W'$, $\angle X \cong \angle X'$,
$\angle Y \cong \angle Y'$, $\angle Z \cong \angle Z'$.

$$\frac{WX}{W'X'} = \frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{WZ}{W'Z'} = \frac{1}{2}.$$

Obsérvese que todos los ángulos correspondientes son congruentes y que las razones de los lados correspondientes son iguales.

El símbolo «$\sim$» significa «es semejante a».
$ABCD \sim A'B'C'D'$ significa que $ABCD$ es semejante a $A'B'C'D'$

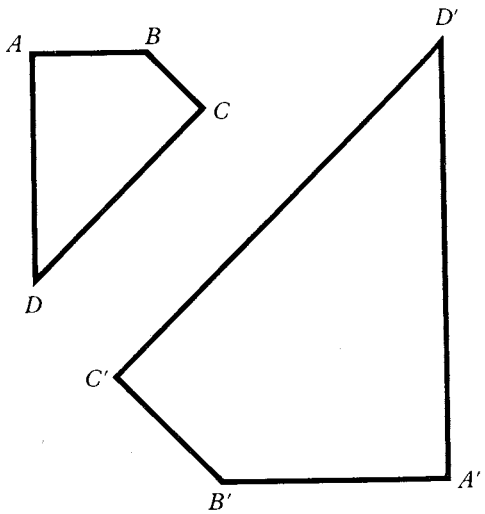


Definición 9.2

Dos **polígonos son semejantes** si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales.

Ejemplo 1 Si se da que $ABCD \sim A'B'C'D'$, entonces puede concluirse que:

1. $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$.
2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{AD}{A'D'}$.



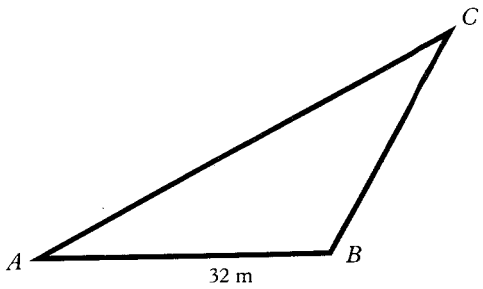
Ejemplo 2 Si se da que

1. $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ y
2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{AD}{A'D'}$,

entonces puede concluirse que $ABCD \sim A'B'C'D'$.

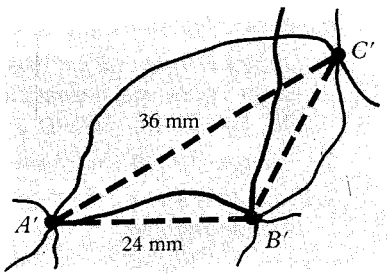
APLICACION

Si se dispone de un mapa a escala, entonces la figura del mapa es semejante a la figura que representa. Dado un mapa a escala de las ubicaciones A, B y C, entonces $\triangle ABC \sim \sim A'B'C'$.
Si $A'C' = 36$ mm, $A'B' = 24$ mm y $AB = 32$ mm, encuéntrese AC.



Solución: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ o bien $\dfrac{32\text{ m}}{24\text{ mm}} = \dfrac{AC}{36\text{ mm}}$.

Por tanto, $AC = \dfrac{32\text{ m} \times 36\text{ mm}}{24\text{ mm}} = 48\text{ m}$.

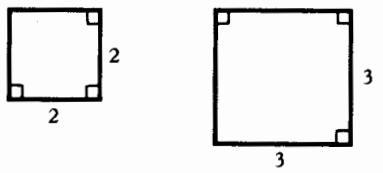


EJERCICIOS

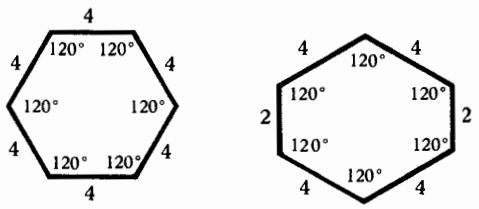
A.

En los ejercicios 1 a 4, determínese si los pares de polígonos dados son semejantes o no.

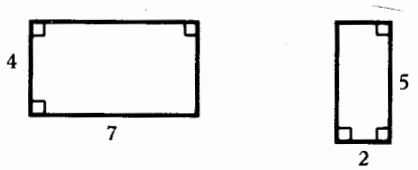
1.



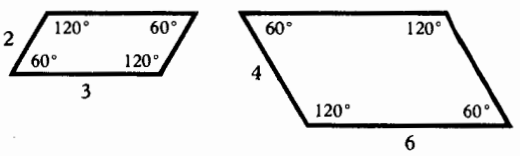
2.



3.



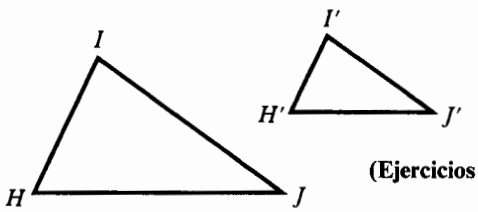
4.



5. Supóngase que $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$. Cítense tres pares de ángulos correspondientes que sean congruentes.

6. Si $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$, complétese la siguiente proporción en dos formas diferentes.

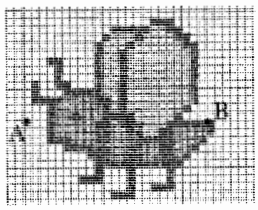
$$\frac{HI}{H'I'} = \frac{?}{\quad}$$



(Ejercicios 5-7)

7. Supóngase que $\triangle HIJ \sim \triangle H'I'J'$ y que $H'I' = 4$, $I'J' = 6$, $H'J' = 7$ y $HJ = 12$. Encuéntrense las longitudes HI e IJ.

8. Con la escala que se indica en este patrón de bordado, encuéntrese la longitud AB del producto final ampliado.



5 mm = 2 cm

ACTIVIDADES

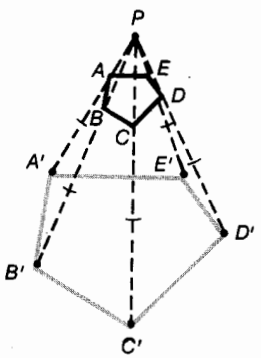
El siguiente es un método para construir un polígono semejante a *ABCDE*.

a. Selecciónese un punto *P* y dibújense $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ y $\overrightarrow{PE}$.

b. Constrúyanse los puntos *A'*, *B'*, *C'*, *D'* y *E'* como se muestra en la figura, de manera que $AA' = 2PA$, $BB' = 2PB$, $CC' = 2PC$, $DD' = 2PD$ y $EE' = 2PE$.

1. Trácese *ABCDE* e inténtese hacer la construcción anterior.

2. Localícese el punto *P* en diferentes posiciones y repítase la construcción.



B.

En esta figura, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

9. Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, demuéstrese que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

10. Si las longitudes de los segmentos son las que se muestran, encuéntrense DB y EC. (*Sugerencia:* Empléese el ejercicio 9.)

11. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y las longitudes de los segmentos son las que se muestran, pruébese que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

12. Las longitudes de los lados de un pentágono son 6, 8, 9, 12 y 15. Si un pentágono semejante tiene de lado más largo 4, encuéntrense las medidas de los lados restantes.

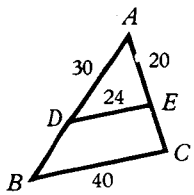
13. Constrúyase un triángulo rectángulo semejante a $\triangle ABC$ con un cateto de longitud $\sqrt{2}$.

14. Constrúyase un cuadrilátero semejante a $ABCD$ cuyo lado más corto mida 9.

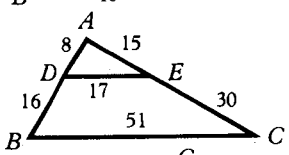
C.

15. Supóngase que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Pruébese que $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$. (Esta es la conclusión del teorema fundamental de la proporcionalidad.)

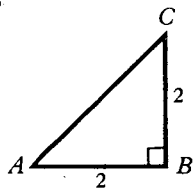
16. Dado que $ABCDE$ es un pentágono regular y que $\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{DI} = \frac{DC}{CI}$, establézcanse varios pares de triángulos semejantes. Justifíquense las elecciones.



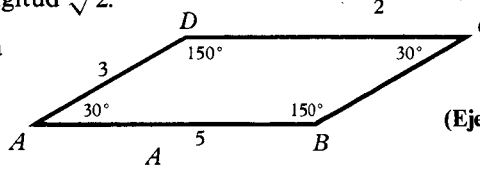
(Ejercicios 9, 10)



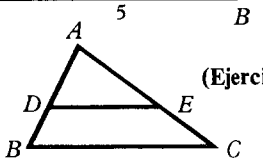
(Ejercicio 11)



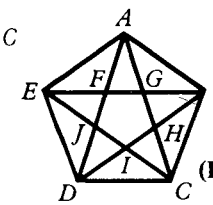
(Ejercicio 13)



(Ejercicio 14)



(Ejercicio 15)

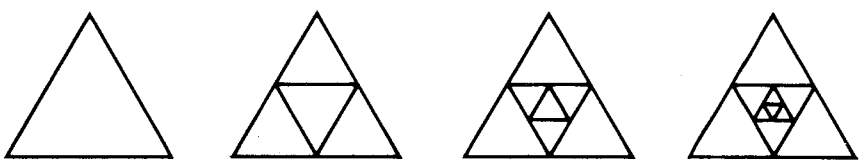


(Ejercicio 16)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Empléese la técnica de solución de problemas de elaboración de tablas (pág. 167) para resolver este problema.

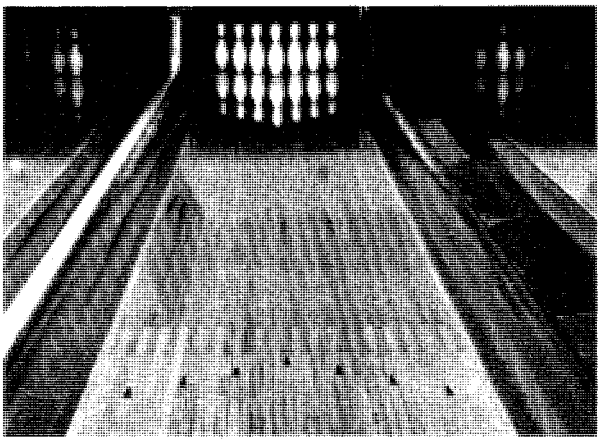
sin subdivisiones una subdivisión dos subdivisiones tres subdivisiones



1 triángulo 5 triángulos 9 triángulos ? triángulos

Si al triángulo equilátero se le hicieran 10 subdivisiones, ¿cuántos triángulos resultarían?

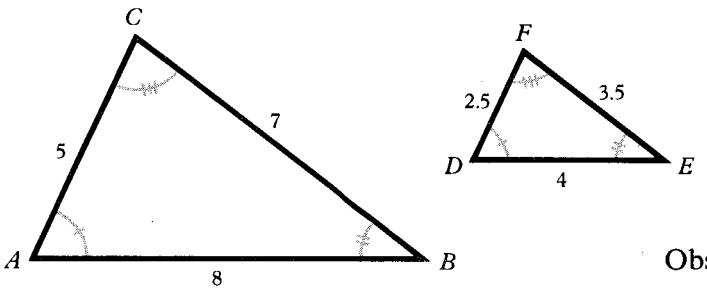
9.4 El postulado de la semejanza AAA



En el juego de los bolos, el jugador se basa en las marcas de la pista para dirigir la bola. Supóngase que el jugador lanza la bola para que pase por la segunda marca y falla por dos centímetros. ¿Por cuántos centímetros fallará la bola al pasar junto al bolo?

Esta pregunta puede responderse aplicando el teorema de esta sección.

Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, y $\angle C \cong \angle F$.



Obsérvese que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

Al parecer, siempre que los tres ángulos de un triángulo sean congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces las razones de los lados correspondientes también serán iguales. Esto se acepta como postulado.

Postulado de la semejanza AAA

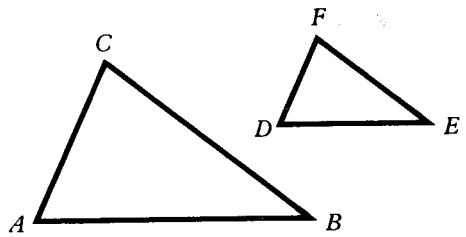
Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

El teorema siguiente describe un método simple para probar que dos triángulos son semejantes.

Teorema 9.8 **Teorema de la semejanza AA.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

PRUEBA

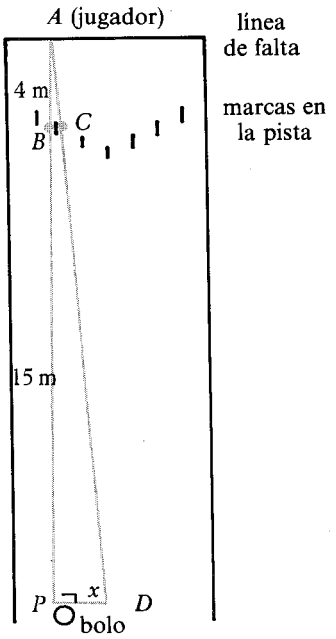
Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle D$.	1. Dado.
2. $\angle B \cong \angle E$.	2. Dado.
3. $\angle C \cong \angle F$.	3. ¿Por qué?
4. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.	4. Semejanza AAA.

APLICACION

Cuando un jugador de bolos falla una marca de la pista por 2 cm, ¿por cuánto falla el bolo? Considérense los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle APD$. Estos triángulos se construyeron para ser rectángulos, y tienen un ángulo A común. Por tanto, por el teorema 9.8, se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle APD$.



$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PD} \quad \text{o} \quad \frac{4\text{ m}}{19\text{ m}} = \frac{2\text{ cm}}{x\text{ cm}}$$

$$\text{o} \quad x = \frac{38}{4}\text{ cm} = 9\frac{1}{2}\text{ cm}$$

Al aplicar el teorema de la semejanza AA al caso de los triángulos rectángulos, se obtiene este otro teorema.

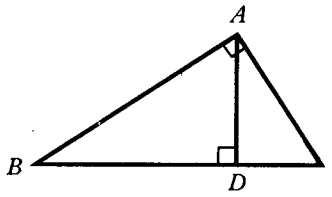
Teorema 9.9 Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.

EJERCICIOS

A.

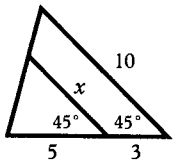
En los ejercicios 1 a 4, se dan $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Complétese la afirmación $ABC \sim \underline{?}$.

1. $m\angle A = 17$, $m\angle C = 49$, $m\angle X = 17$, $m\angle Z = 49$.
2. $m\angle A = 23$, $m\angle B = 111$, $m\angle Y = 23$, $m\angle Z = 111$.
3. $m\angle B = 68$, $m\angle C = 21$, $m\angle X = 21$, $m\angle Y = 91$.
4. $m\angle C = 119$, $m\angle A = 24$, $m\angle X = 24$, $m\angle Y = 37$.
5. Explíquese por qué $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

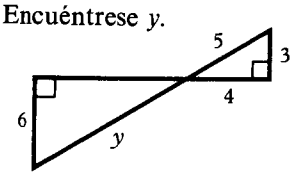


(Ejercicio 5)

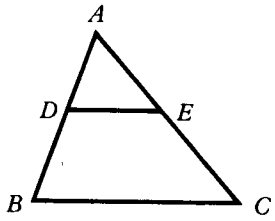
6. Encuéntrese x.



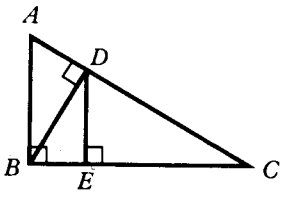
7. Encuéntrese y.



8. Si un hombre de 6 pies de altura proyecta una sombra de 9 pies, ¿qué sombra proyectará un poste de 20 pies?
9. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AD = 3$, $AB = 8$ y $BC = 9$, ¿cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



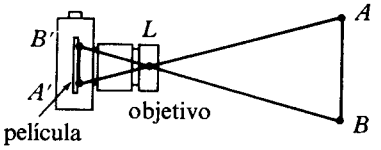
10. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos isósceles?
11. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué?
12. ¿Son semejantes dos triángulos isósceles que tienen sus vértices congruentes? ¿Por qué?
13. ¿Son semejantes todos los triángulos 30°-60°-90°? ¿Por qué?
14. Cítese el máximo de triángulos semejantes que puedan encontrarse en la figura.



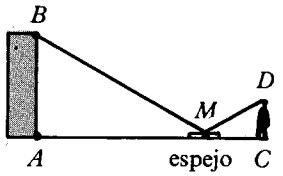
(Ejercicio 14)

B.

15. Cuando se toma una fotografía, la imagen que se forma en la película es semejante al objeto que se fotografía. Los triángulos semejantes ayudan a explicar esto. Si $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son paralelos, pruébese que $\triangle LAB$ y $\triangle L'A'B'$ son semejantes.



16. Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en el espejo. ¿Qué altura tiene una torre si una persona de 150 cm de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?

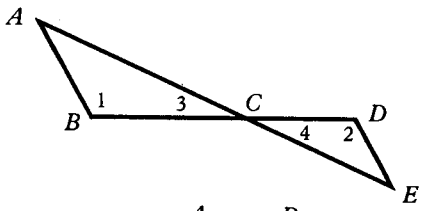


$\angle AMB \cong \angle CMD$

17. Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$.
Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

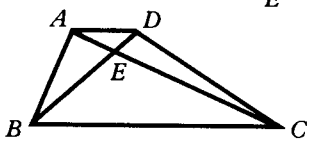
18. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.
Pruébese: **a.** $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

b. $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AB}{DE}$.



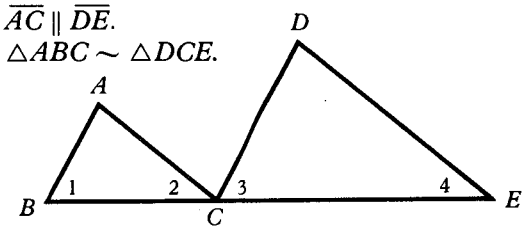
(Ejercicios 17, 18)

19. Dado: $ABCD$ es un trapecio.
Pruébese: $\triangle AED \sim \triangle CEB$.



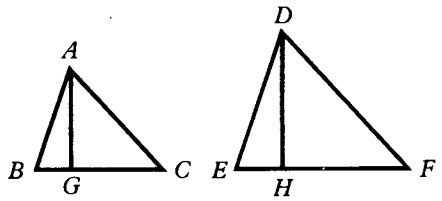
(Ejercicio 19)

20. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.
Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle DCE$.



(Ejercicio 20)

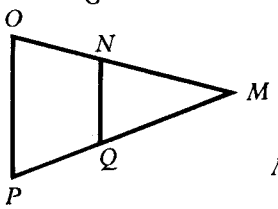
21. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\overline{AG}$ y $\overline{DH}$ son alturas.
Pruébese: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AG}{DH}$.



(Ejercicio 21)

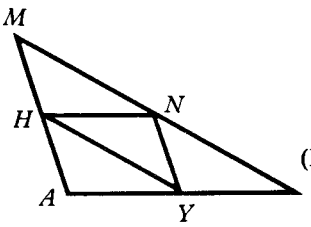
22. Dado: $\overline{NQ} \parallel \overline{OP}$.
Pruébese: **a.** $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$.

b. $\dfrac{MN}{MO} = \dfrac{NQ}{OP}$.



(Ejercicio 22)

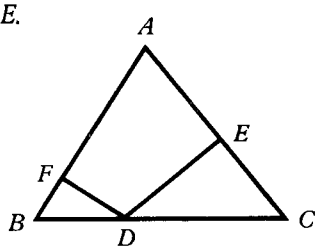
23. Dado: H, N e Y son puntos medios de $\overline{MA}$, $\overline{ME}$ y $\overline{AE}$.
Pruébese: $\triangle HNY \sim \triangle EAM$.



(Ejercicio 23)

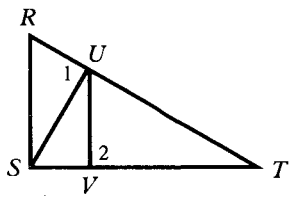
24. Dado: $\angle B \cong \angle C$, $\overline{DF} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$.
Pruébese: **a.** $\triangle BDF \sim \triangle CDE$.

b. $\dfrac{FD}{ED} = \dfrac{BD}{CD}$.

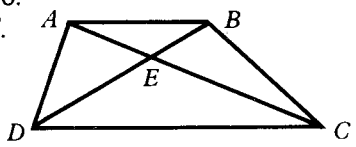


C.

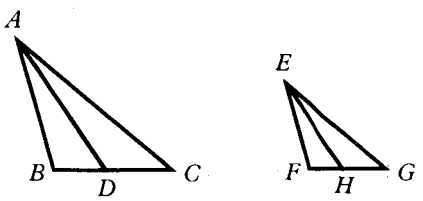
25. Dado: $\angle RST$, $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.
Pruébese: **a.** $\triangle RSU \sim \triangle RTS$.
b. $\triangle UVT \sim \triangle RUS$.



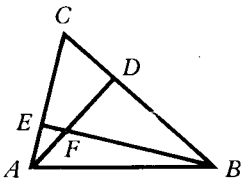
26. Dado: $ABCD$ es un trapecio.
Pruébese: $AE \cdot DE = BE \cdot CE$.



27. Dado: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$
$\overline{AD}$ biseca a $\angle A$
$\overline{EH}$ biseca a $\angle E$.
Pruébese: $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AD}{EH}$.



28. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.
Pruébese: **a.** $\dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$.
b. $AD \cdot BC = AC \cdot BE$.



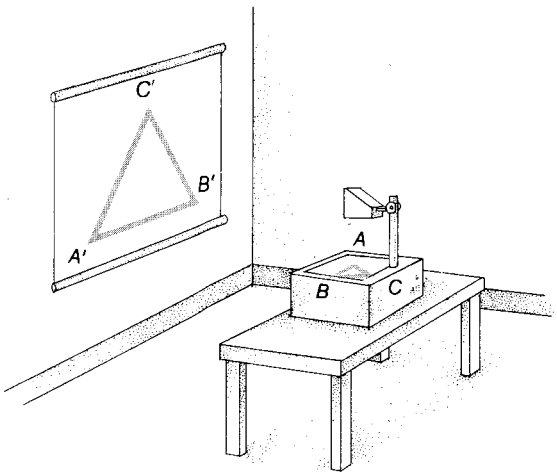
ACTIVIDADES

Colóquese un proyector a 10 pies de una pantalla y perpendicular a ésta. Colóquese un triángulo ABC en el proyector. Llámese triángulo $A'B'C'$ al que aparece en la pantalla.

1. Mídase $\angle A$ y su imagen $\angle A'$. ¿Qué relación tienen?
2. Mídanse las longitudes AB y $A'B'$, AC y $A'C'$ y BC y $B'C'$.

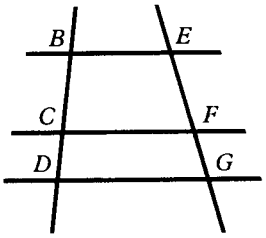
¿Cuál es la razón entre $\dfrac{AB}{A'B'}$, $\dfrac{AC}{A'C'}$ y $\dfrac{BC}{B'C'}$?

¿Qué conclusión se saca de $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?



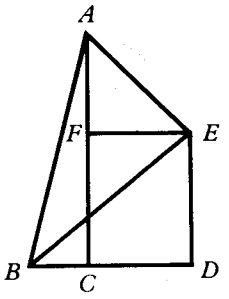
29. Dado: $\overline{BE} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{DG}$.

Pruébese: $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{EF}{FG}$.



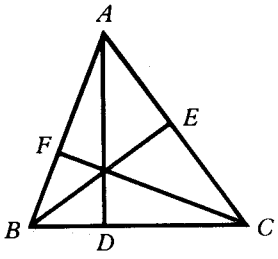
30. Dado: $\overline{AC} \perp \overline{FE}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AE} \perp \overline{BE}$.

Pruébese: $\triangle AFE \sim \triangle BDE$.



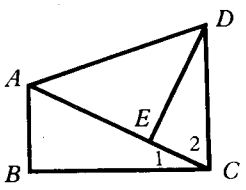
31. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{FC} \perp \overline{AB}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

Pruébese: $\dfrac{AF}{BF} \cdot \dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{AE} = 1$.



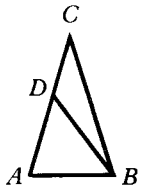
32. Dado: $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$.

Pruébese: $BC \cdot CE = ED \cdot AB$.



33. Dado: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{BA} \cong \overline{BD}$.

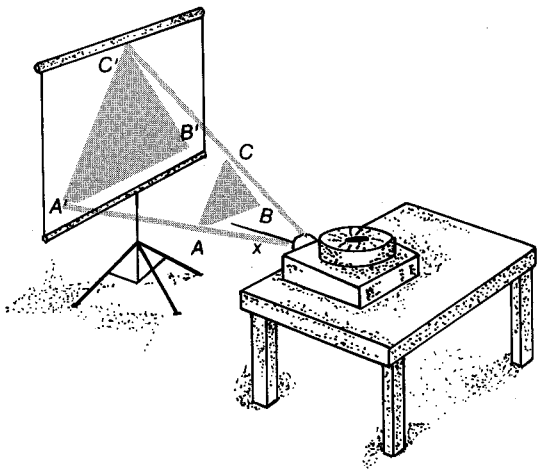
Pruébese: $(AB)^2 = AC \cdot AD$.



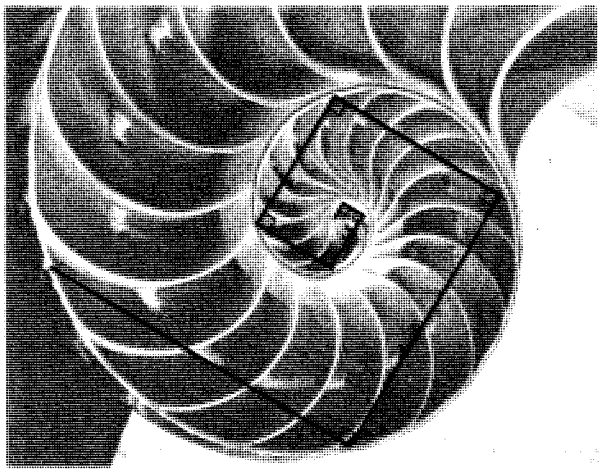
SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase que se coloca un proyector de transparencias a 20 pies de la pantalla. Supóngase que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle A'B'C'$.

1. Si se corta un triángulo $\triangle ABC$ y se coloca a x pies frente al proyector, calcúlese la longitud $A'B'$ en función de la longitud AB y de la distancia x.
2. Si x se reduce a la mitad, ¿qué pasa con $A'B'$?



9.5 Triángulos rectángulos y triángulos semejantes



Un ejemplo interesante de semejanza entre triángulos rectángulos en la naturaleza es la concha de un nautilo. La fotografía muestra una concha cortada por la mitad para revelar su construcción espiral. Esta espiral puede aproximarse mediante una sucesión de segmentos colocados en ángulos rectos. Esta espiral está relacionada con el teorema de esta sección.

Se empezará con un ejemplo y una definición.

La media geométrica entre 4 y 16 es 8, dado que

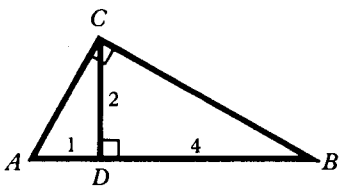
$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16}.$$

El concepto de media geométrica se emplea en el teorema siguiente.

Definición 9.3

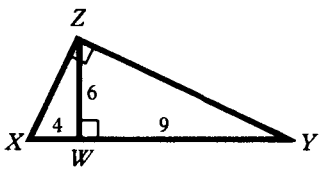
Un número x es una **media geométrica** entre dos números a y b si

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},\ x \neq 0,\ b \neq 0.$$



Obsérvese que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}.$$



Obsérvese que

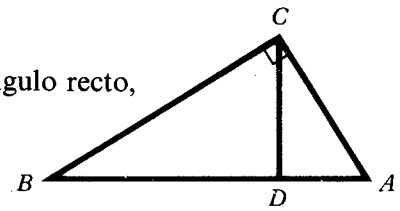
$$\frac{XW}{WZ} = \frac{WZ}{WY}.$$

Teorema 9.10 En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa.

PRUEBA

Dado: $\triangle ABC$ con $\angle C$ como ángulo recto, $\overline{CD}$ es una altura.

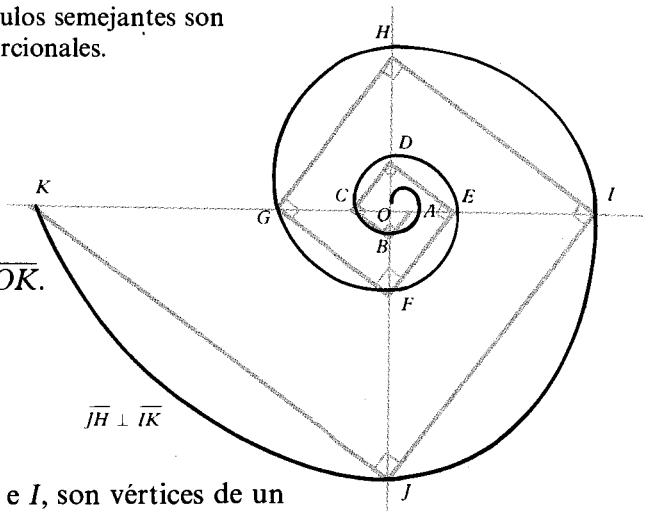
Pruébese: $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$.



Afirmaciones	Razones
1. $\angle ADC$ es un ángulo recto.	1. $\overline{CD}$ es una altura.
2. $\angle BDC$ es un ángulo recto.	2. ¿Por qué?
3. $\angle C$ es un ángulo recto.	3. Dado.
4. $\angle BCD$ es complementario de $\angle ACD$.	4. ¿Por qué?
5. $\angle CAD$ es complementario de $\angle ACD$.	5. ¿Por qué?
6. $\angle BCD \cong \angle CAD$.	6. ¿Por qué?
7. $\angle ADC \sim \angle CDB$.	7. Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.
8. $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$.	8. Partes correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

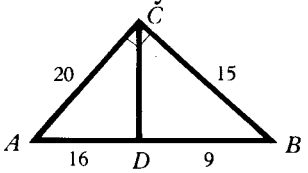
APLICACION

La concha del nautilo está basada en una media geométrica. Considérese la sucesión de radios:
$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, $\overline{OH}$, $\overline{OI}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OK}$.
La longitud de cada uno de estos segmentos es una media geométrica entre la longitud del segmento precedente y la del siguiente.



Cada tres puntos sucesivos, por ejemplo, G, H e I, son vértices de un triángulo rectángulo. Además, $\overline{OH}$ es una altura de $\triangle GHI$. Por tanto, por el teorema 9.10, OH es la media geométrica entre OG y OI.

Este triángulo ilustra el teorema 9.11. La prueba de este teorema se deja como ejercicio.



Obsérvese que

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ y } \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Teorema 9.11 Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

EJERCICIOS

A.

¿Cuál es la media geométrica entre los números de los ejercicios 1 a 4?

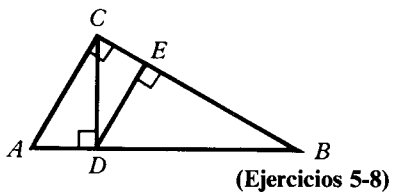
1. 4 y 9. **2.** 9 y 16. **3.** 4 y 5. **4.** $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

5. La longitud $\overline{CD}$ es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?

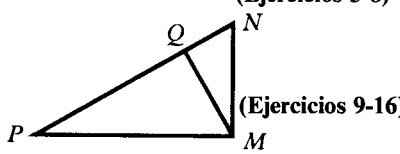
6. La longitud $\overline{DE}$ es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?

7. La longitud $\overline{AC}$ es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles? (Véase Teorema 9.11.)

8. La longitud $\overline{BC}$ es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos, ¿cuáles?



(Ejercicios 5-8)



(Ejercicios 9-16)

Para los ejercicios 9 a 16, empléese esta figura en la cual $\angle PMN$ es un ángulo recto y $\overline{MQ} \perp \overline{PN}$.

9. $PQ = 9$, $QN = 4$. Encuéntrese MQ.

10. $QN = 3$, $MQ = 9$. Encuéntrese PQ.

11. $PM = 12$, $PQ = 9$. Encuéntrese PN.

12. $MN = 8$, $QN = 6$. Encuéntrese PN.

13. $PN = 75$, $PQ = 72$. Encuéntrese MN.

14. $MQ = 4$, $PN = 10$. Encuéntrese QN.

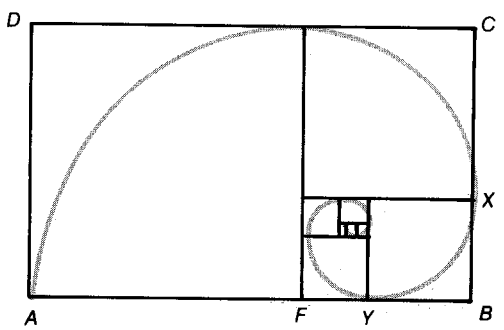
15. $PN = 13$, $PM = 12$. Encuéntrese MQ.

16. $PM = 16$, $MN = 12$. Encuéntrese PQ.

ACTIVIDADES

Una espiral semejante a la de una concha de nautilo está basada en el rectángulo áureo y puede construirse con un compás y una regla.

1. Constrúyase un rectángulo áureo *ABCD* como se muestra en la sección «La geometría en nuestro mundo» de la página 301.
2. Divídase el rectángulo *BCEF* en un cuadrado y un rectángulo, y continúese subdividiendo el rectángulo resultante en un cuadrado y un rectángulo.
3. En cada cuadrado, constrúyase un arco de círculo como el que se muestra en el dibujo. El centro de cada arco es un vértice del cuadrado.

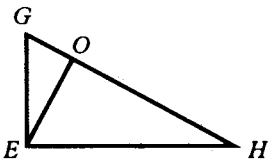


B.

17. Supóngase que $m\angle HEG = 90$ y $\overline{EO} \perp \overline{HG}$. Si $HO = 6$ y $EG = 4$, encuéntrese OG.

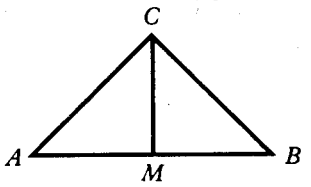
18. Supóngase que $m\angle HEG = 90$, $\overline{EO} \perp \overline{HG}$, $EO = 8$ y $\frac{HO}{OG} = \frac{2}{1}$. Encuéntrese HO.

19. Supóngase que $m\angle HEG = 90$, $\overline{EO} \perp \overline{HG}$, $HO = 10$ y $OG = 8$. Encuéntrese $HE \cdot EG$.



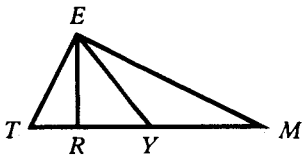
(Ejercicios 17-19)

20. **Dado:** $m\angle ACB = 90$, $\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $AB \cdot CM = (AC)^2$.
Pruébese: $AC = BC$.

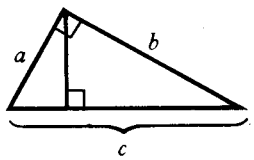


C.

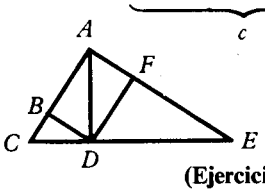
21. **Dado:** $m\angle TEM = 90$, $\overline{RE} \perp \overline{TM}$, $TY = YM$, $ER = 4\frac{4}{5}$, $TE = 6$.
Pruébese: RY.



22. Empléense el teorema 9.11 y la figura para mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras).



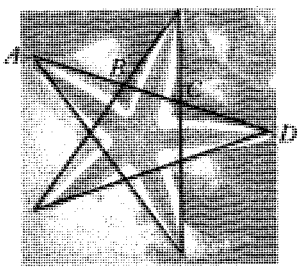
23. Supóngase que $AFDB$ es un rectángulo y que $\overline{AD} \perp \overline{CE}$. Muéstrese que el área de $AFDB = \sqrt{BC \cdot BA \cdot AF \cdot FE}$.



(Ejercicio 23)

24. Pruébese el teorema 9.11.

25. En una estrella de mar se encuentra la media geométrica de varias formas. Por ejemplo, en la estrella de cinco puntas que se muestra en la fotografía, AB es la media geométrica entre BC y AC. Acéptese esto como un hecho y empléese para mostrar que AC también es la media geométrica entre AB y AD. (*Sugerencia:* Empléese el teorema 9.2.)



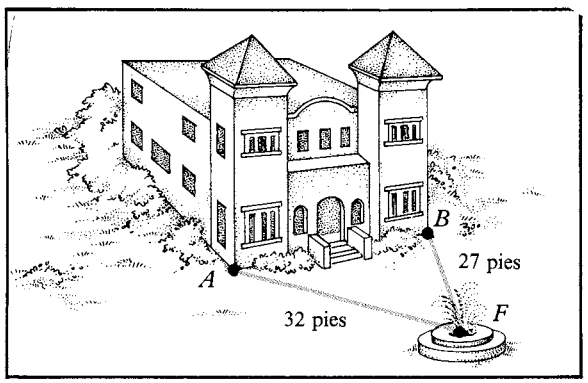
$AB = CD$

SOLUCION DE PROBLEMAS

Muéstrese que la espiral construida en la actividad anterior es una espiral de una concha de nautilo.

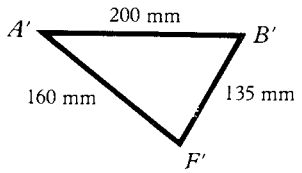
Esto es, muéstrese que EX es la media geométrica entre AE y XY. (*Sugerencia:* Empléense la definición del rectángulo áureo de «La geometría en nuestro mundo» de la página 300, y el hecho de que $ABCD$ y $BCEF$ son rectángulos áureos.)

9.6 Teoremas de la semejanza LLL y LAL



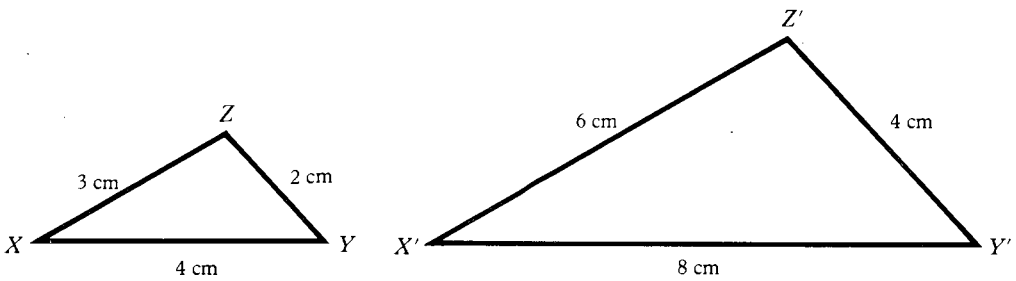
Se va a instalar una fuente a 32 pies de una esquina de un edificio y a 27 pies de la otra esquina. El edificio tiene 40 pies de ancho.

En el conjunto de planos para este proyecto se emplea una escala de 5 mm por pie. Después de localizar las esquinas A' y B' del edificio del dibujo, se localiza un punto F' a 160 mm de A' (5×32) y a 135 mm de B' (5×27). ¿Son semejantes $\triangle ABF$ y $\triangle A'B'F'$?



En el siguiente ejemplo, $\triangle XYZ$ y $\triangle X'Y'Z'$ se dibujaron de manera que

$$\frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{XZ}{X'Z'}.$$



Cuando los lados de los triángulos se trazan proporcionalmente, entonces $m\angle X = m\angle X' = 30$, $m\angle Y = m\angle Y' = 46$ y $m\angle Z = m\angle Z' = 104$.

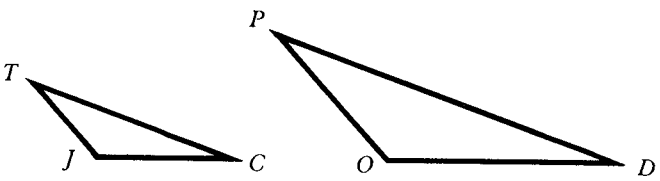
Estos ejemplos sugieren el teorema llamado teorema de la semejanza LLL.

Teorema 9.12 **Teorema de la semejanza LLL.** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

El teorema 9.12 establece que

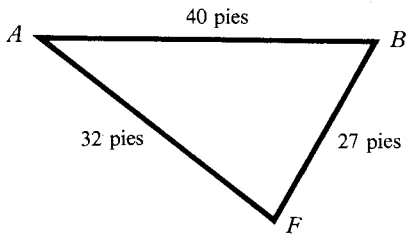
si $\frac{TJ}{PO} = \frac{JC}{OD} = \frac{TC}{PD}$,

entonces $\triangle TJC \sim \triangle POD$.



APLICACION

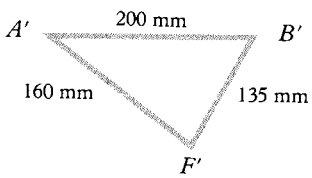
En el ejemplo del principio de esta sección hay un triángulo cuyos lados miden 27 pies, 32 pies y 40 pies, y un dibujo a escala de lados 135 mm, 160 mm y 200 mm. ¿Son semejantes estos triángulos?



Dado que

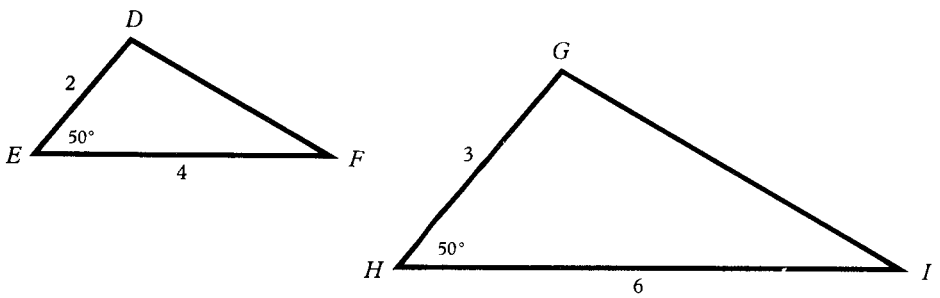
$$\frac{40}{200} = \frac{32}{160} = \frac{27}{135} = \frac{1}{5},$$

el teorema 9.12 responde a esta pregunta. Sí, $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$.



Hay otra manera de mostrar que dos triángulos son semejantes.

$\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ se construyeron de manera que $\frac{DE}{GH} = \frac{EF}{HI}$ y $\angle E \cong \angle H$.



Estas condiciones implican que $\angle F \cong \angle I$ y $\angle D \cong \angle G$. Este ejemplo sugiere el siguiente teorema, llamado teorema de la semejanza LAL.

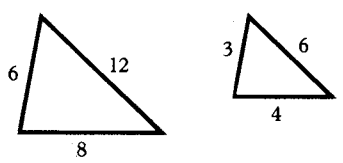
Teorema 9.13 **Teorema de la semejanza LAL.** Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

EJERCICIOS

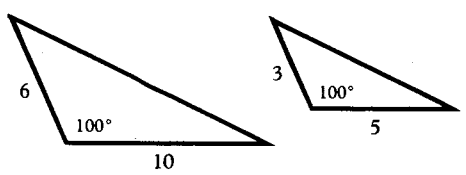
A.

En los ejercicios 1 a 4, empléese la información dada para determinar si los triángulos son semejantes. Las decisiones deben basarse en las medidas dadas, más que en la forma de los dibujos. Si los triángulos son semejantes, determínese cuál de los tres teoremas de semejanza se aplicó. (AA, LAL o LLL).

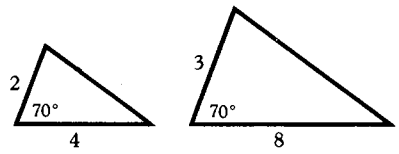
1.



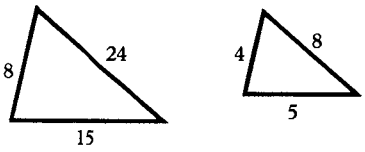
2.



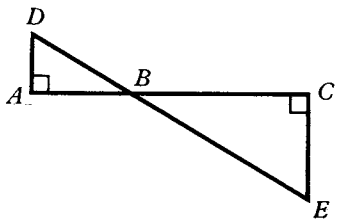
3.



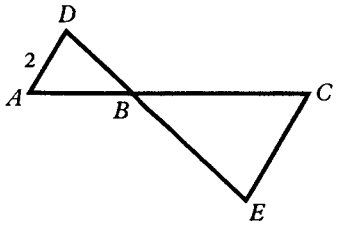
4.



5. Si $AB = 4$ y $BC = 7$, encuéntrese $\dfrac{AD}{CE}$.

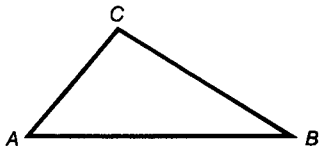


6. Si el punto B divide $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ en tercios, ¿cuál es la longitud de $\overline{CE}$?



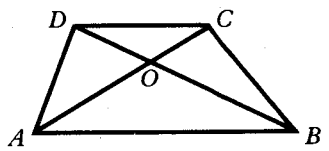
ACTIVIDADES

1. Constrúyase $\triangle ABC$ con lados de 10 cm, 13 cm y 17 cm de largo. Encuéntrese el punto de intersección de las bisectrices perpendiculares de los lados.
2. Este punto es el centro del círculo que pasa por los tres vértices. Este círculo se llama círculo circunscrito. Trácese este círculo.
3. Después, trácese el círculo de nueve puntos, como se describió en la página 246.
4. ¿Qué relación existe entre el radio del círculo circunscrito y el radio del círculo de nueve puntos?

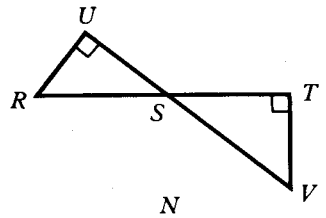


B.

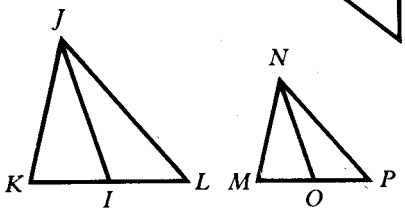
7. **Dado:** Trapecio $ABCD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle AOB \sim \triangle COD$.



8. **Dado:** $\overline{RU} \perp \overline{UV}$, $\overline{TV} \perp \overline{RT}$.
Pruébese: $\triangle RSU \sim \triangle VST$.

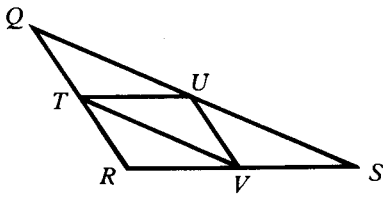


9. **Dado:** $\triangle JKL \sim \triangle NMP$.
$\overline{JI}$ y $\overline{NO}$ son medianas.
Pruébese $\dfrac{JI}{NO} = \dfrac{JK}{NM}$.



(Ejercicio 9)

10. **Dado:** T, U, y V son puntos medios.
Pruébese: $\triangle QRS \sim \triangle VUT$.



(Ejercicio 10)

11. Dibújese un contraejemplo para la proposición siguiente. Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y un ángulo del primer triángulo es congruente con un ángulo del segundo triángulo, los triángulos son semejantes.

C.

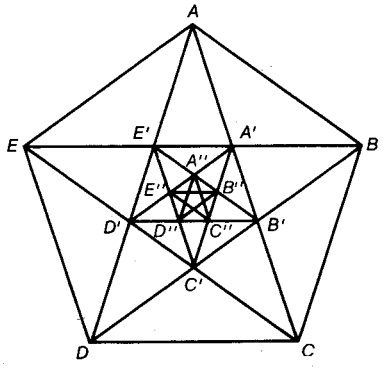
12. **Pruébese:** Las diagonales correspondientes de dos cuadriláteros semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes.

13. **Pruébese:** Dos triángulos isósceles con ángulos de los vértices congruentes son semejantes.

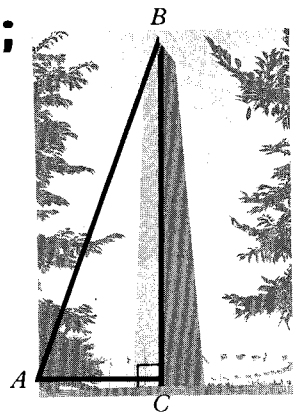
14. Dibújese un triángulo dados dos ángulos agudos y la longitud de la altura al lado incluido.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Identifíquense tantas figuras de diferente forma como sea posible, y para las cuales se pueda encontrar otra figura que sea semejante.

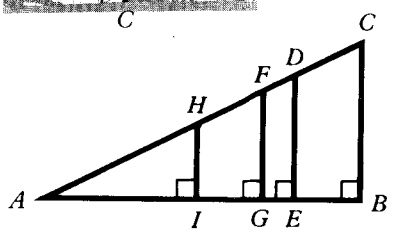


9.7 Razones trigonométricas; una aplicación de los triángulos semejantes

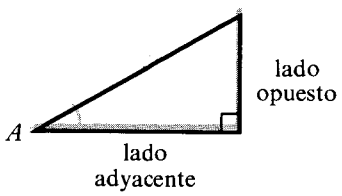


La altura de edificios muy altos puede determinarse con la ayuda de las razones de un triángulo rectángulo.

Si se conocen la distancia AC y la medida de $\angle A$, la altura BC puede calcularse por el método que se estudia en esta sección.



En esta figura, $\triangle ABC \sim \triangle AED \sim \triangle AGF \sim \triangle AIH$. Por tanto, las razones entre los lados correspondientes son iguales.

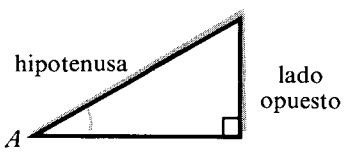


Las relaciones $\frac{BC}{AB}, \frac{DE}{AE}, \frac{FG}{AG}$ y $\frac{HI}{AI}$ de la figura anterior son iguales. Estas razones se asocian con $\angle A$ y se llaman *tangente* de $\angle A$, que se abrevia *tan A*.

Definición 9.4

La **tangente** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud del lado adyacente}}.$$

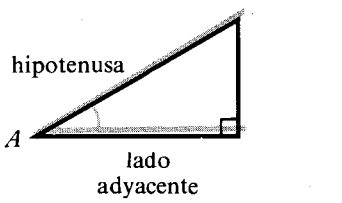


Las razones $\frac{BC}{AC}, \frac{ED}{AD}, \frac{GF}{AF}$ e $\frac{IH}{AH}$ son iguales. Estas razones, asociadas con $\angle A$, se llaman *seno* de $\angle A$, que se abrevia *sen A*.

Definición 9.5

El **seno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}.$$



Las razones $\frac{AB}{AC}, \frac{AE}{AD}, \frac{AG}{AF}$ y $\frac{AI}{AH}$ son iguales. Estas razones, asociadas con $\angle A$, se llaman *coseno* de $\angle A$, que se abrevia *cos A*.

Definición 9.6

El **coseno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón

$$\frac{\text{longitud del lado adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

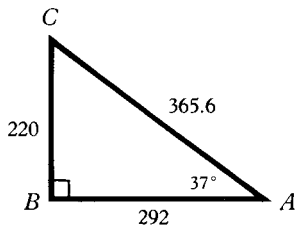
Ejemplo 1

En la figura de la derecha puede observarse que

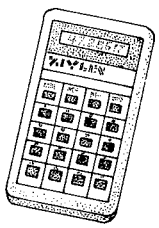
$$\tan 37° = \frac{220}{292} \doteq 0.7534,$$

$$\text{sen } 37° = \frac{220}{365.6} \doteq 0.6018,$$

$$\cos 37° = \frac{292}{365.6} \doteq 0.7986.$$



Estas razones trigonométricas pueden encontrarse para varios ángulos por medio de una tabla de valores como la que aparece aquí o con una calculadora que tenga funciones trigonométricas.



Ejemplo 2

Por la tabla de valores aproximados, puede verse que

$\tan 42° = 0.9004,$
$\text{sen } 42° = 0.6691,$
$\cos 42° = 0.7431.$

APLICACION

Una persona situada a 1000 pies de la base del monumento a Washington encuentra que $\angle A$ es aproximadamente 29°. ¿Cuál es la altura aproximada del monumento?

$$\tan 29° = \frac{x}{1000} \quad \text{o} \quad x = 1000 \times \tan 29°$$

$$= 1000 \times 0.5543 = 554.3 \text{ pies}$$

$m\angle A$ en grados	tan A	sen A	cos A
1	0.0175	0.0175	0.9998
2	0.0349	0.0349	0.9994
3	0.0524	0.0523	0.9986
4	0.0699	0.0698	0.9976
5	0.0875	0.0872	0.9962
6	0.1051	0.1045	0.9945
7	0.1228	0.1219	0.9925
8	0.1405	0.1392	0.9903
9	0.1584	0.1564	0.9877
10	0.1763	0.1736	0.9848
11	0.1944	0.1908	0.9816
12	0.2126	0.2079	0.9781
13	0.2309	0.2250	0.9744
14	0.2493	0.2419	0.9703
15	0.2679	0.2588	0.9659
16	0.2867	0.2756	0.9613
17	0.3057	0.2924	0.9563
18	0.3249	0.3090	0.9511
19	0.3443	0.3256	0.9455
20	0.3640	0.3420	0.9397
21	0.3839	0.3584	0.9336
22	0.4040	0.3746	0.9272
23	0.4245	0.3907	0.9205
24	0.4452	0.4067	0.9135
25	0.4663	0.4226	0.9063
26	0.4877	0.4384	0.8988
27	0.5095	0.4540	0.8910
28	0.5317	0.4695	0.8829
29	0.5543	0.4848	0.8746
30	0.5774	0.5000	0.8660
31	0.6009	0.5150	0.8572
32	0.6249	0.5299	0.8480
33	0.6494	0.5446	0.8387
34	0.6745	0.5592	0.8290
35	0.7002	0.5736	0.8192
36	0.7265	0.5878	0.8090
37	0.7536	0.6018	0.7986
38	0.7813	0.6157	0.7880
39	0.8098	0.6293	0.7771
40	0.8391	0.6428	0.7660
41	0.8693	0.6561	0.7547
42	0.9004	0.6691	0.7431
43	0.9325	0.6820	0.7314
44	0.9657	0.6947	0.7193
45	1.0000	0.7071	0.7071

EJERCICIOS

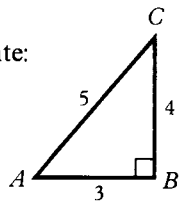
A.

1. Complétese lo siguiente:

$\tan A = \underline{?}$.

$\operatorname{sen} A = \underline{?}$.

$\cos A = \underline{?}$.

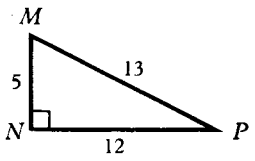


2. Complétese lo siguiente:

$\tan M = \underline{?}$.

$\operatorname{sen} P = \underline{?}$.

$\cos P = \underline{?}$.



Para los ejercicios 3 a 14, empléense las tablas trigonométricas.

3. $\operatorname{sen} 17° = \underline{?}$.

4. $\cos 43° = \underline{?}$.

5. $\tan 21° = \underline{?}$.

6. $\cos 13° = \underline{?}$.

7. $\tan 35° = \underline{?}$.

8. $\operatorname{sen} 37° = \underline{?}$.

Dadas las siguientes medidas aproximadas, encuéntrese el valor de $\angle A$ redondeando al grado más próximo.

9. $\tan \angle A = 0.7536$.

10. $\cos \angle A = 0.9985$.

11. $\operatorname{sen} \angle A = 0.2925$.

12. $\cos \angle A = 0.8290$.

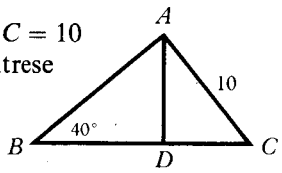
13. $\operatorname{sen} \angle A = 0.0699$.

14. $\tan \angle A = 0.9658$.

B.

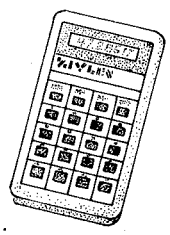
15. $\triangle ABC$ tiene $AB = AC = 10$ y $m\angle B = 40$. Encuéntrese la longitud de $\overline{AD}$.

16. $\triangle ABC$ tiene $AB = AC = 10$ y $m\angle B = 40$. Encuéntrese la longitud de $\overline{BD}$.



(Ejercicios 15, 16)

ACTIVIDADES



Empléese una calculadora para determinar lo siguiente:

1. a. $(\operatorname{sen} 57°)^2 + (\cos 57°)^2 = \underline{?}$. **b.** $(\operatorname{sen} 43°)^2 + (\cos 43°)^2 = \underline{?}$.

c. $(\operatorname{sen} 9°)^2 + (\cos 9°)^2 = \underline{?}$. **d.** $(\operatorname{sen} 24°)^2 + (\cos 24°)^2 = \underline{?}$.

e. ¿Qué puede decirse sobre $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ para todas las x?

2. a. Compárese $\dfrac{\operatorname{sen} 47°}{\cos 47°}$ con $\tan 47°$. **b.** Compárese $\dfrac{\operatorname{sen} 71°}{\cos 71°}$ con $\tan 71°$.

c. Compárese $\dfrac{\operatorname{sen} 33°}{\cos 33°}$ con $\tan 33°$. **d.** Compárese $\dfrac{\operatorname{sen} 66°}{\cos 66°}$ con $\tan 66°$.

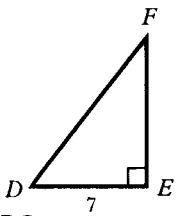
e. ¿Qué puede decirse sobre $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\tan x$?

17. sen $F = \frac{7}{25}$.

$FD =$?.

$FE =$?.

tan $D =$?.

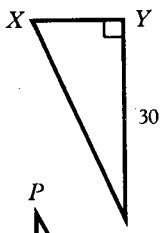


18. tan $Z = \frac{8}{15}$.

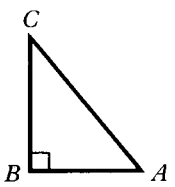
$XY =$?.

$XZ =$?.

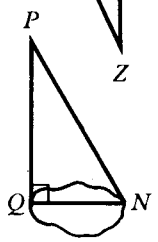
cos $X =$?.



19. Supóngase que $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = 5$. Empléense las tablas trigonométricas o una calculadora para determinar $m\angle A$ y $m\angle C$ en la mayor aproximación posible.

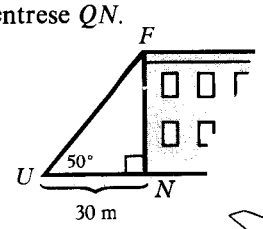


20. Supóngase que se desea encontrar la distancia a través del embalse QN. Se mide para encontrar que $PQ = 50$ m y determinar que $m\angle P = 44$. Encuéntrese QN.

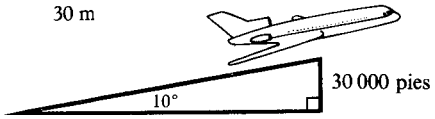


C.

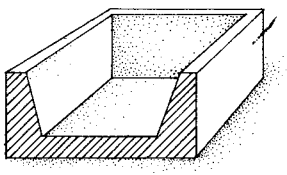
21. Supóngase que se desea encontrar la altura del edificio FN. $m\angle FUN = 50$ a una distancia de 30 metros de N. ¿Cuál es la longitud de FN?

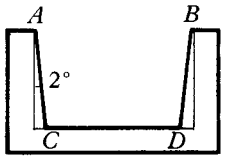


22. Si un aeroplano despega y asciende a una razón uniforme de 10° hasta alcanzar una altura de 30 000 pies, ¿cuál fue la distancia recorrida?



23. El oro derretido se vacía en moldes para formar lingotes. Para esto, se emplea un molde con forma de caja y con lados interiores inclinados. El ángulo de inclinación es la pendiente de los lados. Este ángulo es 2° y $BD = 6$ cm. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de AB y CD?

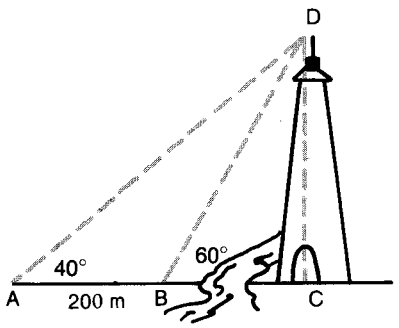




SOLUCION DE PROBLEMAS

Supóngase que se desea encontrar la altura (DC) de una torre, pero no es posible medir directamente las distancias AC y AB.

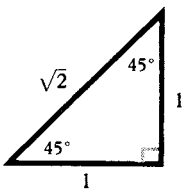
Si $m\angle A = 40$, $m\angle DBC = 60$ y $AB = 200$ m, encuéntrese DC.



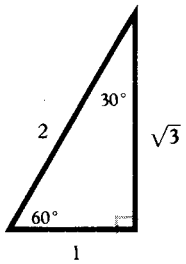
9.8 Razones trigonométricas de ángulos especiales

Así como los ángulos de 30°, 45° y 60°, son importantes para los diseñadores, también son ángulos especiales importantes para la trigonometría. Con frecuencia es útil conocer las razones trigonométricas de estos ángulos sin tener que recurrir a las tablas de valores o a una calculadora.

Por el teorema 7.3, se concluye que las longitudes de los lados de un triángulo de 45°-45°-90° tienen una razón $1:1:\sqrt{2}$.



Por el teorema 7.4, se concluye que las longitudes de los lados de un triángulo de 30°-60°-90° tienen una razón de $1:\sqrt{3}:2$.

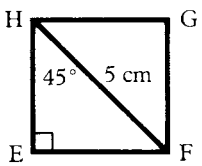


Esta tabla muestra las razones trigonométricas para estos ángulos especiales.

	30°	60°	45°
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 1

La diagonal de un cuadrado es 5 cm. Encuéntrese la longitud de un lado.



$$\text{sen } \angle EHF = \frac{EF}{5}.$$

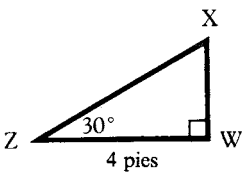
$$\text{sen } 45° = \frac{EF}{5}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{EF}{5}.$$

$$EF = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}.$$

Ejemplo 2

En el triángulo que se muestra, encuéntrense XW y XZ.



$$\tan \angle Z = \frac{XW}{4}.$$

$$\tan 30° = \frac{XW}{4}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{XW}{4}.$$

$$XW = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ pies}.$$

Dado que XZ es $2XW$, entonces $XZ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ pies.

EJERCICIOS

A.

En los ejercicios 1 a 6, complétese correctamente la proposición sin consultar la tabla de la página 331.

1. $\operatorname{sen} 45° = \underline{?}$.

2. $\cos 30° = \underline{?}$.

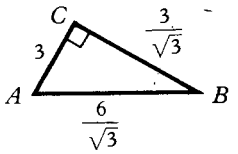
3. $\tan 60° = \underline{?}$.

4. $\cos 60° = \underline{?}$.

5. $\operatorname{sen} 30° = \underline{?}$.

6. $\tan 45° = \underline{?}$.

En los ejercicios 7 a 14, el triángulo rectángulo que se muestra no se dibujó con precisión. Acéptense las longitudes dadas de los lados. Complétense correctamente las proposiciones siguientes.



(Ejercicios 7-14)

7. $\operatorname{sen} A = \underline{?}$.

8. $\cos A = \underline{?}$.

9. $\tan A = \underline{?}$.

10. $\cos B = \underline{?}$.

11. $\tan B = \underline{?}$.

12. $\operatorname{sen} B = \underline{?}$.

13. $m\angle A = \underline{?}$.

14. $m\angle B = \underline{?}$.

B.

En los ejercicios 15 a 18, evalúense las expresiones dadas. Identifíquense aquellos pares de expresiones que sean iguales. Para todos los problemas, supóngase que $m\angle A = 30$.

15. $2 \operatorname{sen} A, 2 \operatorname{sen} A \cos A, \operatorname{sen} 2A$.

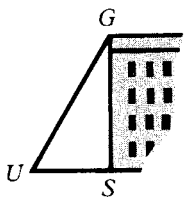
16. $\cos 2A, (\cos A)^2 - (\operatorname{sen} A)^2, 2(\cos A)^2 - 1$.

17. $\tan 2A, 2 \tan A, \dfrac{2 \tan A}{1 - (\tan A)^2}$.

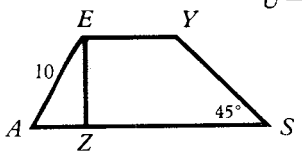
18. $2 \cos A, 1 - 2(\operatorname{sen} A)^2, \cos 2A$.

C.

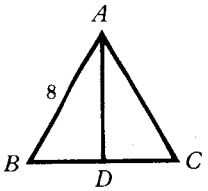
19. Si $m\angle GUS = 30$ y $US = 50$ m, ¿cuál es la altura del edificio?



20. El cuadrilátero $EASY$ es un trapecio isósceles con $EA = SY$. Si $EA = 10$ y $m\angle EAS = 45$, encuéntrese la longitud de la altura $\overline{EZ}$.



21. $\triangle ABC$ es equilátero. Encuéntrese la longitud de la altura $\overline{AD}$.



(Ejercicio 21)

22. Muéstrese que si $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto $\angle C$, entonces $(\operatorname{sen} A)^2 + (\cos A)^2 = 1$.

Capítulo 9 Conceptos importantes

Términos

Proporción (pág. 520)
Polígonos semejantes (pág. 529)
Media geométrica (pág. 538)
Tangente de un ángulo agudo (pág. 546)
Seno de un ángulo agudo (pág. 546)
Coseno de un ángulo agudo (pág. 546)

Postulado

Postulado de la semejanza AAA (pág. 316)

Teoremas

9.1 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$.

9.2 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

9.3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

9.4 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

9.5 Si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

9.6 **Teorema fundamental de la proporcionalidad.** Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

9.7 Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.

9.8 **Teorema de la semejanza AA.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

9.9 Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.

9.10 En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa.

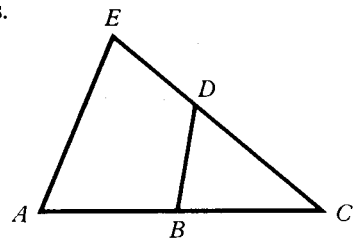
9.11 Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

9.12 **Teorema de la semejanza LLL.** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

9.13 **Teorema de la semejanza LAL.** Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Capítulo 9 Resumen

1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.



   a. Si $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, entonces $\frac{CD}{DE} = \frac{CB}{BA}$.

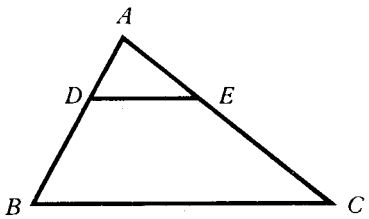
   b. Si $\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CA}$, entonces $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

   c. Si $CD = 4$, $DE = 3$, $BC = 8$, entonces $AB = 6$.

   d. Si $\angle A \cong \angle DBC$, entonces $\triangle EAC \sim \triangle DBC$.

   e. Si $CD = DE = AB = BC$, entonces $\triangle EAC \sim \triangle DBC$.

2. Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



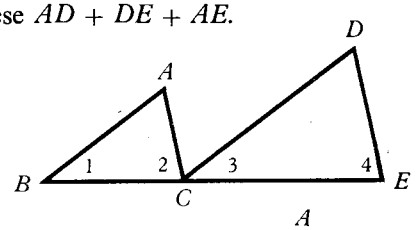
   a. $AD = 4$, $BD = 6$, $AE = 5$. Encuéntrese AC.

   b. $AB = 10$, $BD = 7$, $AC = 12$. Encuéntrese AE.

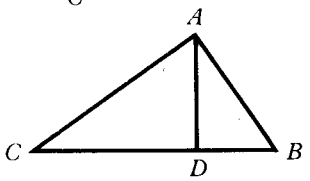
   c. $AD = 3$, $BD = 4$, $BC = 6$. Encuéntrese DE.

   d. $AB = BC = AC = 6$, $AD = 2$. Encuéntrese $AD + DE + AE$.

3. **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
   $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.
   Pruébese: $AB \cdot CE = BC \cdot DC$.



4. Supóngase que $m\angle CAB = 90$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

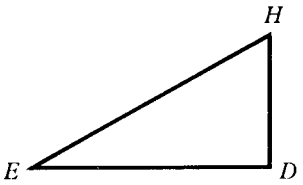


   a. Si $AB = 8$ y $BC = 12$, encuéntrese BD.

   b. Si $AC = 6$ y $DC = 4$, encuéntrese BC.

   c. Si $BD = 4$ y $AD = 6$, encuéntrese DC.

5. Supóngase que $m\angle D = 90$.



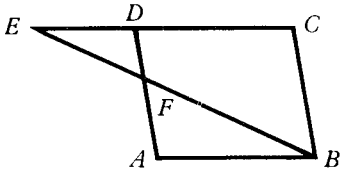
   a. Si $\operatorname{sen} \angle E = \frac{8}{17}$, encuéntrese $\tan \angle E$.

   b. Si $\cos \angle H = \frac{9}{41}$, encuéntrese $\cos \angle E$.

   c. Si $\tan \angle E = \frac{4}{3}$, encuéntrese $\cos \angle H$.

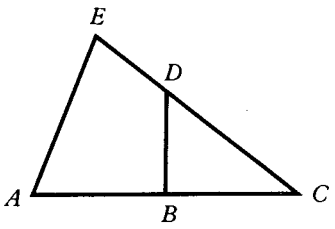
6. Si un árbol de 20 pies proyecta una sombra de 45 pies, ¿qué sombra proyectará un árbol de 30 pies?

7. **Dado:** La figura $ABCD$ es un paralelogramo.
   Pruébese: **a.** $\triangle ECB \sim \triangle EDF$
   b. $\triangle EDF \sim \triangle BAF$
   c. $\triangle ECB \sim \triangle BAF$

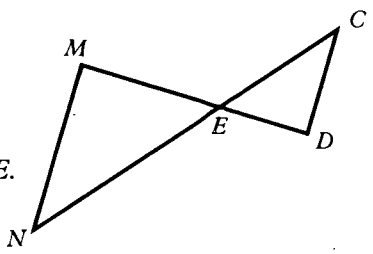


Capítulo 9 Examen

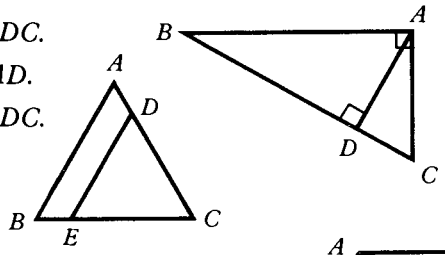
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a. Si $\overline{DB} \parallel \overline{AE}$, entonces $CD \cdot DE = BC \cdot AB$.
   b. Si $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$, entonces $\triangle AEC \sim \triangle BDC$.
   c. Si $\triangle AEC \sim \triangle BDC$, entonces $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AB}$.
   d. Si $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$, entonces $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.
   e. Si $DC \cdot AB = BC \cdot ED$, entonces $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



2. Supóngase que $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$.
   a. Si $ME = 2ED$, encuéntrese $\frac{NE}{EC}$.
   b. Si $ME = 4$, $NE = 5$ y $EC = 3$, encuéntrese ED.
   c. Si $ME = 4$, $DE = 2$ y $NC = 9$, encuéntrese EC.
   d. Si $MN = ME = NE = 6$ y $CE = 4$, encuéntrese $CE + CD + DE$.

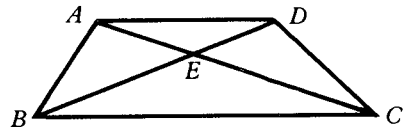


3. Supóngase que $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son triángulos rectángulos.
   a. Si $AC = 3$ y $AB = 4$, encuéntrese AD.
   b. Si $AB = 12$ y $BC = 13$, encuéntrese DC.
   c. Si $BD = 9$ y $BC = 15$, encuéntrese AD.
   d. Si $AC = 20$ y $BC = 40$, encuéntrese DC.

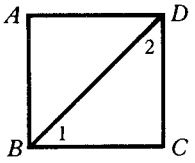


4. **Dado:** $AB = AC$
   $DE = DC$.
   Pruébese: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

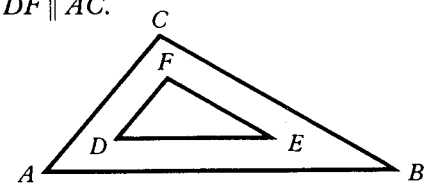
5. **Dado:** $ABCD$ es un trapecio.
   Pruébese: $DE \cdot EC = AE \cdot BE$.



6. $ABCD$ es un cuadrado con diagonal $\overline{BD}$.
   a. Encuéntrese tan $\angle 1$.
   b. Encuéntrese cos $\angle 2$.
   c. ¿Es cos $\angle 1$ = sen $\angle 1$?



7. **Dado:** $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$.
   Pruébese: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.



Técnicas para la solución de problemas

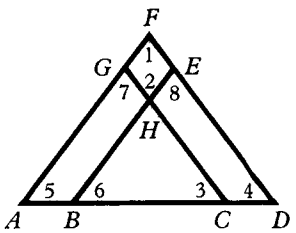
Trabájese hacia atrás

Algunas veces, al resolver problemas, es tan útil trabajar hacia atrás como hacia adelante. Plantéese esta pregunta: «¿Qué información se necesita para llegar a la conclusión deseada?»

Ejemplo

Considérese el problema siguiente utilizando las preguntas y respuestas que se dan como ayuda para resolver el problema.

Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Pruébese: $\triangle AGC \cong \triangle BED$.



a. Pregunta: ¿Cómo se puede demostrar que los triángulos son congruentes?

b. Pregunta: ¿Qué segmentos son congruentes?

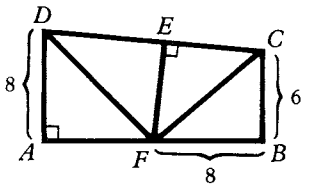
c. Pregunta: ¿Qué lados de los triángulos puede demostrarse que son congruentes?

d. Pregunta: ¿Qué ángulos de los triángulos puede demostrarse que son congruentes?

PROBLEMAS

Resuélvanse los problemas siguientes con el método de trabajo hacia atrás.

1. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
$\overline{EF}$ biseca, y es perpendicular, a $\overline{DC}$.
Encuéntrese: AF.



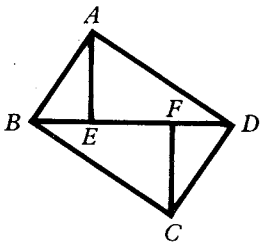
a. ¿Qué clase de triángulo es $\triangle ADF$?

b. ¿Puede usarse aquí el teorema de Pitágoras?

c. Para encontrar AF, ¿qué lado de $\triangle ADF$ es necesario encontrar?

d. ¿Qué se sabe acerca de DF?

2.



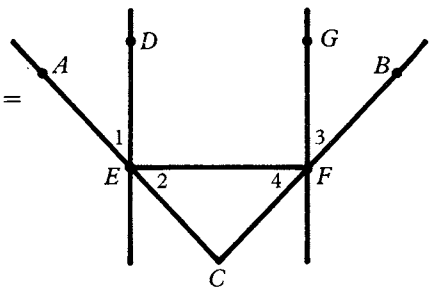
Dado: $m\angle BAD = m\angle DCB = 90$,
$\overline{AE} \perp \overline{BD}$, $\overline{FC} \perp \overline{BD}$,
$AB = CD = 9$, $AD = BC = 12$.
Encuéntrese: EF.

3. Supóngase que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong 4$. ¿Cuál debe ser la medida de $\angle C$ para que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$?

a. Supóngase que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$. Entonces, $m\angle DEF + m\angle \mathrm{GFE} =$
$= 180$.

b. Sea $m\angle 1 = m\angle 2 = x$, y $m\angle 3 = m\angle 4 = y$. Encuéntrese una expresión para $m\angle 2 + m\angle 4$ y después para $m\angle C$.

c. Inviértase el orden de este razonamiento para probar que la respuesta asegura que $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$.



TEMA 14

Círculos

CAPÍTULO 10

10.1 Definiciones básicas 558

10.2 La medición en grados de los arcos 562

10.3 Cuerdas y distancias desde el centro 566

10.4 Perpendiculares a las cuerdas 570

10.5 Tangentes a los círculos 576

10.6 Tangentes desde un punto a un círculo 580

10.7 Medidas de ángulos inscritos 584

10.8 Ángulos formados por cuerdas 590

10.9 Ángulos y segmentos formados por tangentes y secantes 594

Conceptos importantes 602

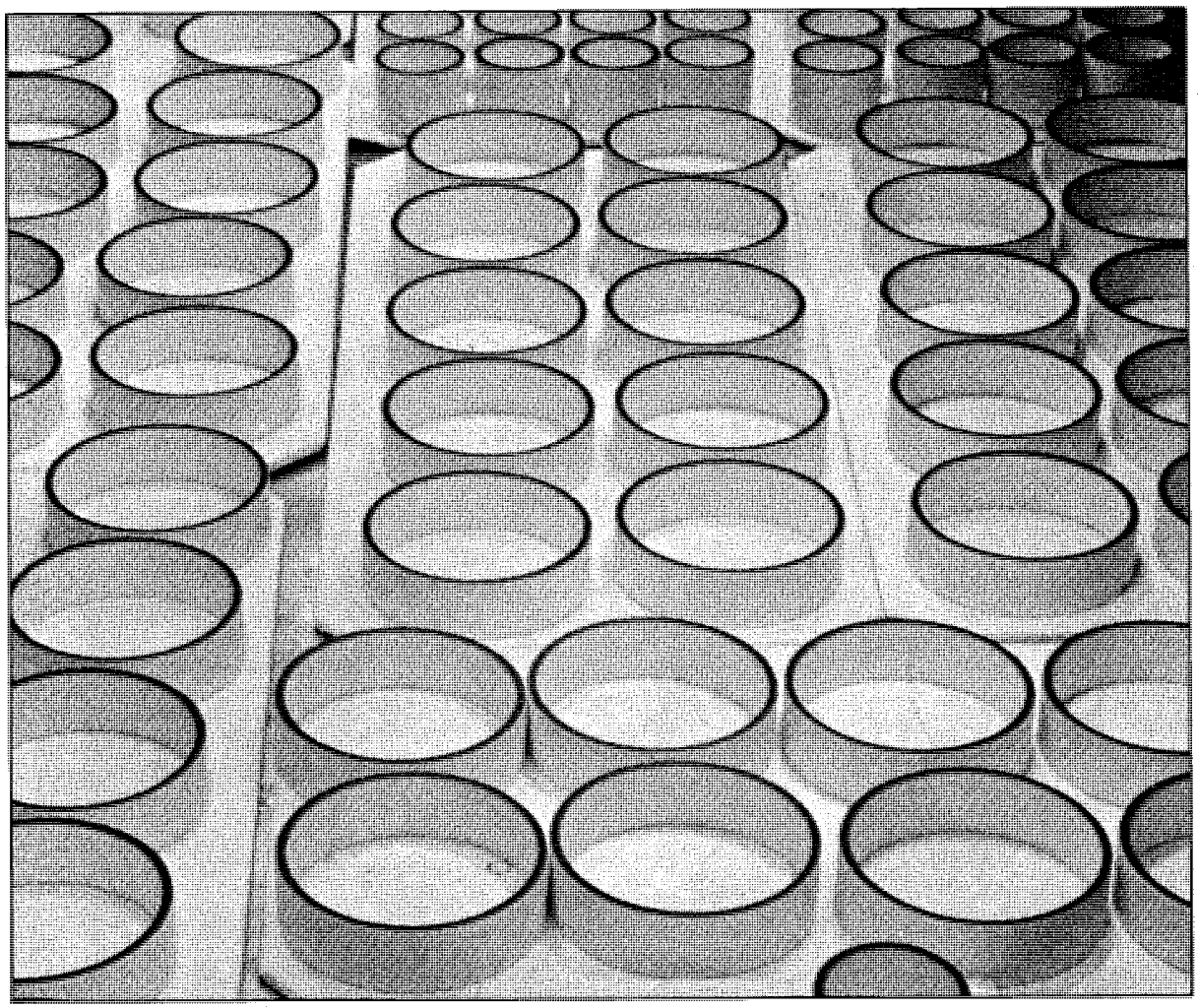
Resumen 603

Examen 604

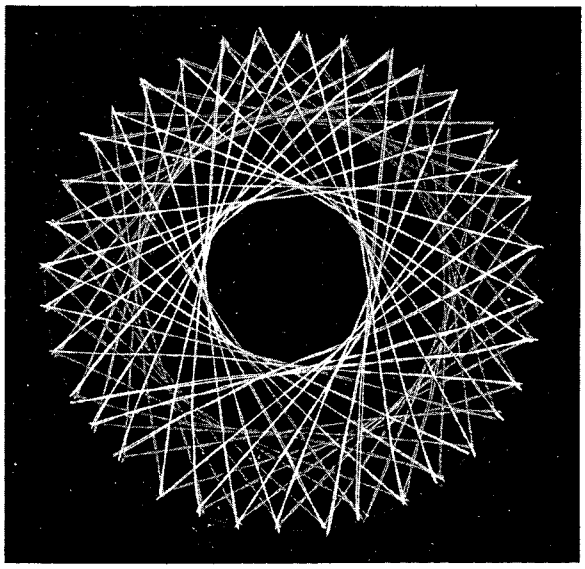
Resumen global (Caps. 8 a 10) 605

La geometría en nuestro mundo
Agrimensura: el teodolito 606

Círculos

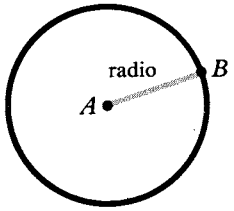


10.1 Definiciones básicas



Recuérdese que un círculo es un conjunto de puntos en un plano que están situados a la misma distancia de un punto fijo.

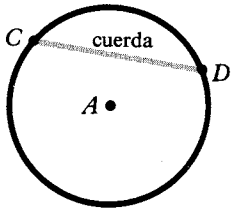
En esta sección se definirán términos relacionados con los círculos.



$\overline{AB}$ es el *radio* de $\odot A$. Cada punto del círculo es el extremo de otro radio.

Definición 10.1

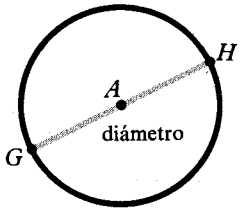
Un **radio** de un círculo es un segmento cuyos extremos son el centro del círculo y un punto del círculo.



$\overline{CD}$ es una *cuerda* $\odot A$. Cada par de puntos del círculo determina una cuerda del círculo.

Definición 10.2

Una **cuerda** de un círculo es un segmento cuyos extremos son dos puntos del círculo.

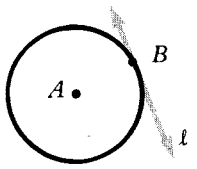


$\overline{GH}$ es un *diámetro de* $\odot A$. Cada par de puntos del círculo colineales con A determinan un diámetro del círculo.

Definición 10.3

Un **diámetro** de un círculo es una cuerda que contiene el centro del círculo.

Cuerdas, radios y diámetros son segmentos relacionados con los círculos. Las definiciones siguientes describen algunas rectas y ángulos también relacionados con los círculos.

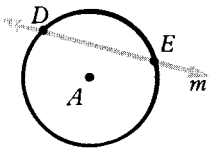


La recta ℓ sólo tiene a B como punto común con $\odot A$.

La recta ℓ es *tangente* a $\odot A$. El punto B es el *punto de tangencia.*

Definición 10.4

Una **tangente** a un círculo es una recta que interseca al círculo exactamente en un punto.

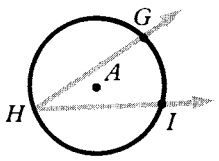


La recta m tiene dos puntos en común con $\odot A$.

La recta m es una *secante* de $\odot A$.

Definición 10.5

Una **secante** de un círculo es una recta que interseca al círculo exactamente en dos puntos.

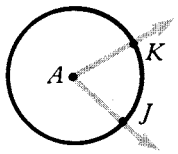


El vértice de $\angle GHI$ está en $\odot A$. Los lados de $\angle GHI$ intersecan a $\odot A$ en los puntos G e I.

$\angle GHI$ es un *ángulo inscrito.*

Definición 10.6

Un **ángulo inscrito** es un ángulo con vértice en el círculo y con lados que contienen cuerdas del círculo.

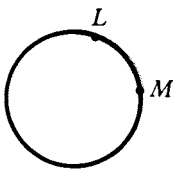


El vértice de $\angle KAJ$ es el centro de $\odot A$.

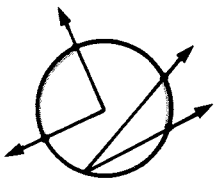
$\angle KAJ$ es un *ángulo central.*

Definición 10.7

Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo.

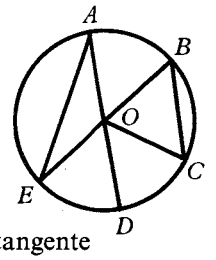


Se define un *arco* como una parte continua de un círculo. Se escribe $\overset{\frown}{LM}$ para representar al *arco* LM. Un *arco interceptado* es un arco con extremos en los lados de ángulos inscritos o centrales.



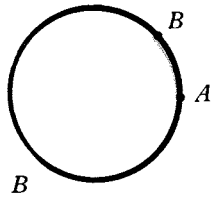
EJERCICIOS

A.

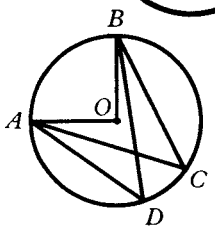


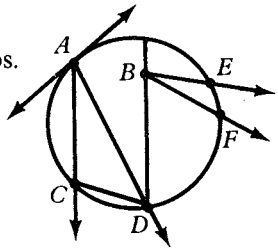
(Ejercicios 1-4)

1. Cítense todas las cuerdas de la figura.
2. Cítense los diámetros de la figura.
3. Cítense por lo menos cuatro arcos de la figura.
4. Cítense todos los radios de la figura.
5. Dibújese un círculo con centro T. Trácese una recta tangente al círculo en el punto B. Trácese una recta secante que interseque al círculo en los puntos F y G.
6. Dibújense un círculo y un ángulo inscrito. Si el arco interceptado por ese ángulo es $\overset{\frown}{PQ}$, localícese en el círculo.
7. Dibújense un círculo y un ángulo central. Si el arco interceptado por ese ángulo es $\overset{\frown}{XY}$, localícese en el círculo.
8. Dibújese un círculo y localícese un arco según se muestra en la figura. Después, dibújese un ángulo inscrito que intercepte a $\overset{\frown}{AB}$.



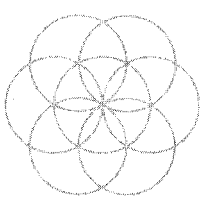
9. Dibújese un círculo y denomínese $\overset{\frown}{CD}$ a un arco. Dibújense dos ángulos inscritos diferentes, ambos con el arco interceptado $\overset{\frown}{CD}$.
10. Cítense todos los ángulos con el arco interceptado $\overset{\frown}{AB}$ y con el arco interceptado $\overset{\frown}{CD}$.
11. Cítense todos los ángulos inscritos.

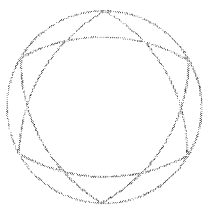


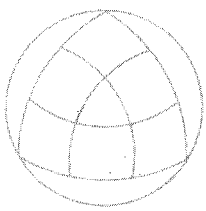


ACTIVIDADES

Con un compás, dibújense ejemplos en grande de cada uno de los diseños de «técnica de compás» que se ilustran a continuación. Elabórense diseños originales y coloréense de manera interesante.

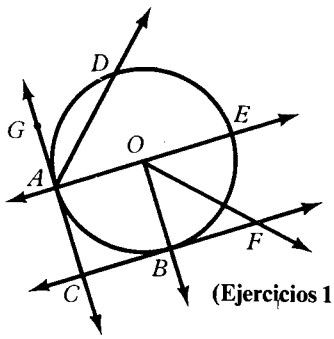






12. Cítense todos los ángulos que tengan al menos un lado en una tangente.

13. Cítense todos los ángulos centrales.



(Ejercicios 12, 13)

B.

Para los ejercicios 14 a 16, dibújese un círculo *A*.

14. Trácese un segmento que tenga un extremo en el círculo pero que no sea una cuerda.

15. Trácese un segmento que esté por completo dentro del círculo pero que no sea una cuerda.

16. Trácese un segmento que interseque al círculo en dos puntos y contenga al centro, pero que no sea un radio, un diámetro o una cuerda.

Para los ejercicios 17 a 19, dibújese un círculo *B*.

17. Trácese un recta que no sea ni secante ni tangente.

18. Dibújese un ángulo que tenga su vértice en el círculo y que interseque al círculo pero que no sea un ángulo inscrito.

19. Trácese un ángulo con dos lados intersecando al círculo y cuyo vértice no esté fuera del círculo, pero que no sea un ángulo central ni un ángulo inscrito.

20. Un asidero de 0.41 cm de diámetro se reduce a un diámetro de 0.34 cm. ¿Cuál fue la profundidad del corte?

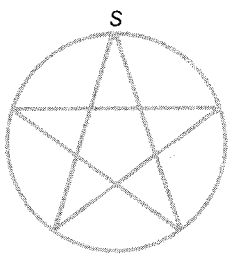
21. Los aviones del vuelo Nueva York-París suelen volar sobre Irlanda. ¿Por qué se eligió esta ruta? (*Sugerencia:* Empléese un globo terráqueo y una regla flexible.)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Este polígono con forma de estrella puede construirse de varias maneras:

a. marcando cinco puntos igualmente espaciados en un círculo. (Puede emplearse un transportador.)

b. empezando en un punto *S* y uniendo cada dos puntos a medida que se recorre el círculo en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

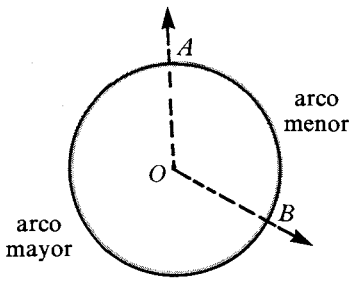


A éste último se le llama polígono de estrella $\begin{Bmatrix}5\\2\end{Bmatrix}$.

1. ¿Pueden construirse los polígonos de estrella $\begin{Bmatrix}7\\2\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}7\\3\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}8\\3\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}9\\2\end{Bmatrix}$, y $\begin{Bmatrix}9\\4\end{Bmatrix}$?

2. ¿Qué puede decirse acerca de los polígonos de estrella $\begin{Bmatrix}7\\5\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}7\\4\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}8\\5\end{Bmatrix}$, etc.?

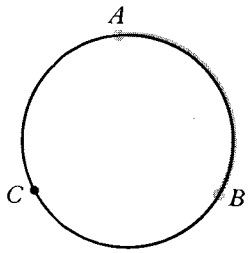
10.2 La medición en grados de los arcos



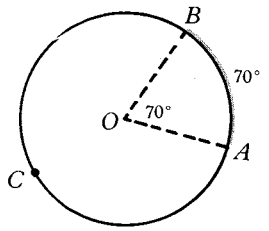
Cuando se eligen dos puntos en un círculo (que no sean extremos de un diámetro), se determinan dos arcos. A uno se le llama *arco mayor*, y al otro, *arco menor*.

Definición 10.8

Un **arco menor** es un arco que está en el interior de un ángulo central, de lo contrario se denomina **arco mayor.**



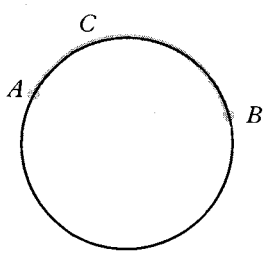
$\overset{\frown}{AB}$ simboliza siempre al arco menor determinado por los puntos A y B. Para simbolizar al arco mayor, se marca un tercer punto. $\overset{\frown}{ACB}$ simboliza al arco mayor determinado por A y B.



La medida de un arco se determina por la medida de un ángulo central. Por ejemplo, $m\overset{\frown}{AB} = m\angle AOB = 70$ y $m\overset{\frown}{ACB} = 360 - 70 = 290$.

Definición 10.9

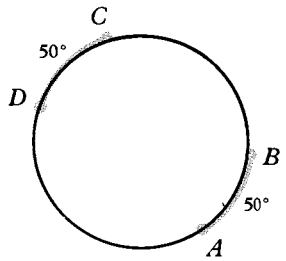
La **medida de un arco menor** es la medida de su ángulo central asociado. La **medida de un arco mayor** es 360, menos la medida del arco menor asociado.



El punto C está sobre el arco AB. Dos arcos, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$, se suman para formar el arco AB.

Postulado de la suma de arcos

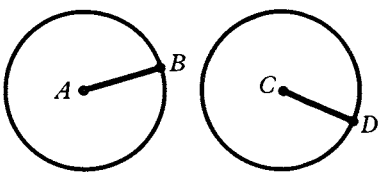
Si C está en $\overset{\frown}{AB}$, entonces $m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{CB} = m\overset{\frown}{AB}$.



Los arcos DC y BA de este círculo miden 50° cada uno, y se dice que los *arcos son congruentes.*

Definición 10.10

Si dos **arcos** de un círculo tienen la misma medida, se dice que son **congruentes.** Si $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son congruentes, se escribe $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$.



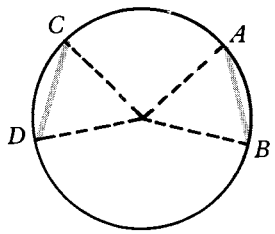
El radio AB tiene la misma longitud que el radio CD. Los círculos determinados por estos radios son congruentes.

Definición 10.11

Dos **círculos son congruentes** si tienen radios de igual longitud.

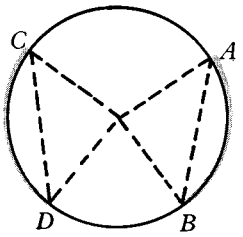
Obsérvese en las dos figuras siguientes la relación existente entre cuerdas congruentes y sus arcos.

Dadas las cuerdas congruentes $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



¿Es $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$?
¿Por qué?

Dados los arcos congruentes $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$.



¿Es $\overline{AB} \cong \overline{CD}$?
¿Por qué?

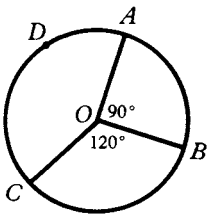
Estas figuras sugieren los teoremas siguientes.

Teorema 10.1 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.

Teorema 10.2 En un círculo, o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.

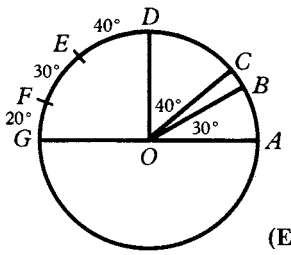
EJERCICIOS

A.



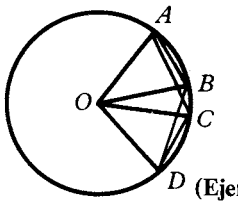
(Ejercicios 1-3)

1. ¿Está el punto D en $\overset{\frown}{BAC}$? ¿Está D en $\overset{\frown}{AB}$?
2. Cítense tres arcos menores. Cítense tres arcos mayores. Cítense tres ángulos centrales.
3. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
   a. $m\overset{\frown}{AB}$. **b.** $m\overset{\frown}{AC}$.
   c. $m\overset{\frown}{BCA}$. **d.** $m\overset{\frown}{ABC}$.



(Ejercicios 4-8)

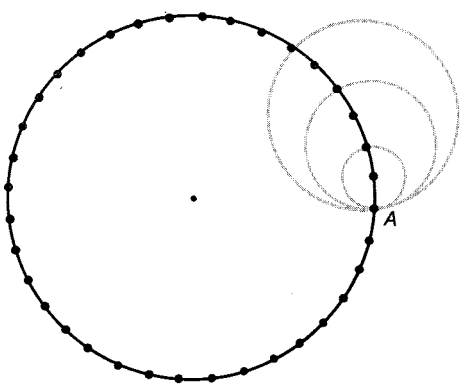
4. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
   a. $m\overset{\frown}{AB}$. **b.** $m\angle BOC$.
   c. $m\overset{\frown}{BD}$. **d.** $m\angle COG$.
5. Encuéntrense las siguientes medidas en grados.
   a. $m\overset{\frown}{DF}$. **b.** $m\overset{\frown}{EG}$. **c.** $m\overset{\frown}{ECG}$.
6. Cítense todos los arcos menores que contengan al punto C.
7. Cítense tres pares de arcos menores congruentes.
8. Cítese un par de arcos mayores congruentes.
9. Supóngase que $m\angle AOB = 40$, $m\angle BOC = 20$ y $m\angle COD = 40$. Cítense todos los pares de cuerdas congruentes.



(Ejercicio 9)

ACTIVIDADES

1. Dibújese un círculo con radio de 4 cm e indíquese un punto A en el círculo.
2. Con un transportador, márquense puntos cada 10° alrededor del círculo, empezando en A.
3. Cada uno de esos puntos es el centro de un círculo que pasa por A. Dibújense los círculos. (Ya se dibujaron 3 de ellos.)
4. Adivínese cuál será la forma de la figura resultante.



B.

En los ejercicios 10 a 12, háganse dibujos precisos y respóndase a las preguntas.

10. ¿Tiene la cuerda de un arco de 90° de un círculo doble longitud que la cuerda correspondiente a un arco de 45°?

11. ¿Se duplica la medida del ángulo central si se duplica la medida de un arco menor?

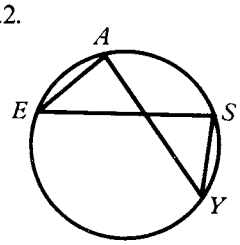
12. Supóngase que en el círculo O, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios y $OA = OB = AB$. ¿Cuál es la medida de $\angle AOB$?

13. Pruébese el teorema 10.1.

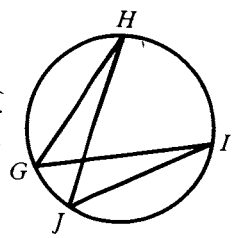
14. Pruébese el teorema 10.2.

C.

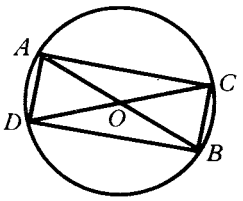
15. **Dado:** $ES = AY$.
Pruébese: $EA = SY$.



16. **Dado:** $\widehat{HG} \cong \widehat{JI}$.
Pruébese: $HJ = GI$.

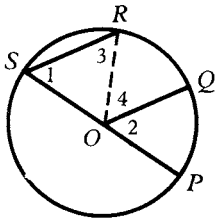


17. **Dado:** $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros.
Pruébese: $ACBD$ es un paralelogramo.



18. Pruébese que si los vértices de un triángulo equilátero están sobre un círculo, el círculo se divide en tres arcos congruentes.

19. **Dado:** $\overline{POS}$ es un diámetro de $\odot O$
$\overline{SR} \parallel \overline{OQ}$.
Pruébese: $\widehat{RQ} \cong \widehat{QP}$.

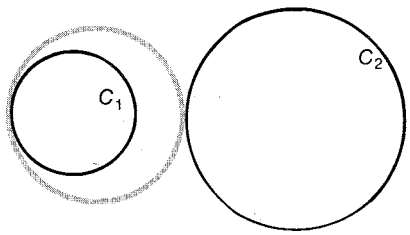


SOLUCION DE PROBLEMAS

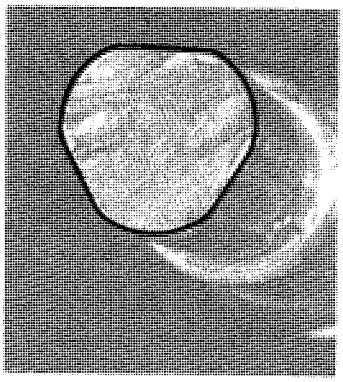
1. Dibújense los círculos C_1 y C_2, de diferente tamaño.

2. ¿Cuántos círculos hay con centros colineales que toquen a los círculos dados exactamente en un punto? (Se ha dibujado uno de ellos.)

3. Dibújense estos dos círculos. (Primero constrúyanse los centros de los círculos. No es necesario hacer conjeturas.)



10.3 Cuerdas y distancias desde el centro

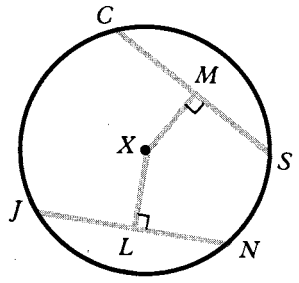


La fotografía muestra una broca de un taladro eléctrico cuya cabeza tiene tres superficies planas. Una característica necesaria de este diseño es que las tres superficies planas estén a igual distancia del eje de rotación para asegurar que la broca se deslice con suavidad.

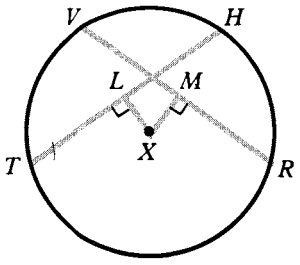
El teorema de esta sección describe un método para determinar que se satisfaga esta condición.

En cada figura se da un par de cuerdas congruentes.

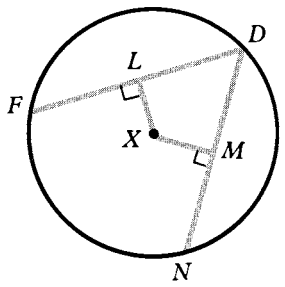
$CS = JN$



$VR = TH$



$FD = DN$



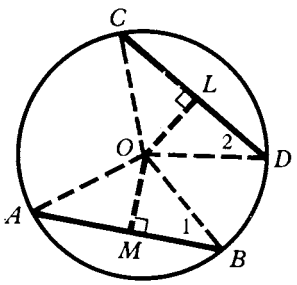
¿Es $XL = XM$ en cada caso?

Estos ejemplos sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.3 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro.

PRUEBA

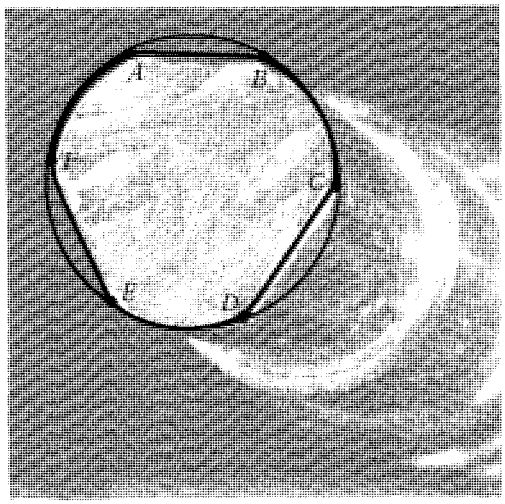
Dado: $\odot O$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{OL} \perp \overline{CD}$.
Pruébese: $OM = OL$.



Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	**1.** Dado.
2. $OA = OB = OC = OD$.	**2.** Definición de círculo.
3. $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$.	**3.** Definición de segmentos congruentes.
4. $\triangle AOB \cong \triangle COD$.	**4.** Congruencia LLL.
5. $\angle 1 \cong \angle 2$.	**5.** PCTCC.
6. $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{OL} \perp \overline{CD}$.	**6.** Dado.
7. $\angle OMB \cong \angle OLD$, $\angle OMB$. y $\angle OLD$ son ángulos rectos.	**7.** Las rectas perpendiculares forman ángulos rectos congruentes.
8. $\triangle OMB$ y $\triangle OLD$ son triángulos rectángulos.	**8.** Definición de triángulo rectángulo.
9. $\triangle OMB \cong \triangle OLD$.	**9.** Congruencia de la hipotenusa y el ángulo.
10. $\overline{OM} \cong \overline{OL}$.	**10.** PCTCC.
11. $OM = OL$.	**11.** Definición de segmentos congruentes.

APLICACION

La broca de la fotografía debe estar equilibrada para que funcione con suavidad. ¿Cómo debe construirse la cabeza de la broca para que esté equilibrada?
Si los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son congruentes, entonces, por el teorema 10.3, equidistan del centro del círculo que contiene a los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{EF}$. Esto asegura el equilibrado de la broca.



La recíproca del teorema 10.3 también es importante y se presenta a continuación.

Teorema 10.4 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

EJERCICIOS

A.

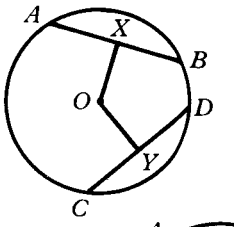
1. **Dado:** $AB = CD$
   $\overline{OX} \perp \overline{AB}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$
   $OX = 3$.
   Encuéntrese: OY.

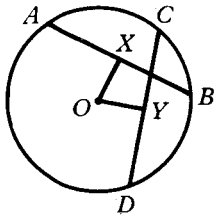
2. **Dado:** $OX = OY$
   $\overline{OX} \perp \overline{AB}$, $\overline{OY} \perp \overline{CD}$
   $AB = 10$.
   Encuéntrese: CD.

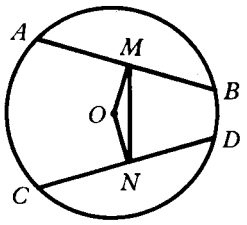
3. **Dado:** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$
   $AB = CD$
   $m\angle MON = 150$.
   Encuéntrese: $m\angle OMN$ (*Sugerencia:* ¿Es $OM = ON$?)

4. **Dado:** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$
   $AB = CD$
   $m\angle NMB = 70$.
   Encuéntrese: $m\angle MON$.

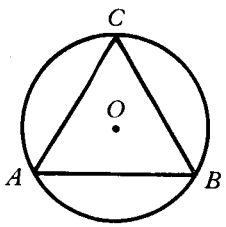
5. **Dado:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ equidistan del centro O.
   Pruébese: $\triangle ABC$ es equilátero.







(Ejercicios 3, 4)



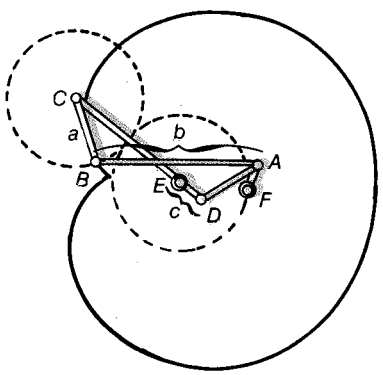
ACTIVIDADES

La trayectoria descrita por un punto B de un círculo que rueda alrededor de un círculo fijo del mismo radio es una curva denominada *cardioide*.

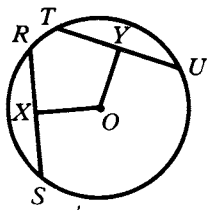
Una cardioide también puede dibujarse con un varillaje articulado como el que se muestra en la figura.

Síganse estas instrucciones y dibújese una cardioide.

1. Constrúyase un varillaje articulado con cartulina como el que se muestra en la figura. Obsérvese que $BC = AD = a$, $AB = CD = b$, $DE = AF = c$ y $a^2 = bc$. (*Sugerencia:* Sea $a = 6$ cm, $b = 32$ cm y $c = 8$ cm.)
2. Fíjese el varillaje a una superficie dura y plana en los puntos E y F.
3. Colóquese un lápiz en B y dibújese la cardioide.



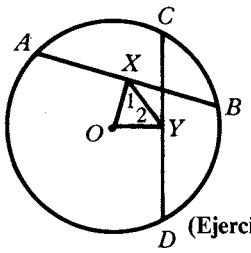
B.



6. Dado: $\overline{OX} = \overline{OY}$
$\overline{OX} \perp \overline{RS}$, $\overline{OY} \perp \overline{TU}$.
Pruébese: $m\widehat{RS} = m\widehat{TU}$.

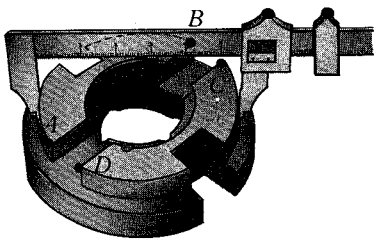
7. Dado: En el círculo O, $\overline{OX} \perp \overline{AB}$,
$\overline{OY} \perp \overline{CD}$
$m\angle 1 = m\angle 2$.
Pruébese: $AB = CD$.

8. Dado: En el círculo O, $\overline{OX} \perp \overline{AB}$,
$\overline{OY} \perp \overline{CD}$
$CD = AB$.
Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



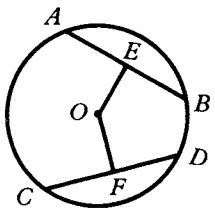
(Ejercicios 7, 8)

9. Con frecuencia, piezas de máquinas como la que se muestra sólo funcionarán adecuadamente si las ranuras están «centradas». ¿Por qué al medir $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se sabe si las ranuras están centradas o no?

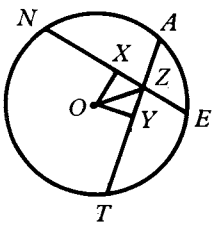


C.

10. Este ejercicio presenta una prueba del teorema 10.4.
Dado: Círculo O, $\overline{OE} = \overline{OF}$
$\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.
Pruébese: $AB = CD$.
(*Sugerencia:* Trácense radios y empléense triángulos congruentes.)

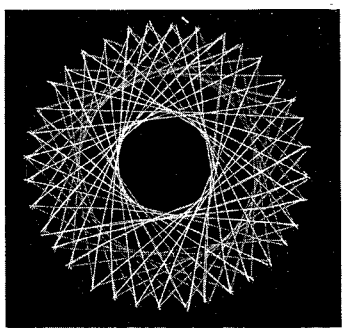


11. Dado: En el círculo O, $\overline{OX} \perp \overline{NE}$,
$\overline{OY} \perp \overline{AT}$
$\angle XZO \cong \angle YZO$.
Pruébese: $NE = AT$.



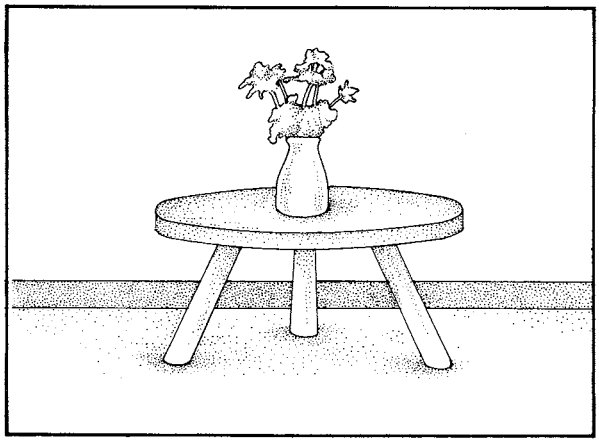
SOLUCION DE PROBLEMAS

La región central de este hilorama parece circular. Explíquese por qué es así. Esto es, explíquese por qué los puntos medios de los segmentos que conforman los bordes de la región central equidistan de un punto central imaginario. (Puede asumirse que los clavos de los extremos de cada cuerda están igualmente espaciados alrededor de un círculo.)

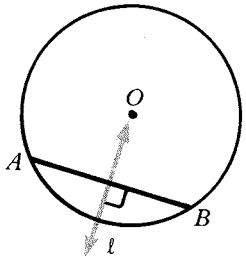


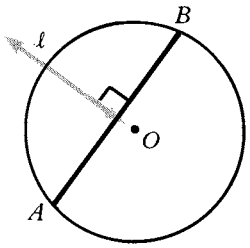
10.4 Perpendiculares a las cuerdas

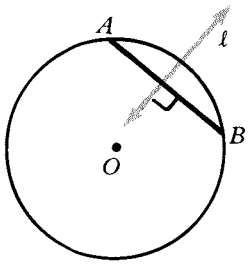
Para encontrar el centro de una mesa redonda se puede usar una escuadra de carpintero. El teorema de esta sección explica cómo hacerlo.



Estas figuras ilustran una propiedad de las bisectrices perpendiculares de una cuerda. En cada figura, ℓ es la bisectriz perpendicular de la cuerda $\overline{AB}$.







¿Pasa la recta ℓ por el punto O?

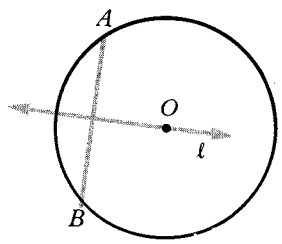
Estas tres figuras sugieren el siguiente teorema.

Teorema 10.5 La bisectriz perpendicular de una cuerda contiene al centro del círculo.

PRUEBA

Dado: $\overline{AB}$ es una cuerda del círculo O y ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

Pruébese: O es un punto de ℓ.



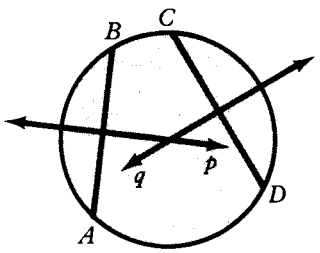
Afirmaciones	Razones
1. ℓ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.	**1.** Dado.
2. $OA = OB$.	**2.** Definición de círculo.
3. O está en ℓ.	**3.** Un punto equidistante de los puntos A y B pertenece a la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$. (Teorema 6.10.)

APLICACION

Encuéntrese el centro de una mesa redonda.

Paso 1 Selecciónense dos cuerdas cualesquiera $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Paso 2 Trácense la bisectriz perpendicular p de $\overline{AB}$ y la bisectriz perpendicular q de $\overline{CD}$.



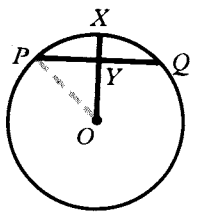
Conclusión: Por el teorema 10.5, se concluye que el centro está en ambas rectas, p y q. En consecuencia, el centro de la mesa debe ser la intersección de estas dos rectas.

A continuación se presentan otros dos teoremas importantes.

Teorema 10.6 Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.

Teorema 10.7 Si una recta que pasa por el centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

El teorema 10.6 puede emplearse para encontrar información sobre círculos.



Ejemplo **Dado:** $\odot O$ de radio 4 pulgadas. $\overline{OX} \perp \overline{PQ}$. La cuerda $\overline{PQ}$ está a 1 pulgada de O.

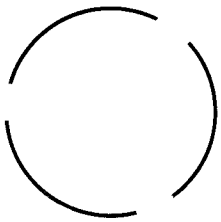
Encuéntrese: PQ.

La información dada dice que $OP = 4$ (¿Por qué?), y que $OY = 1$ (¿Por qué?). Al aplicar el teorema de Pitágoras a $\triangle OPY$, puede determinarse que $PY = \sqrt{15}$. El teorema 10.6 indica que $\overline{OX}$ biseca a $\overline{PQ}$. Por tanto, $PQ = 2\sqrt{15}$.

EJERCICIOS

A.

1. Trácese la figura de la derecha. Encuéntrese el centro de los arcos y complétese el círculo.

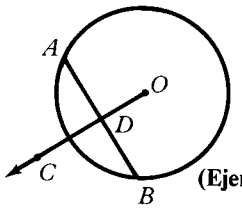


2. Con un compás y una regla, trácese una figura que ilustre los teoremas 10.6 y 10.7.

En la figura de los ejercicios 3 y 4, O es el centro del círculo.

3. Si $\overrightarrow{OC} \perp \overline{AB}$, ¿qué relación hay entre $m\widehat{AC}$ y $m\widehat{CB}$?

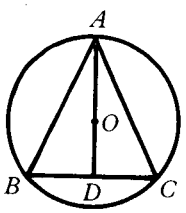
4. Si $AD = 3$ y $BD = 3$, encuéntrese $m\angle BDC$.



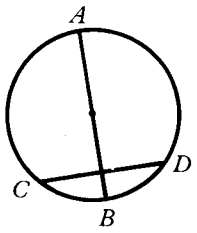
(Ejercicios, 3, 4)

En los ejercicios 5 a 7, determínese qué teorema (10.5, 10.6 ó 10.7) se empleó para llegar a la conclusión.

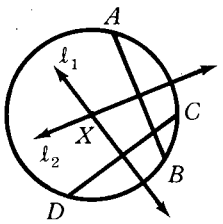
5. Dado: $\odot O$ con $\overline{AOD}$ como altura de $\triangle ABC$.
Conclusión: $\overline{AD}$ biseca a $\overline{BC}$.



6. Dado: El diámetro $\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD}$.
Conclusión: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

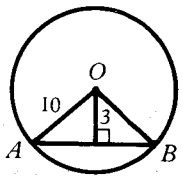


7. Dado: ℓ_1 es la bisectriz perpendicular de $\overline{CD}$.
ℓ_2 es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.
ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan en X.
Conclusión: X es el centro del círculo.



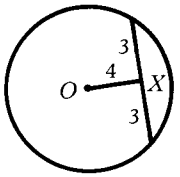
En los ejercicios 8 a 10, encuéntrese la información que falta. O es el centro de cada círculo.

8.



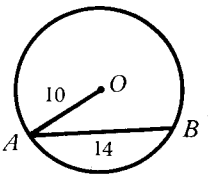
$AB = ?$

9.



¿Cuál es la longitud del radio?

10.

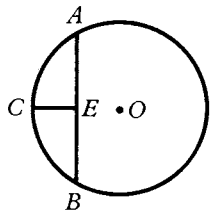


¿A qué ditancia del centro está $\overline{AB}$?

B.

11. En un círculo de radio 5 cm, $\overline{AB}$ es una cuerda que mide 8 cm. ¿Qué distancia hay entre $\overline{AB}$ y el centro del círculo? (Hágase un bosquejo para ayudar a la solución del problema.)

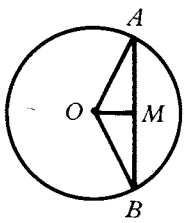
12. **Dado:** C es el punto medio de $\overset{\frown}{AB}$
$\overline{CE} \perp \overline{AB}$.
$CE = 2$ pulgadas, $AB = 16$ pulgadas.
Encuéntrese: La longitud de un radio del círculo.



13. **Dado:** $AM = MB = 6$ cm
$AO = 10$ cm.
Encuéntrese: OM.

14. **Dado:** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
$OM = 5$, $AO = 13$.
Encuéntrese: AB.

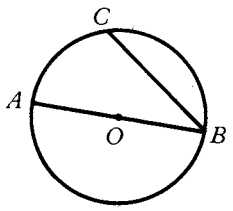
15. **Dado:** M es el punto medio de $\overline{AB}$
$OM = MB$
$OB = \sqrt{2}$.
Encuéntrese: AB.



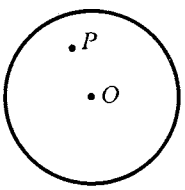
(Ejercicios 13-15)

16. Dos cuerdas de un círculo tienen la misma longitud. La distancia entre cada una de ellas y el centro se representa por x^2 y $4x$, respectivamente. ¿Qué distancia hay entre cada cuerda y el centro?

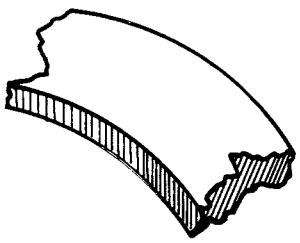
17. **Dado:** Un círculo con $AB = 8$ pies y $m\angle ABC = 45$.
Encuéntrese: La distancia entre O y $\overline{BC}$.



18. Dibújese un círculo O y márquese un punto P dentro del círculo. Con un compás y una regla, trácese una cuerda a la que biseque P.

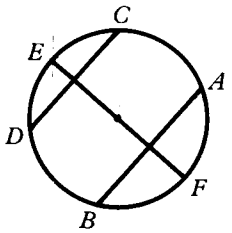


19. En una excavación, un arqueólogo encontró un trozo de rueda. Esta rueda puede reconstruirse determinando su radio original. Explíquese cómo puede realizarse esto.

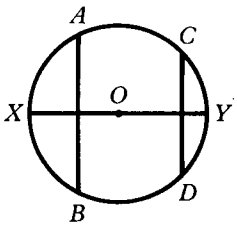


C.

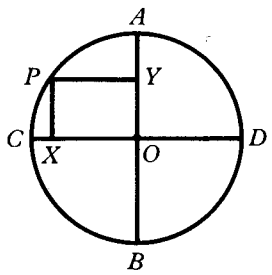
20. Dado: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{EF}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.
Pruébese: $\overline{EF}$ biseca a $\overline{CD}$.



21. Dado: $\overline{XY}$ es un diámetro
$\overline{XY}$ biseca a $\overline{AB}$
$\overline{XY}$ biseca a $\overline{CD}$.
Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



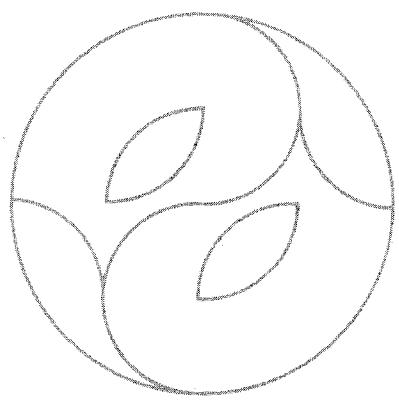
22. Dado: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$
$AO = 10$ cm
$\overline{PX} \perp \overline{CD}$ y $\overline{PY} \perp \overline{AB}$.
Encuéntrese: XY.



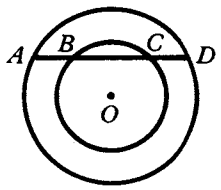
23. Un círculo O tiene de radio 10 cm. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares y se intersecan en un punto F del interior del círculo. Si $AB = 16$ y $CD = 18$, encuéntrese DF.

ACTIVIDADES

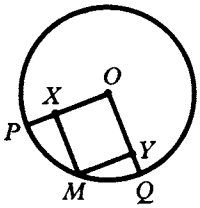
1. Dibújese esta figura y recórtense las piezas.
2. Colóquense las piezas para formar dos regiones ovoides y sin un centro.
3. Dibújese el rompecabezas con un compás. (Se necesitará determinar cuidadosamente el centro de cada arco. No es necesario hacer conjeturas.)



24. Dado: Dos círculos con centro O
A, B, C y D son colineales.
Pruébese: $AB = CD$.

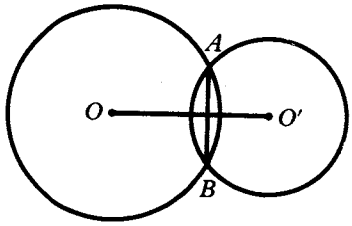


25. Dado: $m\overset{\frown}{PM} = m\overset{\frown}{MQ}$
$\overline{XM} \perp \overline{OP}$
$\overline{YM} \perp \overline{OQ}$.
Pruébese: $XM = YM$.

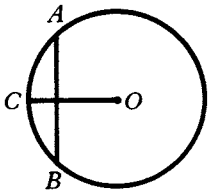


(*Sugerencia:* Trácese $\overline{OM}$ y empléense triángulos congruentes.)

26. Dado: $\overline{AB}$ es una cuerda común a los círculos O y O'.
Pruébese: $\overline{OO'}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.



27. Dado: $\overline{OC}$ biseca a $\overset{\frown}{ACB}$.
Pruébese: $\overline{OC}$ biseca a $\overline{AB}$.

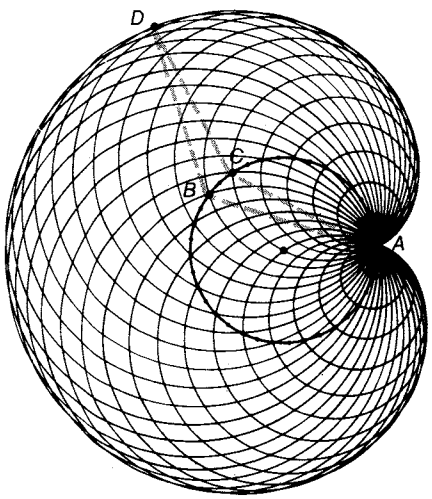


SOLUCION DE PROBLEMAS

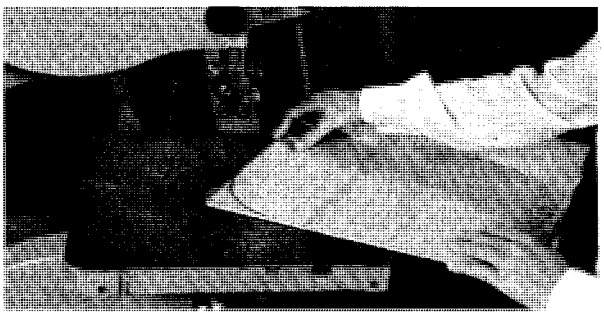
Usando el método descrito en las actividades de la página 348, se dibujó una cardioide.

Los puntos B y C son centros de los círculos que pasan por A y se encuentran de nuevo en el punto D.

¿Por qué son congruentes $\triangle ABC$ y $\triangle DBC$?



10.5 Tangentes a los círculos

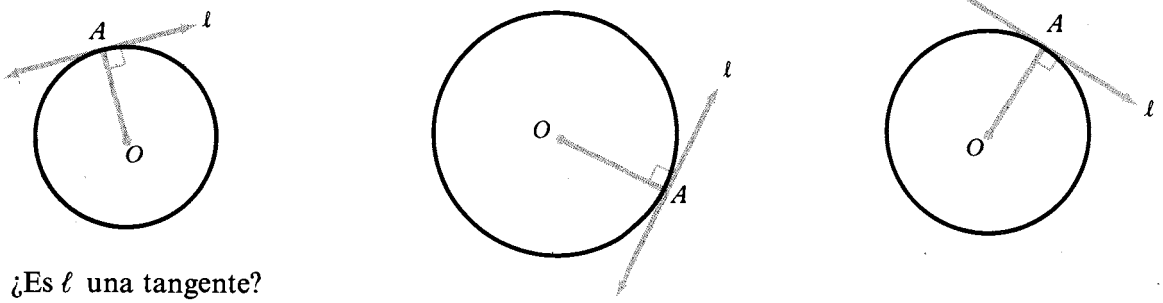


REPASO: Una recta es tangente a un círculo si lo interseca exactamente en un punto.

Supóngase que se desean redondear las esquinas de un pieza de madera para construir una mesa pequeña. Para que el trabajo esté bien hecho, debe encontrarse la forma de trazar un arco. Los bordes de la tabla deben ser tangentes al arco circular. ¿Cómo puede trazarse este arco?

Uno de los teoremas de esta sección ayuda a resolver el problema.

En cada una de estas figuras, $\overline{OA}$ es un radio y ℓ es perpendicular a $\overline{OA}$ en A.



¿Es ℓ una tangente?

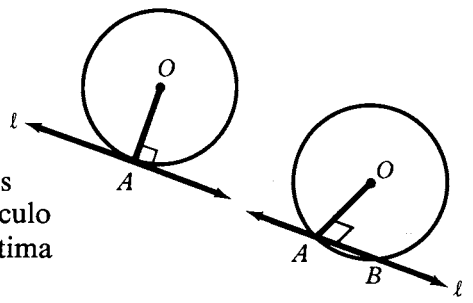
Estas observaciones sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.8 Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

PRUEBA

Dado: $\ell \perp \overline{OA}$.

Pruébese: ℓ es tangente al círculo.



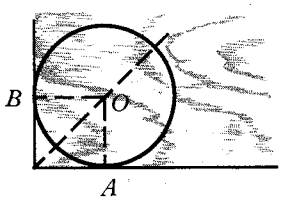
Plan: Hágase una prueba indirecta. Supóngase que ℓ no es tangente al círculo. Esto significa que ℓ no interseca al círculo o que lo interseca en dos puntos. Ahora se analizará la última suposición.

Afirmaciones	Razones
1. ℓ interseca al círculo en un segundo punto B.	**1.** Suposición de la prueba indirecta.
2. $\overline{OA} \perp \ell$.	**2.** Dado.
3. $\overline{OB}$ es una hipotenusa de un triángulo rectángulo.	**3.** Definición de hipotenusa.
4. $OB > OA$.	**4.** La longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquier lado.
5. $OB = OA$.	**5.** Definición de círculo.

Las afirmaciones 4 y 5 son contradictorias. Por tanto, la suposición es falsa y la recta ℓ es tangente al círculo.

APLICACION

Ahora ya se puede resolver el problema planteado al principio de esta sección.



Paso 1 Dibújese la bisectriz del ángulo.

Paso 2 Elíjase un punto O en la bisectriz y dibújense las perpendiculares $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ a los lados del ángulo.

Paso 3 El punto O de la bisectriz del ángulo es equidistante de los lados de los ángulos. Por tanto, $OA = OB$. Dibújese el círculo con centro O que pase por A y B.

Los bordes de la tabla son tangentes al círculo por el teorema 10.8.

Ahora se presentan otros dos teoremas sobre tangentes.

Teorema 10.9 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

Teorema 10.10 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.

EJERCICIOS

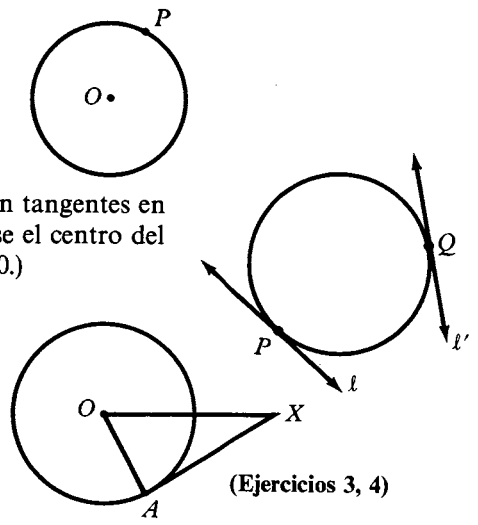
A.

1. Dibújese un círculo O y márquese en él un punto P. Trácese una tangente al círculo a través de P.

2. Trácese la figura siguiente, en la cual ℓ y ℓ' son tangentes en los puntos P y Q, respectivamente. Encuéntrese el centro del círculo. (*Sugerencia:* Empléese el teorema 10.10.)

3. $\overleftrightarrow{AX}$ es tangente al círculo en A. $m\angle AOX = 51$. $m\angle AXO =$?.

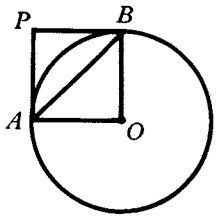
4. $\overleftrightarrow{AX}$ es tangente al círculo en A. Si $OA = 10$ y $AX = 24$, encuéntrese OX.



(Ejercicios 3, 4)

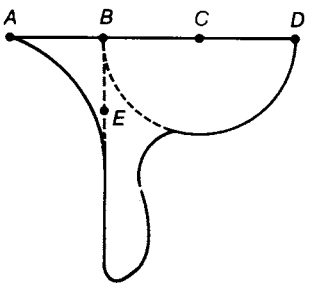
B.

5. **Dado:** $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de 4 cm
$\overline{PA} \perp \overline{PB}$.
Pruébese: $AOBP$ es un cuadrado.



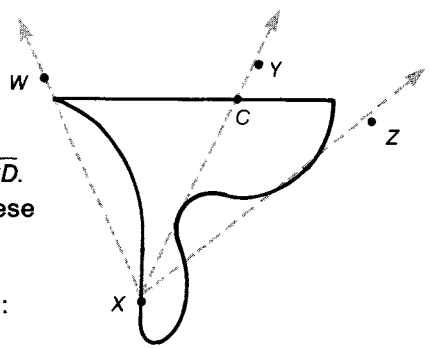
ACTIVIDADES

Dibújese, márquese y recórtese en cartulina una figura como la siguiente, denominada a veces *tomahawk* (hacha de guerra de los indios).



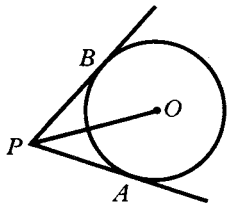
1. Trácese $\overline{AD}$ de manera que $AB = BC = CD$.
2. Trácese un semicírculo en $\overline{BD}$.
3. Trácese $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ y complétese la figura como se muestra.
4. Colóquese el *tomahawk* sobre $\angle WXY$ de manera que:
   a. X esté sobre $\overleftrightarrow{BE}$.
   b. A esté sobre un rayo del ángulo.
   c. El borde semicircular del *tomahawk* sea tangente al otro borde del ángulo.
5. Entonces, $\overrightarrow{XC}$ es la trisectriz del ángulo.

Empléese un *tomahawk* para trisecar varios ángulos.

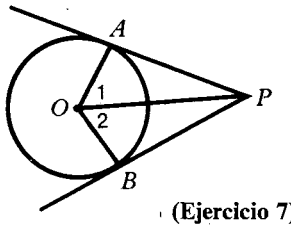


$m\angle YXZ = \frac{1}{3}m\angle WXZ$

6. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$\overline{PA} \perp \overline{PB}$
$OB = 8$.
Encuéntrese: OP.

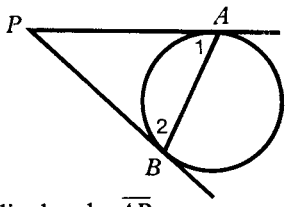


7. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios.
Pruébese: $\angle 1 \cong \angle 2$.



(Ejercicio 7)

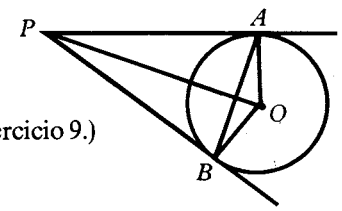
8. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes.
Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



C.

9. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios.
Pruébese: $\overline{OP}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$.

10. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios
$m\angle APB = 80$.
Encuéntrese: $m\angle ABO$ (*Sugerencia:* empléese la conclusión del ejercicio 9.)

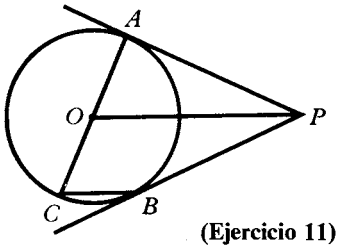


(Ejercicios 9, 10)

11. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes al círculo O
$\overline{AC}$ es un diámetro.
Pruébese: $\overline{OP} \parallel \overline{BC}$.

12. Pruébese el teorema 10.9.

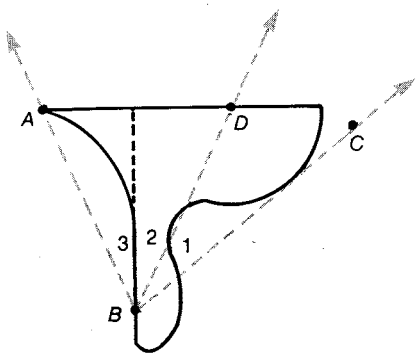
13. Pruébese el teorema 10.10.



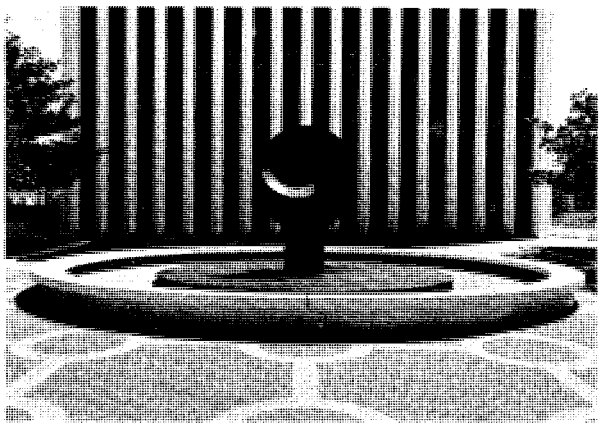
(Ejercicio 11)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Pruébese que el método *tomahawk* presentado en la actividad anterior sirve para probar que $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son congruentes.

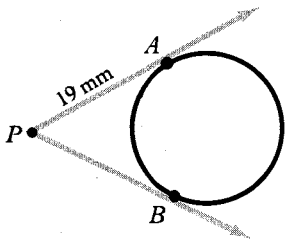


10.6 Tangentes desde un punto a un círculo

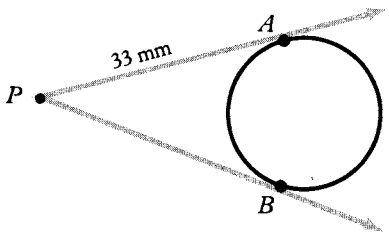


Se le ha pedido a un agrimensor que encuentre el centro de una fuente circular. Pueden emplearse para esto un jalón y un teodolito. Uno de los teoremas de esta sección proporciona un método para encontrar el centro con este equipo.

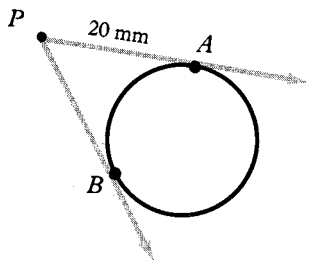
En cada caso, $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son tangentes en A y B. Tómense medidas con regla o transportador para encontrar las longitudes que faltan.



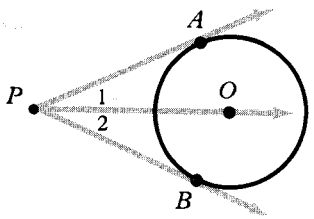
$PA = 19$ mm, $PB =$?



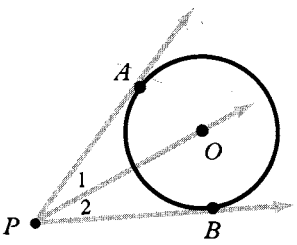
$PA = 33$ mm, $PB =$?



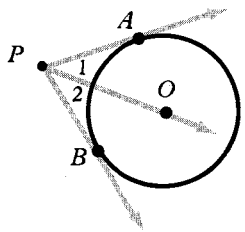
$PA = 20$ mm, $PB =$?



$m\angle 1 = 24$, $m\angle 2 =$?



$m\angle 1 = 25$, $m\angle 2 =$?

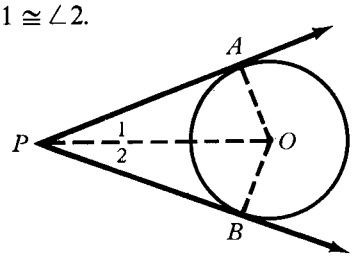


$m\angle 1 = 38$, $m\angle 2 =$?

Teorema 10.11 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

PRUEBA

Dado: $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son tangentes en A y B.
Pruébese: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$.



Afirmaciones	Razones
1. Trácese $\overrightarrow{PO}$ y los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.	1. Construcción.
2. $OA = OB$.	2. Definición de radio.
3. $PO = PO$.	3. ¿Por qué?
4. $\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$ y $\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$.	4. ¿Por qué?
5. $\triangle POA \cong \triangle POB$.	5. ¿Por qué?
6. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.	6. PCTCC.

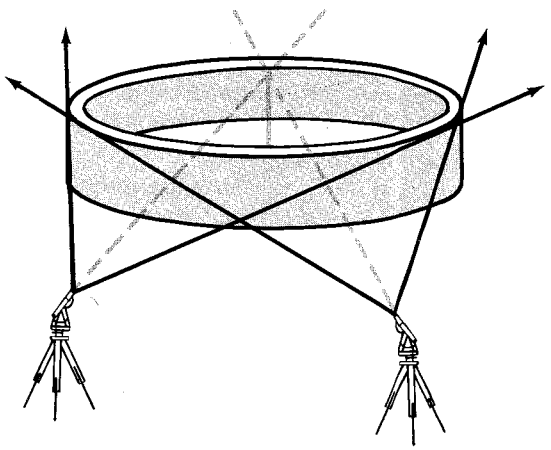
APLICACION

El problema del agrimensor que se introdujo al principio de esta sección puede resolverse con el teorema 10.11 y el hecho de que la bisectriz de un ángulo es única.

Paso 1 Se colocan dos teodolitos y se determina en cada caso la posición de los rayos tangentes.

Paso 2 Se coloca el telescopio de los dos teodolitos en el lugar de la bisectriz del ángulo formado por las tangentes.

Paso 3 Un jalón situado en la «línea de visión» de ambos telescopios debe estar en el centro del círculo.



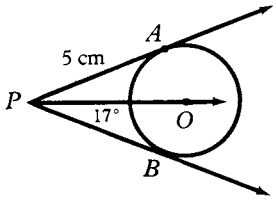
NOTA: No es un dibujo a escala

EJERCICIOS

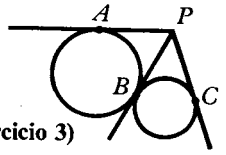
A.

Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$PA = 5$ cm, $m\angle BPO = 17$.

1. Encuéntrese: PB. **2. Encuéntrese** $m\angle APB$.



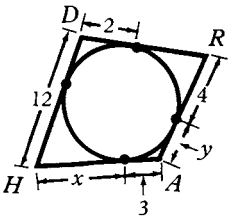
3. Dado: $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ son tangentes
$PA = 10$ cm.
Encuéntrese: PC.



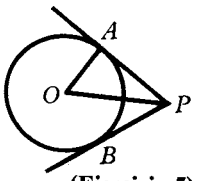
(Ejercicio 3)

B.

4. Dado: $\overline{HA}$, $\overline{AR}$, $\overline{RD}$ y $\overline{DH}$ son tangentes.
Encuéntrense: Las longitudes x e y.

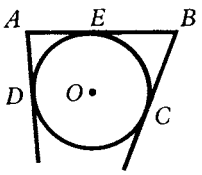


5. Dado: $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a $\odot O$
$OA = 10$
$m\angle APB = 60$.
Encuéntrese: OP.

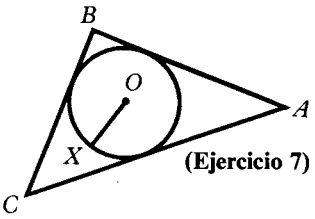


(Ejercicio 5)

6. Dado: $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a $\odot O$.
Pruébese: $AD + BC = AB$.

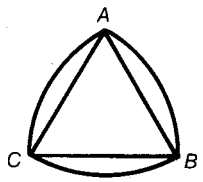


7. Dado: El triángulo rectángulo ABC
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son tangentes
$AB = 6$, $BC = 8$ y $AC = 10$.
Encuéntrese: La longitud del radio $\overline{OX}$.



(Ejercicio 7)

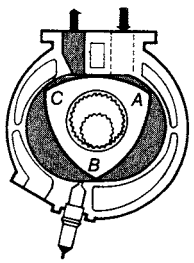
ACTIVIDADES

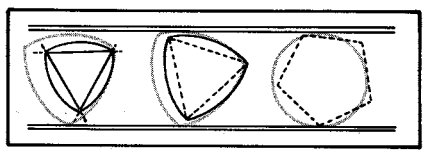


El motor Wankel está diseñado en torno a una curva denominada curva de ancho constante.

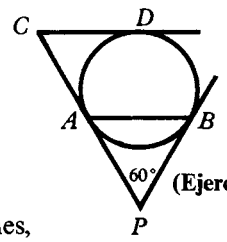
Constrúyanse varias formas curvas idénticas de cartulina mediante el siguiente procedimiento.

1. Constrúyase un triángulo equilátero $\triangle ABC$.
2. Constrúyanse los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BC}$, cada uno con centro en el vértice opuesto.
3. Gírense estas curvas como se muestra en el diagrama para demostrar que tienen el mismo ancho.





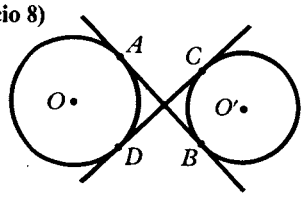
8. Dado: $\overline{CP}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PB}$ son tangentes
$CD = 4$, $CP = 9$.
$m\angle APB = 60$.
Encuéntrese: AB.



(Ejercicio 8)

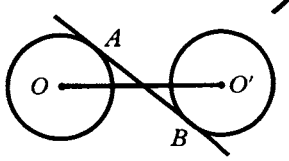
C.

9. Dado: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son tangentes comunes, como se muestra en la figura.
Pruébese: $AB = CD$.

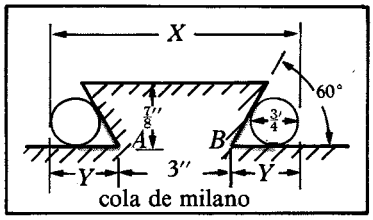


(Ejercicio 9)

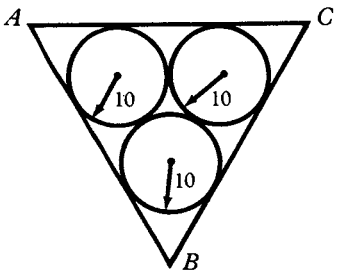
10. Dado: Círculo $O \cong$ círculo O'.
$\overline{AB}$ es una tangente interna común
Pruébese: $\overline{AB}$ biseca a $\overline{OO'}$.



11. El control de calidad en la producción de piezas de maquinaria con frecuencia requiere métodos poco usuales de medición. Por ejemplo, para verificar la corrección de los ángulos A y B en una pieza llamada «cola de milano», se insertan espigas circulares como ilustra la figura. Entonces, se mide la distancia X con un micrómetro. En el caso de la cola de milano que se muestra aquí, ¿cuál sería esta distancia?

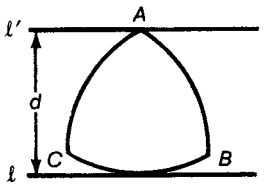


12. Tres discos de metal de 10 cm de radio cada uno, son tangentes entre sí. Los discos están encerrados en una estructura metálica con forma de triángulo equilátero. ¿Cuál es la longitud de un lado del triángulo?



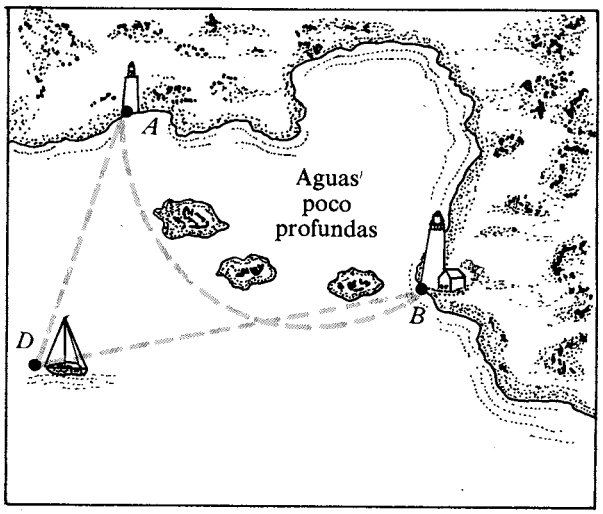
SOLUCION DE PROBLEMAS

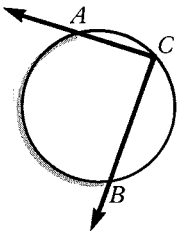
Supóngase que ℓ es una recta tangente a un arco de la curva construida en la actividad anterior y que ℓ' es paralela a ℓ a través de un vértice opuesto.
¿Qué relación existe entre la distancia d que separa a las rectas y la longitud AB?

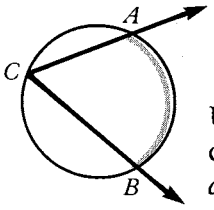


10.7 Medidas de ángulos inscritos

Dos faros pueden servir como auxilio a la navegación de un barco que pasa cerca de la costa y por aguas poco profundas. Si el barco está en el punto D, entonces $\angle ADB$ debe ser menor que un «ángulo de peligro» conocido. Esta técnica de navegación se basa en un teorema desarrollado en esta sección.





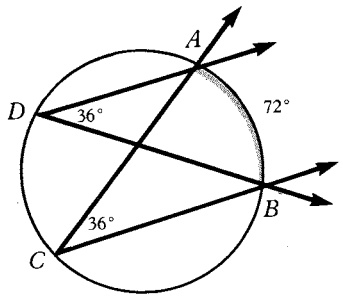


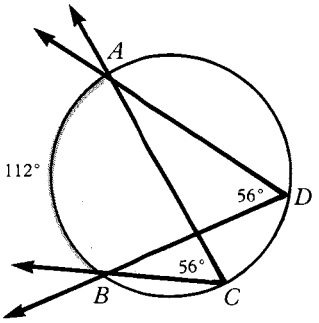
Un ángulo inscrito determina un arco llamado *arco interceptado.*

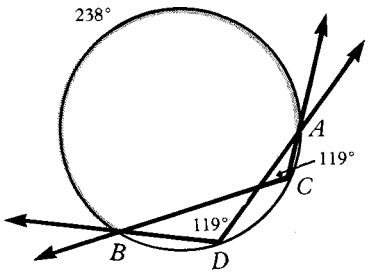
Definición 10.12

El **arco interceptado** en un ángulo inscrito $\angle ACB$ es el arco AB que está en el interior del ángulo.

En cada figura se dan $m\widehat{AB}$, $m\angle ACB$ y $m\angle ADB$.







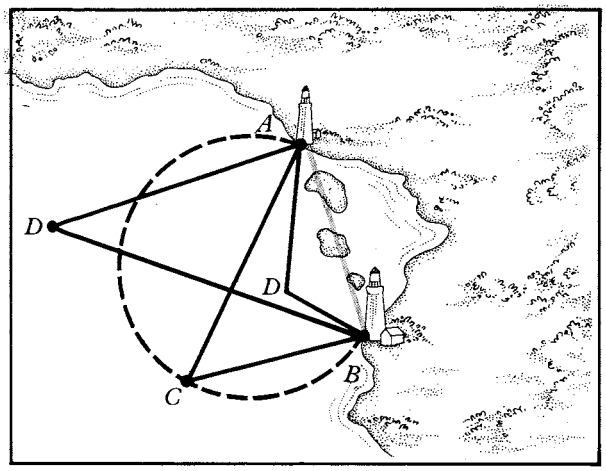
Estas figuras sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.12 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

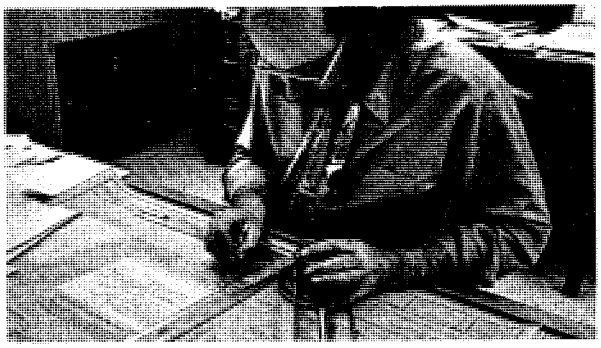
APLICACION 1

La técnica de navegación presentada al principio de esta sección se basa en el teorema 10.12. Si un punto C está en un círculo de manera que el arco AB mida el doble que el «ángulo de peligro», entonces $m\angle ACB$ es igual al ángulo de peligro.

Si D estuviera en este mismo círculo o dentro de él, entonces $m\angle ADB$ sería igual o mayor que el ángulo de peligro. Cuando D está fuera del círculo, $m\angle ADB$ es menor que el ángulo de peligro y el barco en el punto D está a salvo.



La segunda aplicación se basa en un caso especial del teorema 10.12, que se formula como teorema 10.13.



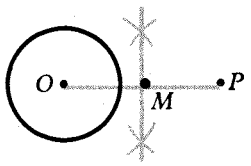
APLICACION 2

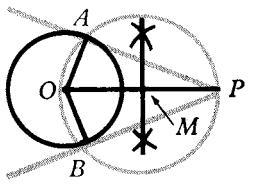
Con frecuencia, los diseñadores tienen que trazar dos rectas tangentes a un círculo desde un punto dado fuera del círculo.
A continuación se presenta un método para realizar esto.

Paso 1 Trácense $\overline{OP}$ y su punto medio M desde un punto P fuera de un círculo dado con centro O.

Paso 2 Trácese el círculo con diámetro $\overline{OP}$ que interseca al círculo dado en los puntos A y B. Trácense $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$. El teorema 10.12 indica que $\angle OAP$ y $\angle OBP$ son ángulos rectos.

Paso 3 El teorema 10.8 indica que $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son tangentes al círculo dado.





Teorema 10.13 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

EJERCICIOS

A.

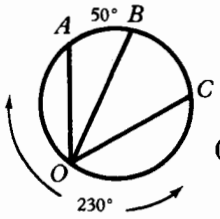
En los ejercicios 1 a 4, $m\overset{\frown}{AB} = 50$, $m\overset{\frown}{AOC} = 230$.

1. $m\angle AOB = \underline{?}$.

2. $m\angle BOC = \underline{?}$.

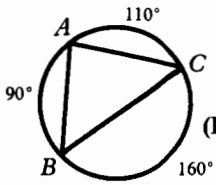
3. $m\angle AOC = \underline{?}$.

4. $m\overset{\frown}{AC} = \underline{?}$.



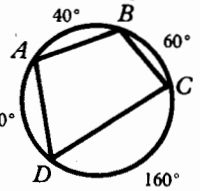
(Ejercicios 1-4)

5. Encuéntrense las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$.



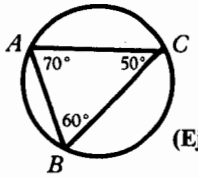
(Ejercicio 5)

6. Encuéntrense las medidas de los ángulos de $ABCD$.



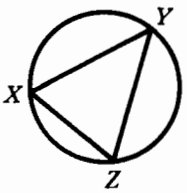
(Ejercicio 6)

7. Encuéntrense: $m\overset{\frown}{AB}$, $m\overset{\frown}{AC}$, y $m\overset{\frown}{BC}$.



(Ejercicio 7)

8. **Dado:** $XY = YZ$
$m\angle Y = 40$.
Encuéntrese: $m\overset{\frown}{XY}$, $m\overset{\frown}{YZ}$ y $m\overset{\frown}{XZ}$.



En los ejercicios 9 a 14, $m\overset{\frown}{AC} = 160$, $m\overset{\frown}{AB} = 75$ y $m\overset{\frown}{CD} = 45$.

9. $m\angle ABC = \underline{?}$.

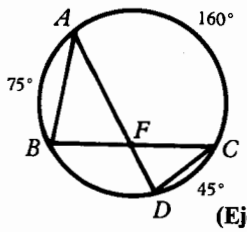
10. $m\angle ADC = \underline{?}$.

11. $m\overset{\frown}{BD} = \underline{?}$.

12. $m\angle BAD = \underline{?}$.

13. $m\angle BCD = \underline{?}$.

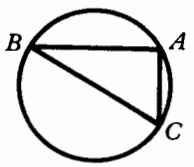
14. $m\angle AFB = \underline{?}$.



(Ejercicio 9-14)

B.

15. **Dado:** $\overline{BC}$ es un diámetro
$\overline{AB} = 8$, $AC = 6$.
Encuéntrese: BC.



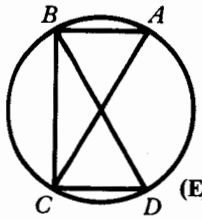
En los ejercicios 16 a 19, $\overline{AC}$ es un diámetro, $m\overset{\frown}{CD} = 66$, y $m\angle CDB = 60$.

16. $m\angle ADB = \underline{?}$.

17. $m\overset{\frown}{BC} = \underline{?}$.

18. $m\angle BCA = \underline{?}$.

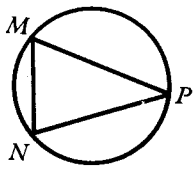
19. $m\angle BCD = \underline{?}$.



(Ejercicio 16-19)

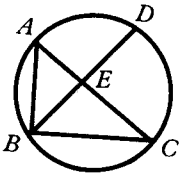
20. Dado: $\dfrac{m\overset{\frown}{MN}}{m\overset{\frown}{NP}} = \dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{m\overset{\frown}{NP}}{m\overset{\frown}{MP}} = \dfrac{3}{4}$.

Encuéntrense: $m\angle M$, $m\angle N$ y $m\angle P$.



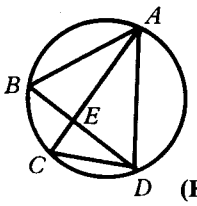
21. Dado: $m\overset{\frown}{BC} = 100$, $m\overset{\frown}{AB} = 80$
$\overline{AC}$ es un diámetro.
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

Encuéntrese: **a.** $m\angle BAC$. **b.** $m\angle ACB$.
c. $m\angle EBC$. **d.** $m\overset{\frown}{AD}$.



22. Dado: $\overline{AC}$ biseca a $\angle BAD$
$m\overset{\frown}{CD} = 80$, $m\overset{\frown}{AD} = 160$.

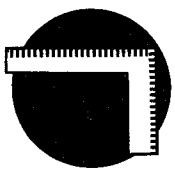
Encuéntrese: **a.** $m\angle BAC$. **b.** $m\angle BDC$.
c. $m\angle AEB$. **d.** $m\angle ADB$.



(Ejercicio 22-23)

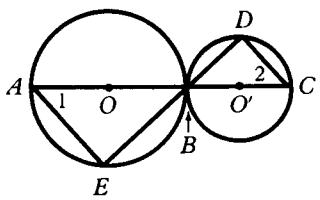
23. Dado: $\overline{AC}$ biseca a $\angle BAD$.
Pruébese: Tres ángulos de $\triangle ABE$ *son congruentes con tres ángulos de* $\triangle DCE$.

24. ¿Cómo puede emplearse una escuadra de carpintero para encontrar el centro de un disco? ¿Por qué funciona este método?



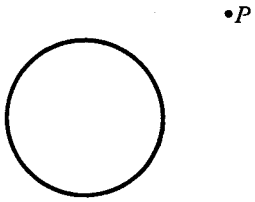
25. Dado: $\overline{AB}$ es un diámetro del círculo O
$\overline{BC}$ es un diámetro del círculo O'
El círculo O es tangente al círculo O' en B.

Pruébese: $m\angle 1 = m\angle 2$.



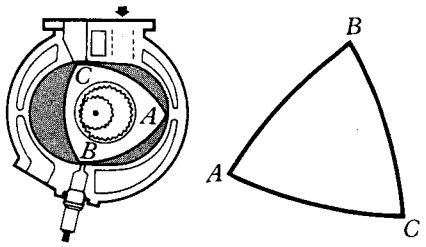
26. Pruébese que todos los ángulos inscritos que tengan el mismo arco interceptado o arcos interceptados congruentes tienen la misma medida.

27. Dibújense un círculo y un punto P que no esté dentro ni en el círculo. Trácense dos rectas que pasen por P y sean tangentes al círculo.



C.

28. Una curva de ancho constante como la de un motor Wankel se compone de tres arcos circulares AB, BC y AC. ¿Cuánto mide cada uno de estos arcos?
(Véase la construcción de la actividad de la pág. 366.)

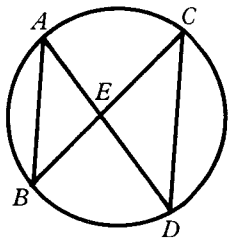


29. Pruébese que si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, sus ángulos opuestos son suplementarios.

30. Si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo y $m\angle A = 3x + 50$, $m\angle B = 4x + 25$ y $m\angle C = 7x + 30$, encuéntrese $m\angle D$.

31. Pruébese que un paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.

32. En la figura, $\angle BAD$ y $\angle BCD$ son ángulos inscritos. Pruébese que $\triangle ABE$ es semejante a $\triangle CDE$.



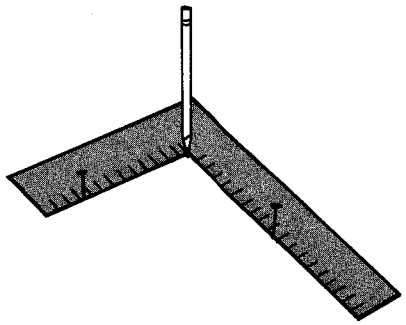
(Ejercicio 32)

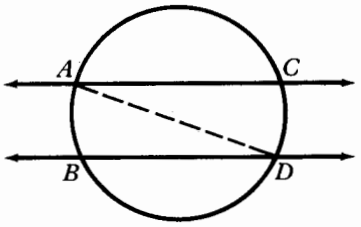
ACTIVIDADES

Para dibujar un círculo puede usarse una escuadra de carpintero.

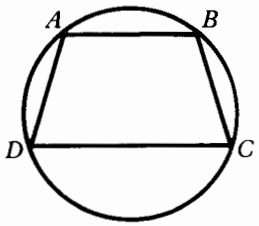
1. Apóyese la escuadra contra un par de clavos o alfileres y un lápiz en el ángulo recto.
2. Gírese la escuadra sin separarla de los clavos. El lápiz marcará el semicírculo con el diámetro determinado por los clavos. ¿Por qué?

Dibújese un círculo con este método.





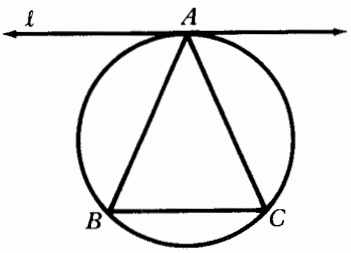
33. Demuéstrese que si dos rectas paralelas intersecan a un círculo, entonces interceptan a arcos congruentes.



34. **Dado:** $ABCD$ es un trapecio inscrito.
Pruébese: $ABCD$ es un trapecio isósceles.

35. **Dado:** $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Pruébese: $ABCD$ es un trapecio.

(Ejercicios 34, 35)

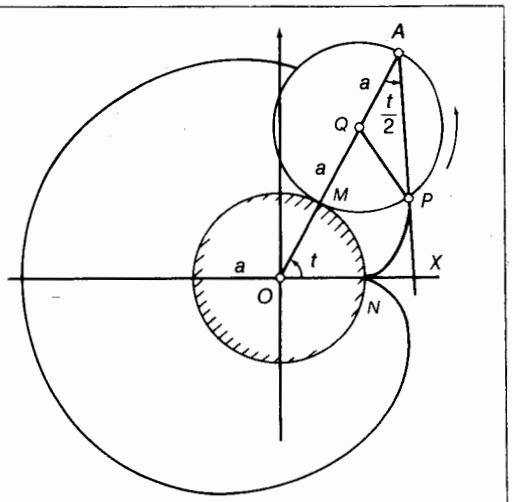


36. **Dado:** ℓ es tangente al círculo en A
$\overline{BC} \parallel \ell$.
Pruébese: $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

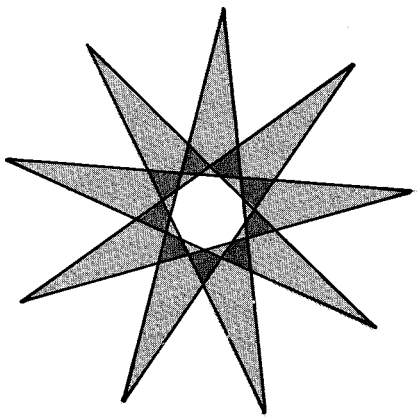
SOLUCION DE PROBLEMAS

La figura de la derecha muestra un círculo que rueda alrededor de otro generando una cardioide.

Si $m\angle AOX = t$, ¿por qué $m\angle OAP = \frac{t}{2}$?

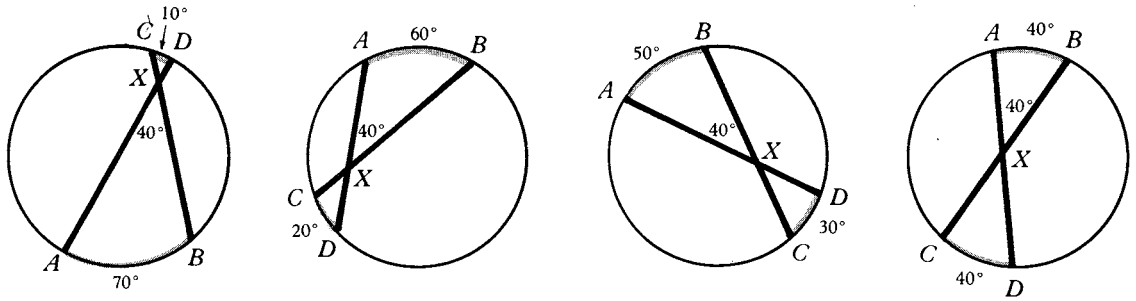


10.8 Angulos formados por cuerdas



El polígono con forma de estrella se dibuja uniendo cada cuarto punto de un conjunto de nueve igualmente espaciados sobre un círculo. (Véase la solución de problemas de la pág. 345.) En este diseño de estrella hay muchos ángulos que parecen congruentes. En esta sección se estudiará un teorema que puede usarse para demostrar que estos ángulos son congruentes.

En todas las figuras, $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD} = 80$.



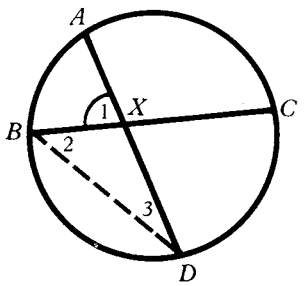
Estas figuras sugieren el teorema siguiente.

Teorema 10.14 Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.

PRUEBA

Dado: Las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto X.

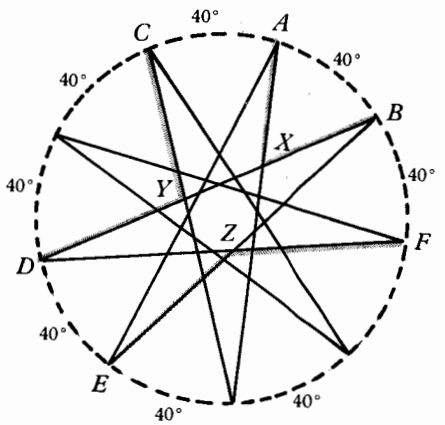
Pruébese: $m\angle AXB = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD})$.



Afirmaciones	Razones
1. Constrúyase $\overline{BD}$.	1. Construcción.
2. $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{CD}$.	2. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de su arco interceptado.
3. $m\angle 3 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle AXB = m\angle 2 + m\angle 3$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle AXB = \frac{1}{2}m\widehat{AB} + \frac{1}{2}m\widehat{CD}$.	5. Sustitución (afirmaciones 2, 3 y 4).
6. $m\angle AXB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$.	6. Propiedad distributiva.

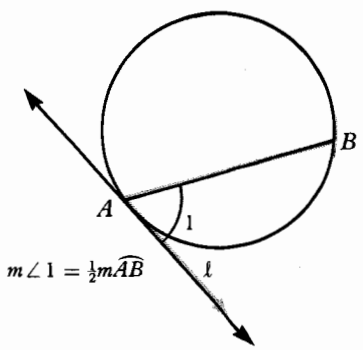
APLICACION

Determínese la medida de los ángulos de este polígono con forma de estrella. Se usará el teorema 10.14.



1. $m\angle AXB = \frac{1}{2}(40 + 80) = 60$.
2. $m\angle CYD = \frac{1}{2}(80 + 120) = 100$.
3. $m\angle EZF = \frac{1}{2}(120 + 160) = 140$.

El siguiente es un caso especial del teorema 10.14 para una recta tangente.

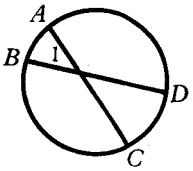


Teorema 10.15 La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.

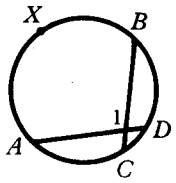
EJERCICIOS

A.

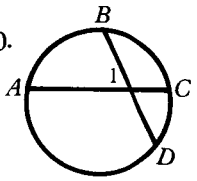
1. **Dado:** $m\overset{\frown}{AB} = 30$, $m\overset{\frown}{CD} = 20$.
   Encuéntrese: $m\angle 1$.



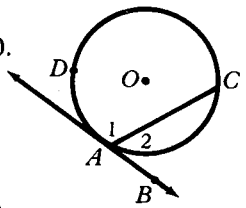
2. **Dado:** $m\overset{\frown}{AXB} = 190$, $m\overset{\frown}{CD} = 25$.
   Encuéntrese: $m\angle 1$.



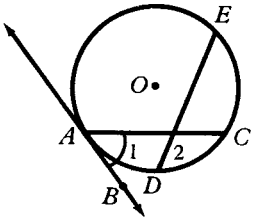
3. **Dado:** $m\angle 1 = 80$, $m\overset{\frown}{AB} = 100$.
   Encuéntrese: $m\overset{\frown}{CD}$.



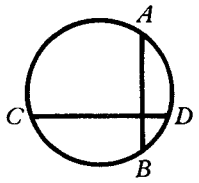
4. **Dado:** $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O, $m\overset{\frown}{ADC} = 300$.
   Encuéntrense: $m\angle 1$ y $m\angle 2$.



5. **Dado:** $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O, $m\overset{\frown}{AE} = 160$, $m\overset{\frown}{AD} = 50$, $m\overset{\frown}{DC} = 60$.
   Encuéntrense: $m\angle 1$ y $m\angle 2$.

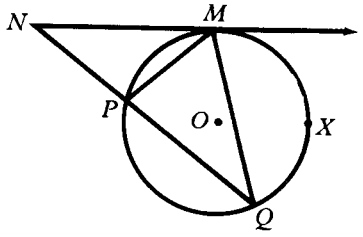


6. **Dado:** $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, $m\overset{\frown}{BD} = 20$, $m\overset{\frown}{AD} = 80$.
   Encuéntrense: $m\overset{\frown}{AC}$ y $m\overset{\frown}{BC}$.



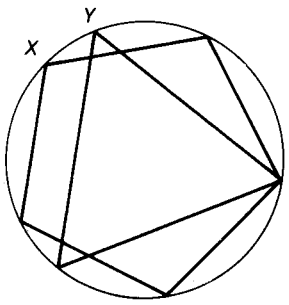
B.

7. **Dado:** $\overleftrightarrow{MN}$ es tangente al círculo O, $m\overset{\frown}{PQ} = 100$, $m\overset{\frown}{MXQ} = 150$.
   Encuéntrense: **a.** $m\angle NMP$. **b.** $m\angle PQM$. **c.** $m\angle MPQ$. **d.** $m\angle PMQ$. **e.** $m\angle MNP$.

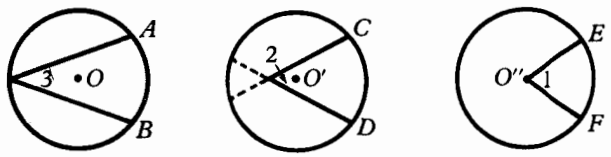


ACTIVIDADES

Con un compás y una regla, márquense 15 puntos igualmente espaciados alrededor de un círculo. Dibújense dos polígonos con forma de estrella, uno de ellos uniendo cada cuarto punto, y el otro, uniendo cada séptimo punto. (*Sugerencia:* Constrúyanse un pentágono regular y un triángulo equilátero con un vértice común. Después, $m\overset{\frown}{XY} = 24 = \frac{1}{15}(360)$. El método para construir un pentágono regular se describe en la página 274.)

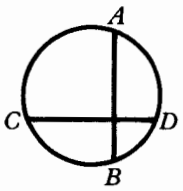


8. Los tres círculos que se muestran a continuación son congruentes, con $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = m\widehat{EF}$. $\angle 1$ es un ángulo central y $\angle 3$ es un ángulo inscrito. ¿Cuál de los tres ángulos es el mayor y cuál el menor? ¿Por qué?

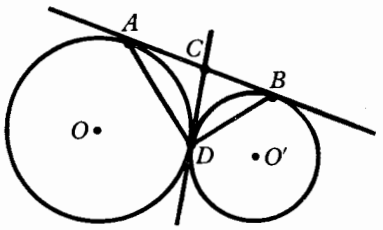


C.

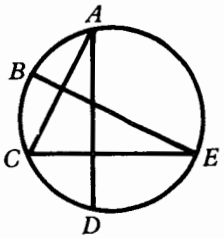
9. Dado: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.
Pruébese: $m\widehat{AD} + m\widehat{BC} = m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$.



10. Dado: $\overline{AB}$ es una tangente externa común a los círculos O y O'. $\overline{CD}$ es una tangente interna común.
Pruébese: $\angle ADB$ es un ángulo recto.



11. Dado: $\overline{AD} \perp \overline{CE}$
$\overline{BE} \perp \overline{AC}$.
Pruébese: $m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$.

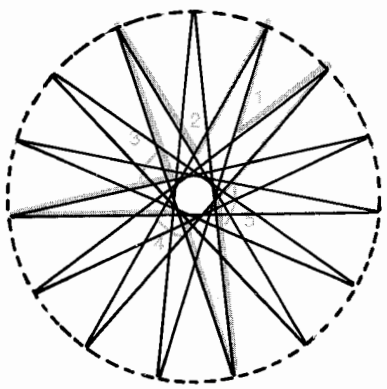


SOLUCION DE PROBLEMAS

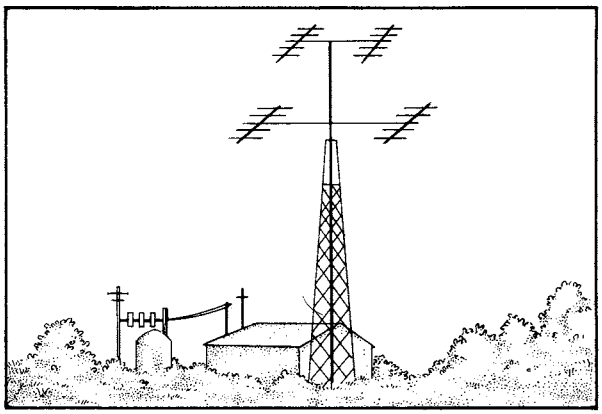
En el polígono con forma de estrella de la figura, se resaltaron en color cinco ángulos.

Sin usar el transportador, encuéntrese lo siguiente:

$m\angle 1 = \underline{?}$. $m\angle 4 = \underline{?}$.
$m\angle 2 = \underline{?}$. $m\angle 5 = \underline{?}$.
$m\angle 3 = \underline{?}$.



10.9 Angulos y segmentos formados por tangentes y secantes

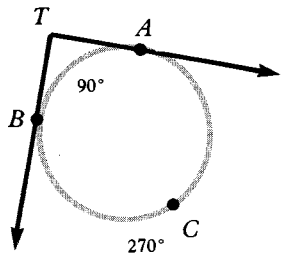


Cuando los ingenieros diseñan torres de antena, necesitan saber qué fracción de la superficie de la Tierra cubrirá la señal de radio de la torre.

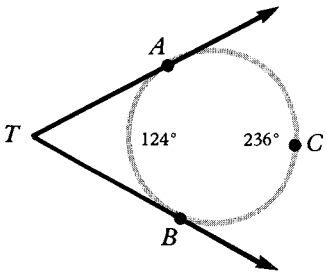
En esta sección se simplifica este problema al considerar un corte transversal circular de la Tierra que pasa por la base de la torre. Se plantea entonces la siguiente cuestión: «Si se conoce la medida del ángulo formado por la punta de la torre y los rayos tangentes al círculo, ¿se puede encontrar la fracción de la circunferencia del círculo cubierta por las señales de radio?

En cada caso, $\overrightarrow{TA}$ y $\overrightarrow{TB}$ son rayos tangentes.

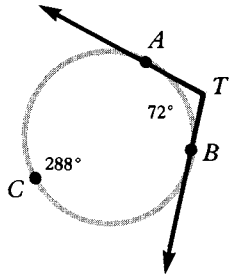
$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 180$



$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 112$



$m\widehat{ACB} - m\widehat{AB} = 216$



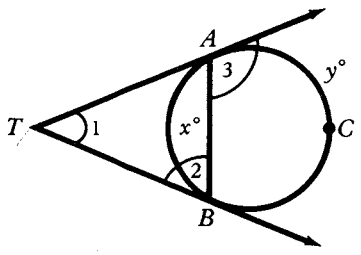
Mídase $\angle ATB$ con un transportador. ¿Cuál es el resultado?

Teorema 10.16 La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo que se intersecan, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

PRUEBA

Dado: $\overrightarrow{TA}$ y $\overrightarrow{TB}$ son rayos tangentes a un círculo.
$m\widehat{AB} = x$, y $m\widehat{ACB} = y$.

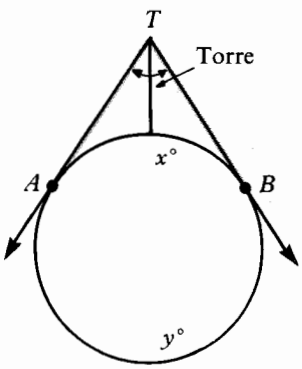
Pruébese: $m\angle ATB = \frac{1}{2}(y - x)$.



Afirmaciones	Razones
1. $m\angle 2 = \frac{1}{2}x$.	1. La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda es igual a la mitad del arco interceptado.
2. $m\angle 3 = \frac{1}{2}y$.	2. ¿Por qué?
3. $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$.	3. La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores no contiguos.
4. $m\angle 1 = m\angle 3 - m\angle 2$.	4. ¿Por qué?
5. $m\angle 1 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$.	5. Sustitución.
6. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(y - x)$.	6. ¿Por qué?

APLICACION

Supóngase que el ángulo formado por los dos rayos tangentes que parten de la punta de la torre de antena mide 160°. ¿Qué fracción del círculo cubren las ondas de radio?



$\frac{1}{2}(y - x) = 160$ (1)
$(y + x) = 360$ (2)

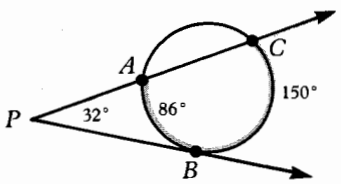
Respuesta: 1. El teorema 10.16 da como resultado la ecuación (1) al pie de la figura y la ecuación (2) expresa una propiedad del círculo.

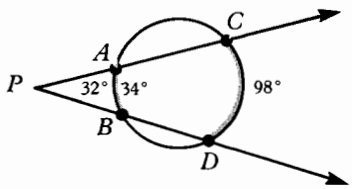
2. Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentra que $x = 20$.

3. $\frac{x}{360} = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}$.

Las ondas de radio cubren $\frac{1}{18}$ de la circunferencia del círculo.

Estas figuras sugieren un teorema adicional.

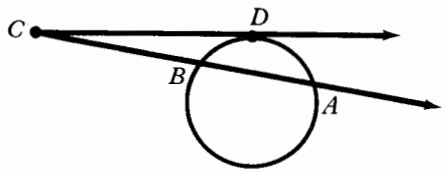


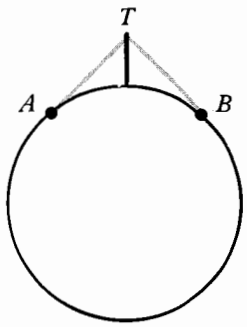


Teorema 10.17 La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, o por dos secantes desde un punto exterior a un círculo, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

Al principio de esta sección se preguntó qué fracción de superficie de la Tierra cubrirían las señales de radio de la torre. Otra cuestión de igual importancia es la distancia que cubren las señales de radio. El teorema siguiente dará una buena aproximación a la respuesta.

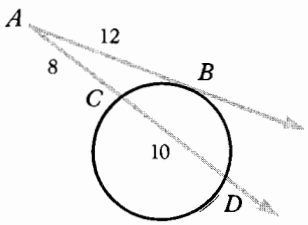
Para presentar el siguiente teorema es necesario introducir algunos términos nuevos.



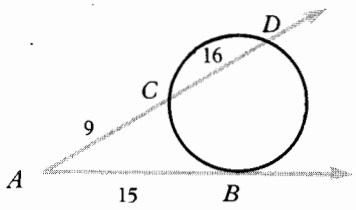


Recuérdese que $\overleftrightarrow{AC}$ es una secante. $\overline{CA}$ es un *segmento secante*. $\overline{BC}$ es un *segmento secante externo*. $\overline{CD}$ es un *segmento tangente*.

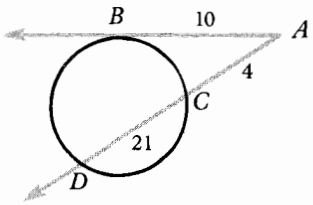
Considérense los siguientes ejemplos de círculos con una tangente y una secante. ¿Qué relación común a los tres ejemplos se puede encontrar?



Obsérvese que
$12^2 = 8 \times 18$



Obsérvese que
$15^2 = 9 \times 25$



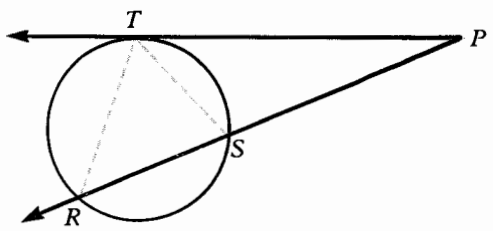
Obsérvese que
$10^2 = 4 \times 25$

Esta relación se establece como el teorema 10.18.

Teorema 10.18 Si se trazan un segmento tangente y un segmento secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

PRUEBA

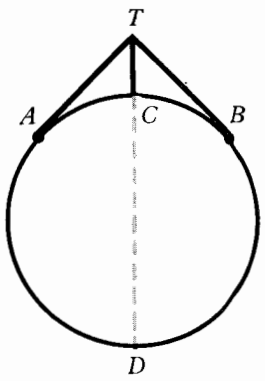
Dado: $\odot O$ con el segmento tangente $\overline{PT}$.
Pruébese: $(PT)^2 = PS \cdot PR$
Plan: Márquense $\overline{ST}$ y $\overline{TR}$. Empléense los triángulos semejantes.



Afirmaciones	Razones
1. Dibújese $\overline{ST}$ y $\overline{TR}$.	1. Construcción.
2. $\angle P \cong \angle P$.	2. Propiedad reflexiva.
3. $m\angle PTS = \frac{1}{2}m\widehat{TS}$.	3. ¿Por qué?
4. $m\angle SRT = \frac{1}{2}m\widehat{TS}$.	4. ¿Por qué?
5. $\angle PTS \cong \angle SRT$.	5. Sustitución, definición de congruencia.
6. $\triangle PTS \sim \triangle PRT$.	6. Teorema de la semejanza AA.
7. $\frac{PT}{PR} = \frac{PS}{PT}$.	7. Definición de triángulos semejantes.
8. $(PT)^2 = PS \cdot PR$.	8. Teorema 9.1.

APLICACION

Con anterioridad se planteó la cuestión de la distancia que cubren las ondas de radio desde la torre. La longitud TA es una buena aproximación a la respuesta. El teorema 10.18 indica que $(TA)^2 = (TC)(TD)$ o bien $TA = \sqrt{(TC)(TD)}$.



Supóngase que la torre tiene 800 pies de altura. Se supondrá que el diámetro $\overline{CD}$ de la Tierra es de 8000 millas × 5280 pies/millas, o 42 240 000 pies. Entonces,

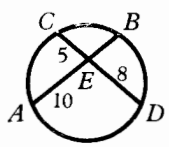
$$TA = \sqrt{800 \text{ pies} \times 42\,240\,800 \text{ pies}} \doteq 183\,827.7 \text{ pies} \doteq 34.8 \text{ millas.}$$

Los dos teoremas siguientes también incluyen segmentos relacionados con círculos.

Teorema 10.19 Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.

Teorema 10.20 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

Ejemplo 1



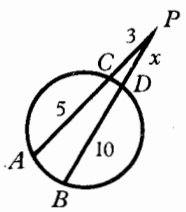
Encuéntrese: BE

Por el teorema 10.19,

$CE \cdot ED = BE \cdot AE$.

$$BE = \frac{CE \cdot ED}{AE} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4.$$

Ejemplo 2



Encuéntrese: PD

Por el teorema 10.20,

$PC \cdot PA = PD \cdot PB$.

$3 \cdot 8 = x(x + 10)$

$(x + 12)(x - 2) = 0$.

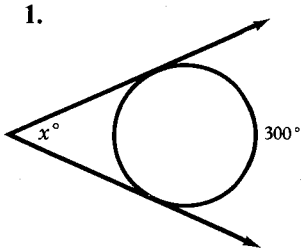
$x = 2$

EJERCICIOS

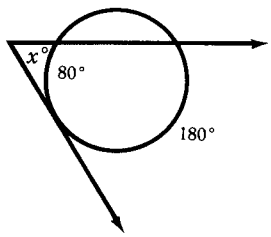
A.

En los ejercicios 1 a 12, encuéntrese x. Puede suponerse que las rectas que parecen tangentes lo son.

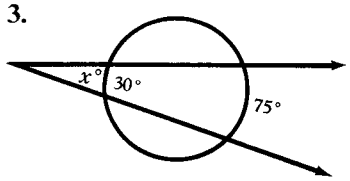
1.



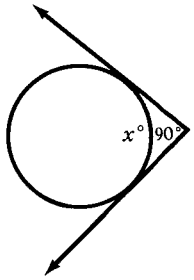
2.



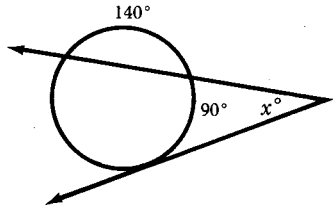
3.



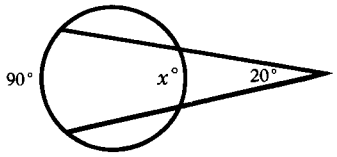
4.



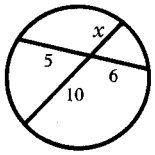
5.



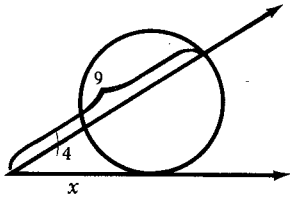
6.



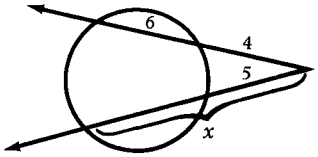
7.



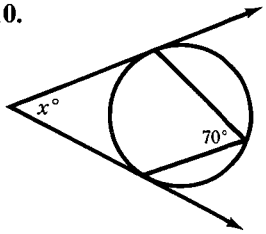
8.



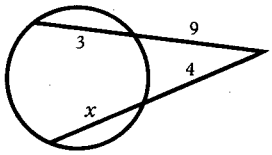
9.



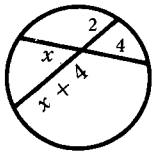
10.



11.

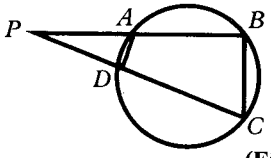


12.



B.

En los ejercicios 13 a 15, $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito. $m\widehat{AB} = 100$, $m\widehat{AD} = 30$, $m\widehat{BC} = 90$.



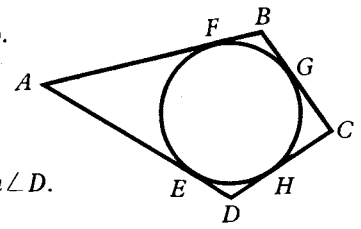
(Ejercicio 13-15)

13. Encuéntrese $m\angle P$.

14. Encuéntrese $m\angle BAD$.

15. Encuéntrese $m\angle ABC$.

En los ejercicios 16 a 19, $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. $m\widehat{FG} = 60$, $m\widehat{GH} = 70$, $m\widehat{HE} = 80$.



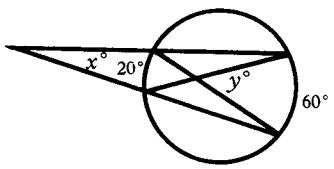
16. Encuéntrese $m\widehat{EF}$.

17. Encuéntrese $m\angle A$.

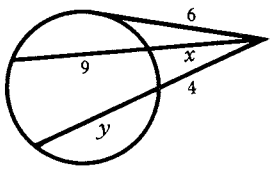
18. Encuéntrese $m\angle B$.

19. Encuéntrense $m\angle C$ y $m\angle D$.

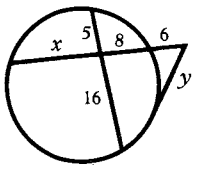
20. Encuéntrense los valores de x e y.



21. Encuéntrense los valores de x e y.



22. Encuéntrense los valores de x e y.

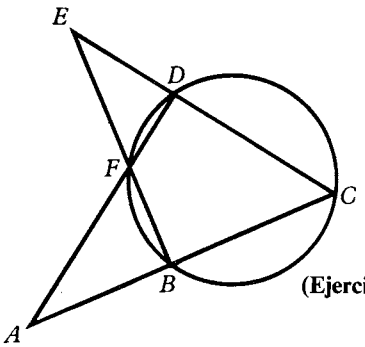


En los ejercicios 23 a 25, $\overline{EC}$, $\overline{EB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ son secantes. $m\angle E = 40$, $m\widehat{BC} = 120$, y $m\widehat{BF} = 80$.

23. Encuéntrese $m\widehat{DF}$.

24. Encuéntrese $m\widehat{DC}$.

25. Encuéntrese $m\angle A$.



(Ejercicios 23-25)

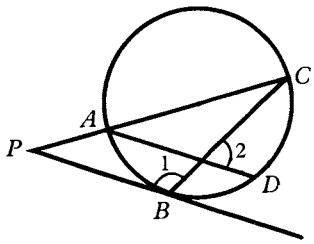
En los ejercicios 26 a 29, $m\widehat{AB} = 55$, $m\widehat{BD} = 40$, $\overline{AC}$ es un diámetro y $\overline{PB}$ es tangente al círculo en B.

26. Encuéntrese $m\angle P$.

27. Encuéntrese $m\angle 2$.

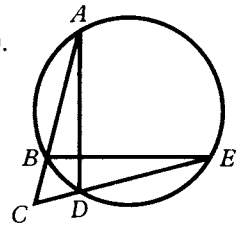
28. Encuéntrese $m\angle 1$.

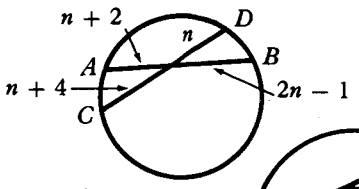
29. ¿Es $\overline{AD} \parallel \overline{PB}$? Explíquese.



(Ejercicios 26-29)

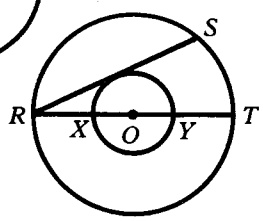
30. Dado: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ y $m\angle C = 40$.
Encuéntrese: $m\widehat{BD}$.



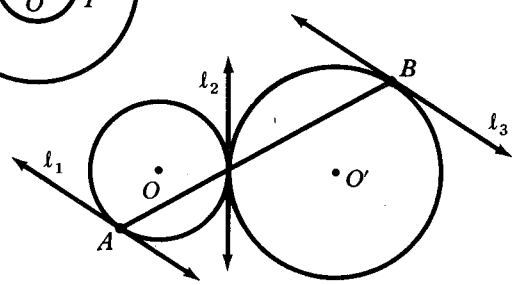


31. Encuéntrense AB y CD.

C.



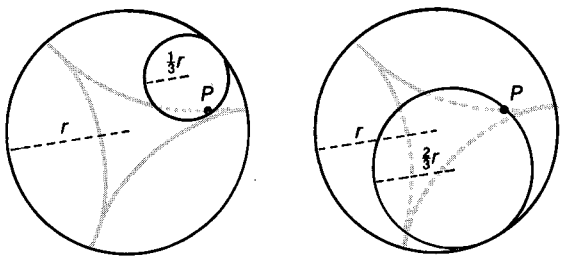
32. En la figura, O es el centro de ambos círculos. $\overline{RS}$ es tangente al círculo menor. Si $RX = 5$ y $RS = 30$, encuéntrese XY.



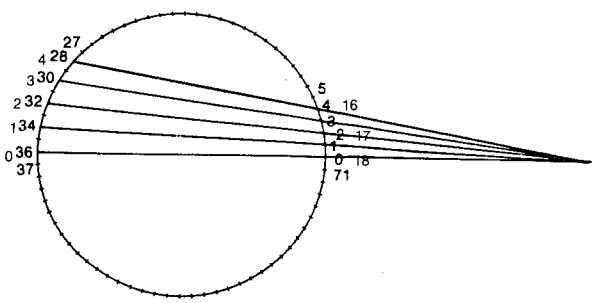
33. En esta figura, ℓ_2 es tangente a ambos círculos; ℓ_1 y ℓ_3 son tangentes a los círculos en los puntos A y B, respectivamente. Demuéstrese que $\ell_1 \parallel \ell_3$.

ACTIVIDADES

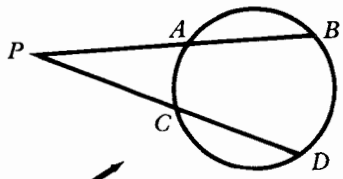
Cuando se rueda un círculo a lo largo del interior de otro círculo más grande, un punto P del círculo que rueda describe una trayectoria (en líneas rojas) denominada *deltoide*, siempre que el radio del círculo que rueda sea $\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$ del radio del mayor. Trácese una deltoide siguiendo las instrucciones.



1. Dibújese un círculo de 3 cm de radio en el centro de una hoja de papel. Márquense puntos e intervalos de 5°. Numérense los puntos 0, 1, 2, ... en la dirección en que giran las manecillas del reloj (números en negro).
2. Empezando en el 36 (en negro), numérense puntos alternos 0, 1, 2... en la dirección en que giran las manecillas del reloj (números en rojo).
3. Trácese un rayo *desde* un punto *rojo, que pase por* un punto con el mismo número en *negro*. Hágase lo mismo con todos los números del 0 al 71.
4. Señálese la deltoide que rodea al círculo.



34. Si $\overline{PB}$ y $\overline{PD}$ son segmentos secantes y $PB = PD$, demuéstrese que $PA = PC$.

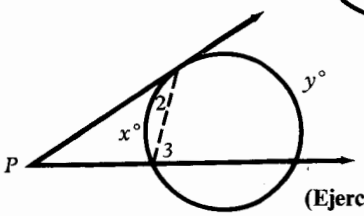


(Ejercicio 34)

35. Pruébese el teorema 10.17 para el caso de una tangente y una secante.

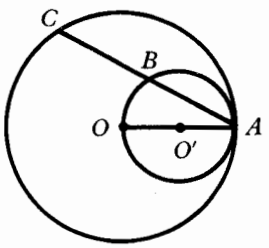
36. Pruébese el teorema 10.19.

37. Pruébese el teorema 10.20.



(Ejercicio 35)

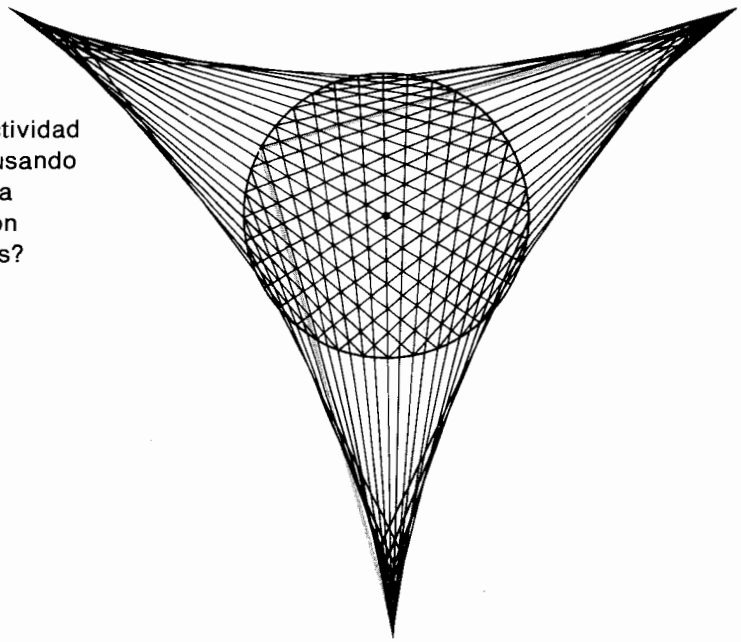
38. Si dos círculos son tangentes interiormente y el diámetro del círculo menor es el radio del círculo mayor, entonces cualquier cuerda del círculo mayor que vaya al punto de tangencia será bisecado por el círculo menor.



Dado: $O'A = \frac{1}{2}OA$ y los círculos son tangentes en A.
Pruébese: B es el punto medio de $\overline{AC}$.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Con el método descrito en la actividad anterior, se trazó una deltoide usando intervalos de 10°. Cada punto da origen a dos rayos. ¿Por qué son perpendiculares estos dos rayos?



Capítulo 10 Conceptos importantes

Términos

Radio (pág. 558)
Cuerda (pág. 558)
Diámetro (pág. 558)
Tangente (pág. 559)
Secante (pág. 559)
Angulo inscrito (pág 559)
Angulo central (pág. 559)
Arco menor (pág. 562)
Arco mayor (pág. 562)
Medida de un arco menor (pág. 562)
Medida de un arco mayor (pág. 562)
Arcos congruentes (pág. 563)
Círculos congruentes (pág. 563)

Postulado Postulado de la suma de arcos (pág. 346)

Teoremas

10.1 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.

10.2 En un círculo, o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.

10.3 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro

10.4 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

10.5 La bisectriz perpendicular de una cuerda contiene al centro del círculo.

10.6 Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.

10.7 Si una recta que pasa por el centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

10.8 Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

10.9 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

10.10 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.

10.11 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

10.12 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

10.13 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

10.14 Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.

10.15 La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.

10.16 La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo que se intersecan, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

10.17 La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, o por dos secantes, desde un punto exterior a un círculo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

10.18 Si se trazan un segmento tangente y otro secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

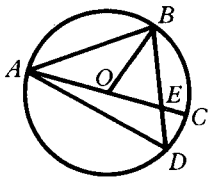
10.19 Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.

10.20 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

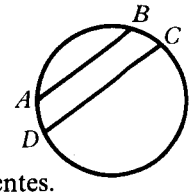
Capítulo 10 Resumen

En los ejercicios 1 a 4, indíquese si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Si una afirmación es falsa, dibújese un contraejemplo.

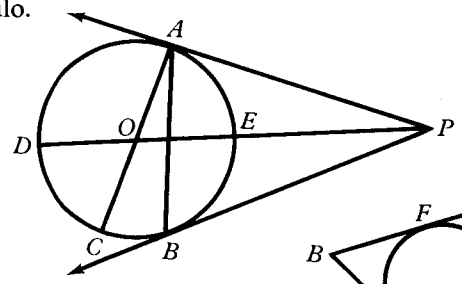
1. Si un triángulo está inscrito en un círculo, con un lado como diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.
2. Si una recta biseca a dos cuerdas que no son diámetros, entonces las cuerdas son paralelas.
3. Si una recta es perpendicular a una cuerda, entonces contiene al centro del círculo.
4. Si $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ son tangentes al mismo círculo en los puntos A y B, respectivamente, entonces $PA = PB$.
5. **Dado:** $m\angle AOB = 120$, $m\widehat{AD} = 150$, $\overline{AC}$ es un diámetro.
   Encuéntrese: **a.** $m\angle ADB$.
   b. $m\angle BAC$.
   c. $m\angle CED$.
   d. $m\widehat{BCD}$.



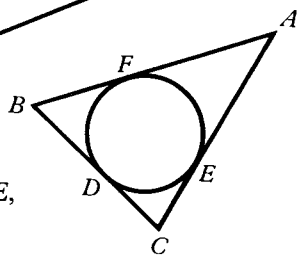
6. **Dado:** $m\widehat{AD} = m\widehat{BC}$.
   Pruébese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



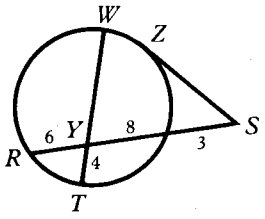
7. **Dado:** $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes.
   O es el centro de un círculo.
   $\overline{AC}$ es un diámetro.
   $m\angle APO = 20$.
   Encuéntrese: **a.** $m\angle DPB$.
   b. $m\widehat{AD}$.
   c. $m\widehat{BC}$.
   d. $m\widehat{AE}$.
   e. $m\angle CAB$.



8. **Dado:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son tangentes en los puntos F, D y E, respectivamente. $CE = 3$, $AF = 5$, $BC = 7$.
   Encuéntrese: **a.** la longitud de $\overline{BD}$.
   b. el perímetro de $\triangle ABC$.



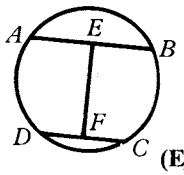
9. Si una cuerda de 16 cm está a 15 cm del centro, ¿cuál es el radio del círculo?
10. $\overline{SZ}$ es tangente al círculo que se muestra en la figura. Encuéntrense SZ y WY.



Capítulo 10 Examen

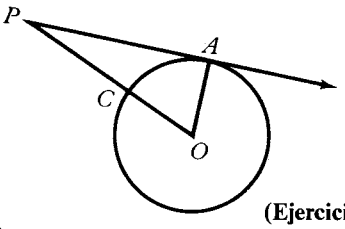
En los ejercicios 1 a 4, indíquese si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Si alguna afirmación es falsa, dibújese un contraejemplo.

1. En dos círculos diferentes, si dos cuerdas tienen la misma longitud, están a la misma distancia de sus centros.
2. Si un triángulo está inscrito en un círculo y los arcos interceptados tienen medidas de 200°, 90° y 70°, entonces el triángulo es obtusángulo.
3. Si una recta biseca al arco menor de una cuerda, también biseca al arco mayor.
4. Si dos tangentes son paralelas, entonces sus puntos de tangencia determinan un diámetro.



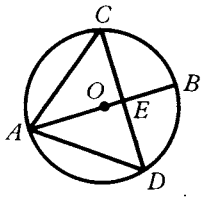
(Ejercicio 5)

5. **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{EF}$ es la bisectriz perdicular de $\overline{AB}$.
   Pruébese: $\overline{EF}$ biseca a $\overline{CD}$.
6. **Dado:** $\overline{PA}$ es tangente al círculo O.
   $OA = 10$ cm, $PA = 24$ cm.
   Encuéntrese la longitud de $\overline{PC}$.

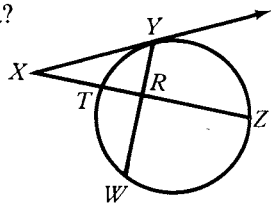


(Ejercicio 6)

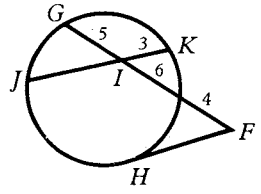
7. **Dado:** $\overline{AB}$ es un diámetro
   $m\angle CAB = 50$
   $m\widehat{BD} = 20$.
   Encuéntrense: **a.** $m\widehat{BC}$.
   b. $m\widehat{AC}$.
   c. $m\angle ADC$.
   d. $m\angle BED$.



8. Supóngase que una cuerda mide 6 mm desde el centro de un círculo de radio 10 mm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
9. **Dado:** $m\angle X = 30$, $m\widehat{YT} = 50$, $m\angle WRZ = 90$
   $\overrightarrow{XY}$ es tangente al círculo.
   Encuéntrense: $m\widehat{YZ}$, $m\widehat{WZ}$ y $m\widehat{TW}$.

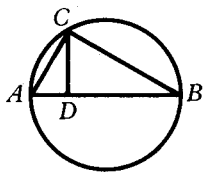


10. En la figura siguiente, $\overline{FH}$ es tangente al círculo. Encuéntrense JI y FH.

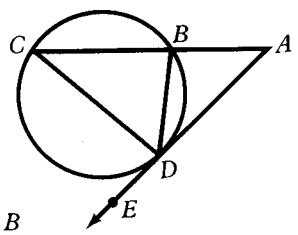


Resumen global (Caps. 8 a 10)

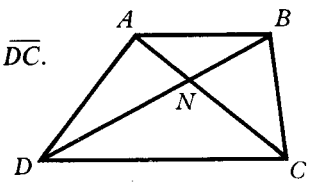
1. Indíquese si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a. Si un paralelogramo está inscrito en un círculo, es un rectángulo.
   b. Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces sus diagonales son congruentes.
   c. Si $m\angle A = 40$ en el triángulo rectángulo ABC y $m\angle D = 50$ en el triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son semejantes.
   d. Todos los rectángulos son polígonos semejantes.



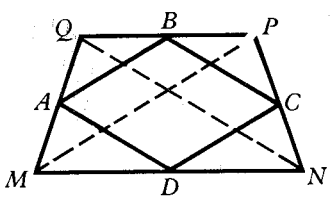
2. $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.
   a. Si $AD = 4$ y $AB = 12$, encuéntrese CD.
   b. Si $AB = 13$ y $CD = 6$, encuéntrese AD.
   c. Si $CB = 12$ y $AB = 13$, encuéntrese BD.
   d. Demuéstrese que $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.
3. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un decágono regular?
4. $\overline{AC}$ es una secante, $\overline{AD}$ es una tangente, $m\widehat{BC} = 100$, $m\angle CBD = 80$ y $m\widehat{BD} = 100$.
   a. Encuéntrese $m\angle ABD$.
   b. Encuéntrese $m\angle BCD$.
   c. Encuéntrese $m\angle CAD$.
   d. Encuéntrese $m\angle EDC$.



5. **Dado:** $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
   Pruébese: $NB \cdot NC = NA \cdot ND$.



6. Si cuatro ángulos de un pentágono miden 100°, 160°, 90° y 150°, ¿cuál es la medida del quinto ángulo?
7. **Dado:** $MNPQ$ es un trapecio con $MP = QN$. A, B, C y D son puntos medios, como se ilustra la figura.
   Pruébese: $ABCD$ es un rombo.

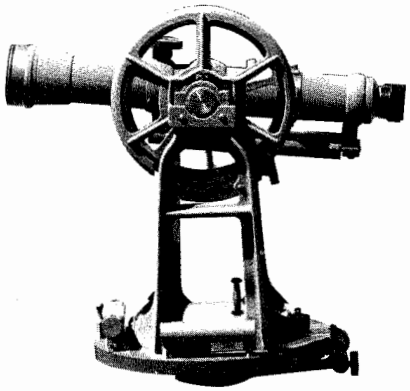


LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

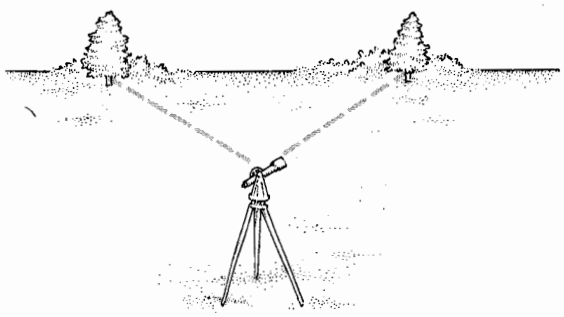
Agrimensura: El teodolito

El teodolito es, quizá, el instrumento más importante para el agrimensor. Se emplea para medir ángulos y distancias.

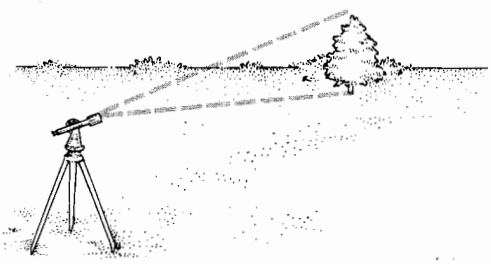
Los agrimensores están relacionados con la construcción de edificios, caminos, puentes y presas. Una de las responsabilidades de los agrimensores es establecer límites exactos en los terrenos. Toda la información necesaria la toman en el lugar, y luego, en la oficina, hacen dibujos o mapas del terreno medido.



El teodolito puede usarse para medir ángulos entre objetos y ángulos de elevación. Un ángulo entre objetos se mide enfocando el primer objeto y luego moviendo el telescopio a la derecha o a la izquierda, hacia el segundo objeto. Un ángulo de elevación se mide inclinando el telescopio hacia arriba para enfocar el extremo del objeto. El teodolito tiene dos escalas, una para medir ángulos horizontales y otra para medir ángulos verticales.

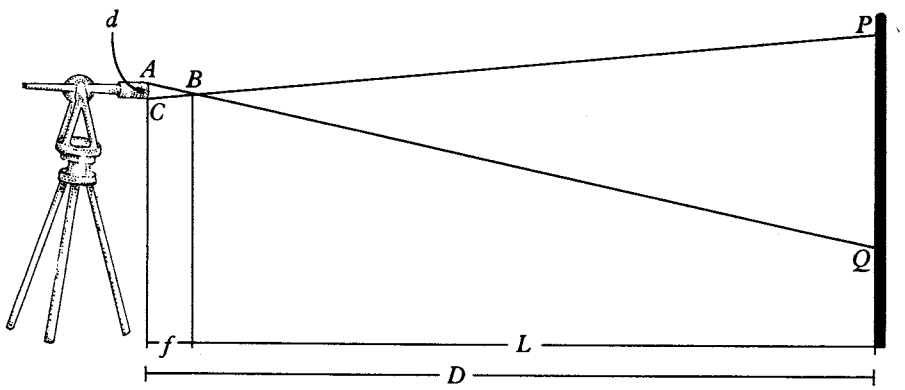


Medición de un ángulo entre dos objetos (ángulo horizontal)



Medición de un ángulo de elevación (ángulo vertical)

El teodolito también se emplea para medir distancias. Las propiedades ópticas del telescopio de un teodolito hacen que los rayos de luz se crucen y formen un par de triángulos semejantes.



Para medir distancias, se suelen necesitar dos personas. Una de ellas está en el teodolito y la otra se coloca en la segunda ubicación, sosteniendo un jalón graduado perpendicular al suelo. Los siguientes pasos muestran cómo encontrar la distancia deseada D.

Paso 1 Mírese por el telescopio. Léanse los números de jalón para determinar la distancia PQ.

Paso 2 Encuéntrese L por medio de una proporción basada en triángulos semejantes.

Paso 3 Súmense f y L para encontrar D.

1. ¿Por qué $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle QBP$?

2. f y L son longitudes de las alturas de los dos triángulos. Se puede demostrar que

$$\frac{f}{L} = \frac{d}{PQ}.$$

Empléese esta proporción y encuéntrese una expresión para $\frac{f}{d}$.

3. f es la distancia focal del telescopio. El telescopio está construido para que los rayos de luz se crucen siempre a la misma distancia. d es también un punto fijo en un telescopio dado. Por tanto, la razón f/d es fija.
Supóngase que $f = 1$ metro, $d = 1$ centímetro y $PQ = 0.836$ metros. Encuéntrense L y D. (Véase el Paso 3.)

TEMA 15

Área y perímetro

CAPÍTULO 11

11.1 Postulados del área 610

11.2 Área de paralelogramos 614

11.3 Áreas de triángulos y trapecios 618

11.4 Área de polígonos regulares 624

11.5 Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes 628

11.6 La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo 632

11.7 Área de círculos 636

Conceptos importantes 642

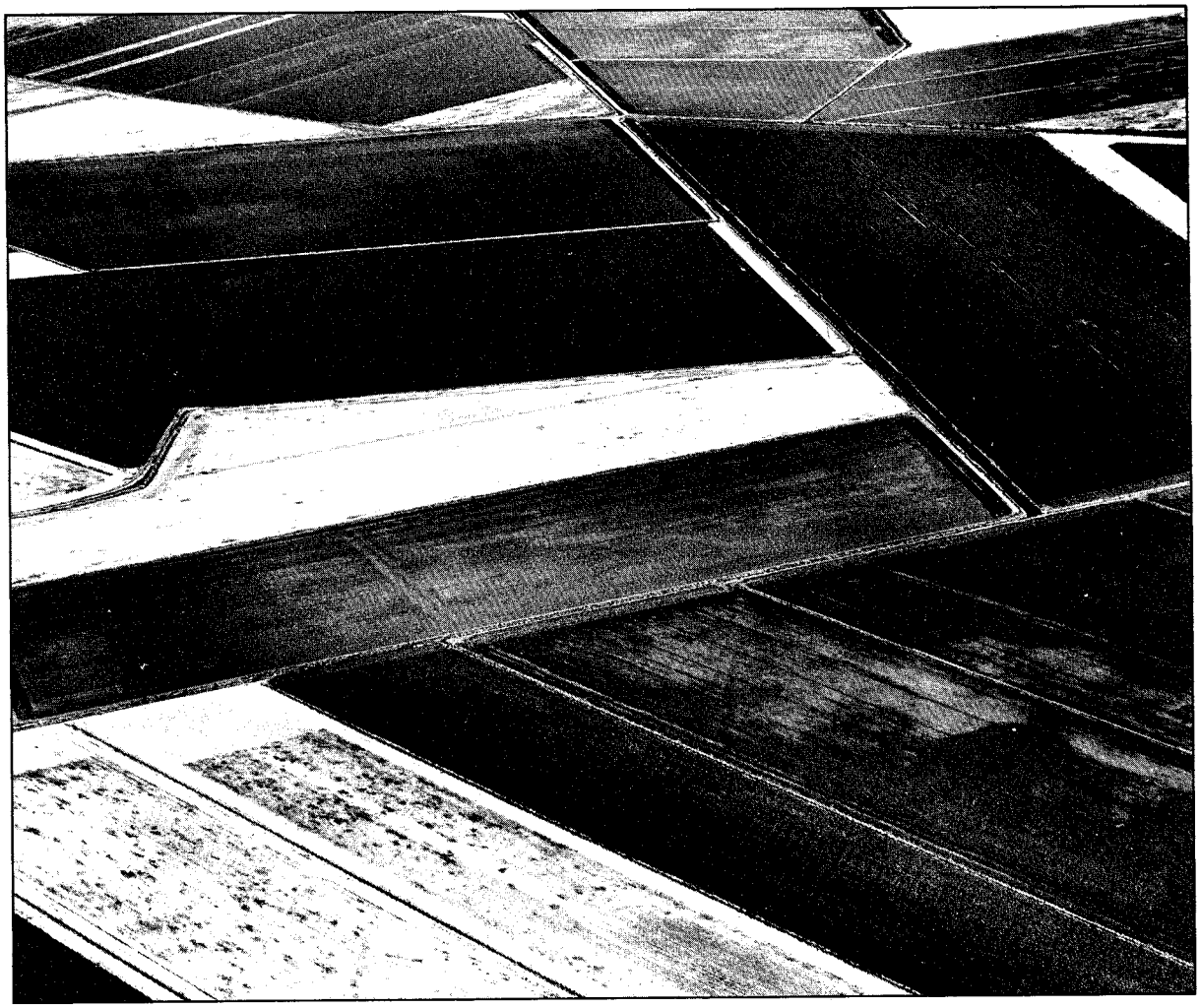
Resumen 643

Examen 644

Repaso de álgebra 645

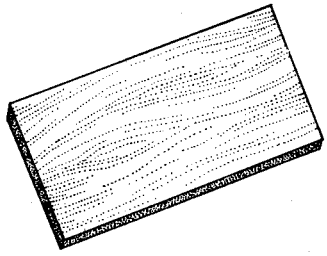
La geometría en nuestro mundo
Gráficas por computador: transformaciones 646

Area y perímetro



11.1 Postulados del área

Al construir una casa, se clavan tablas para cubrir la estructura. Después, se pintan o barnizan. El tejado se suele cubrir con planchas de madera prensada que luego se cubrirán con tejas. La construcción de casas proporciona muchas aplicaciones de los postulados y definiciones de esta sección.

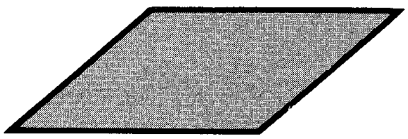


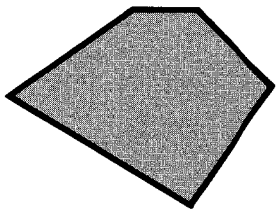
Una tabla representa un polígono llamado rectángulo. La superficie de esta tabla representa un subconjunto de un plano denominado *región poligonal.*

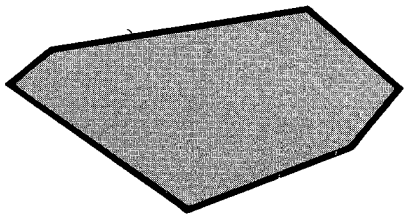
Definición 11.1

Una **región poligonal** es un subconjunto de un plano acotado por un polígono (o polígonos).

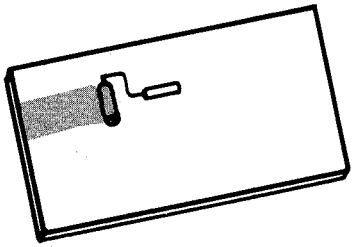
Los siguientes son tres ejemplos de regiones poligonales.







¿Qué cantidad de barniz se requiere para una plancha de madera prensada?

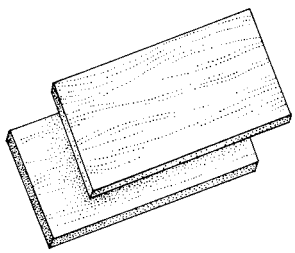


La cantidad de barniz que se requiere para una plancha de madera prensada depende del tamaño de ésta. Para describir el tamaño de la plancha se emplea un número llamado *área.*

Postulado del área

A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado **área.** El área de la región R se representa por $A(R)$.

Las propiedades de las áreas las describen varios postulados.

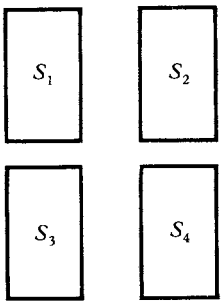


Dos planchas de madera del mismo tamaño tienen la misma área, por tanto deben necesitar la misma cantidad de barniz.

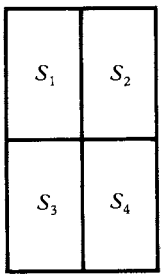
Este hecho es el tema de un postulado.

Postulado del área de regiones congruentes

Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces, las regiones que acotan tienen la misma área.



Cuatro planchas de madera, S_1, S_2, S_3 y S_4, se colocan juntas.



El área de esta figura de cuatro piezas es igual a la suma de las áreas de cada pieza.

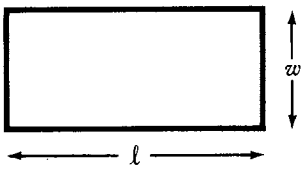
Esto es,

A (4 piezas) = $A(S_1)$ + + $A(S_2)$ + $A(S_3)$ + $A(S_4)$.

Postulado de la suma de áreas

Si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las n regiones.

Para conocer el número de planchas de madera que se necesitan para una casa, es necesario poder calcular el área de regiones rectangulares.



Area = ℓw

Este último postulado, en combinación con el postulado del área, el del área de regiones congruentes y el de la suma de áreas, permite calcular el área.

Postulado del área del rectángulo

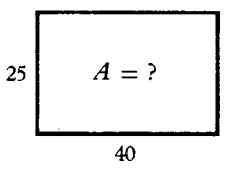
El área de un rectángulo de longitud ℓ y ancho w está dada por la fórmula ℓw.

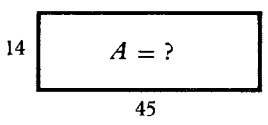
EJERCICIOS

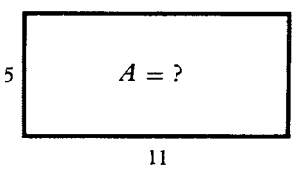
A.

1. Dibújese un polígono y sombréese la región poligonal que determina.
2. ¿Es el interior de un círculo una región poligonal?
3. ¿Es un rectángulo una región poligonal?
4. Si dos rectángulos tienen la misma área, ¿son necesariamente congruentes?
5. ¿Qué postulado expresa que toda región poligonal debe tener área?
6. ¿Expresan los postulados que sólo las regiones poligonales tienen área?
7. Dibújese un contraejemplo para la siguiente proposición: Si dos regiones poligonales tienen la misma área, entonces tienen el mismo número de lados.

Encuéntrense las áreas de las siguientes regiones. Puede suponerse que los ángulos que parecen rectos lo son.

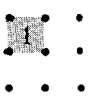
8. 

9. 

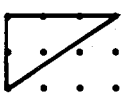
10. 

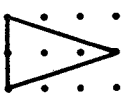
B.

En los ejercicios 11 a 16, supóngase que el área de la parte sombreada es 1. Encuéntrese el área de cada región mediante los postulados. (*Sugerencia:* Búsquense los rectángulos y los medios rectángulos.)



11.

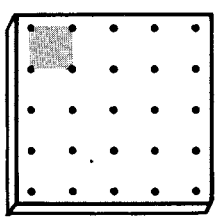
12. 

13. 

ACTIVIDADES

El área del cuadrado sombreado de este tablero es 1.

Constrúyanse o dibújense en un tablero como este triángulos con áreas de $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ y 3.



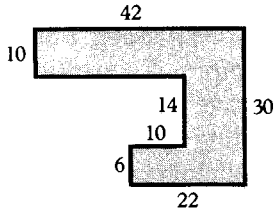
14.

15.

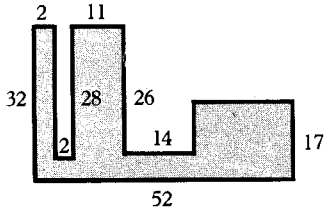
16.

Encuéntrese el área de cada una de estas regiones.

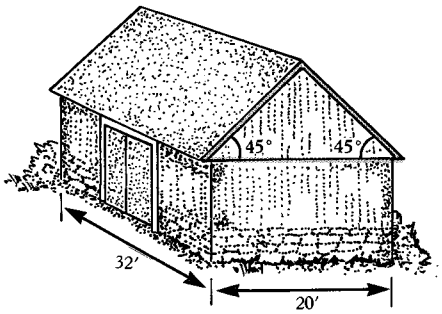
17.



18.



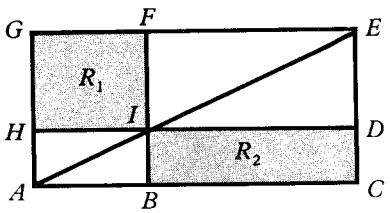
19. Encuéntrese el área del tejado de la figura. Si se supone que se desperdicia el 10 % de los materiales pedidos, ¿cuántas planchas de madera de 4 × 8 se necesitan para cubrir el tejado?



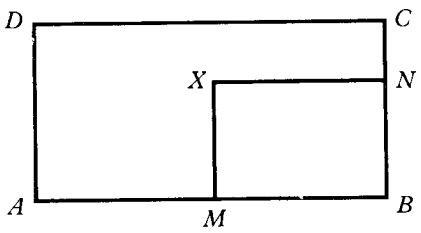
C.

20. Pruébese que la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos de igual área.

21. *ABIH*, *IDEF* y *ACEG* son rectángulos. Explíquese por qué las áreas de R_1 y R_2 son iguales. (*Sugerencia:* $A(\triangle ACE) = A(\triangle AGE)$.)

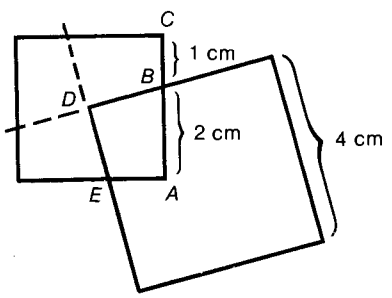


22. El área de *MBNX* es $\frac{1}{3}$ del área de *ABCD*, y *M* es el punto medio de $\overline{AB}$. ¿Qué relación existe entre la longitud de $\overline{BN}$ y la de $\overline{BC}$?

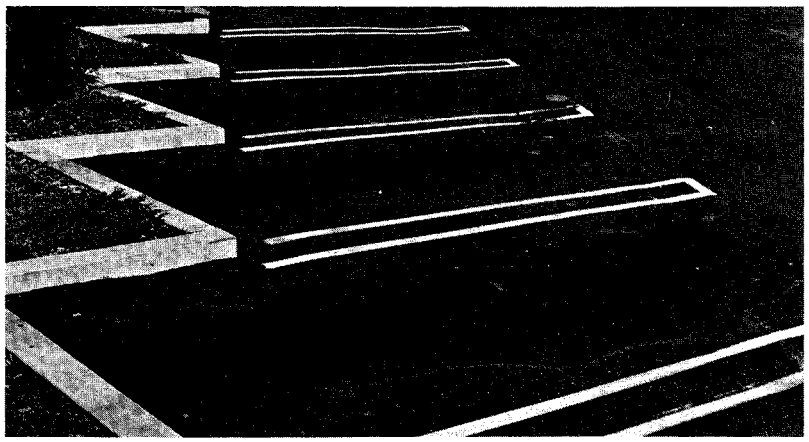


SOLUCION DE PROBLEMAS

En la figura de la derecha, *D* es el centro del cuadrado más pequeño. El cuadrado más grande solapa al pequeño en el cuadrilátero *ABDE*. Encuéntrese el área de este cuadrilátero. ¿Es importante que *B* triseque a $\overline{AC}$?



11.2 Area de paralelogramos



Hay situaciones en las que es importante encontrar el área de regiones que no son rectangulares. Por ejemplo, si se va a hacer un estacionamiento en batería para autos, cada espacio será una región en forma de paralelogramo. La cantidad de asfalto requerida para cada espacio depende del área de esa región en forma de paralelogramo.

1 centímetro

1 centímetro cuadrado

Al medir el área de regiones, debe elegirse una unidad de medida.

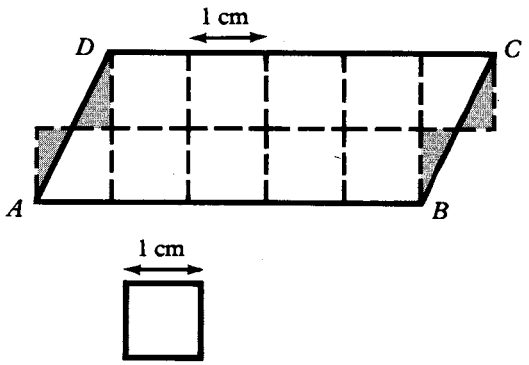
Las unidades más comunes para medir áreas son la pulgada cuadrada, el pie cuadrado, las yardas cuadradas, los centímetros cuadrados y los metros cuadrados.

Definición 11.2

Una **unidad cuadrada** es una región cuadrada en la cual cada uno de sus lados mide una unidad de longitud.

El área de una región puede determinarse contando el número de unidades cuadradas que se requieren para cubrir exactamente la región.

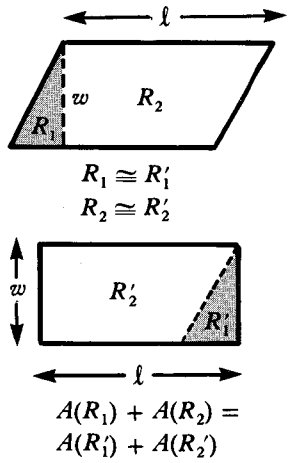
Acoplando unidades cuadradas y regiones triangulares congruentes, y mediante diversos postulados del área, se concluye que el paralelogramo de la derecha tiene un área de 10 centímetros cuadrados.



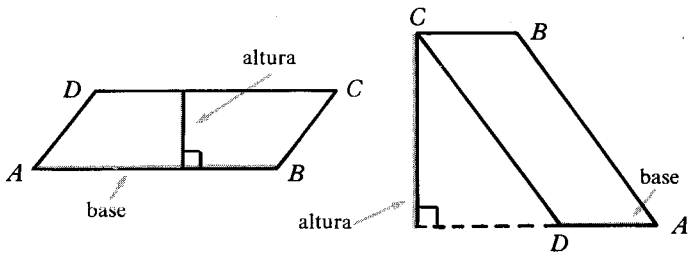
unidad cuadrada

Se escribe: $A(ABCD) = 10 \text{ cm}^2$

Otra forma de encontrar el área de un paralelogramo es imaginando que la pieza triangular del extremo de la figura se corta y se coloca en el otro extremo para formar un rectángulo. Así, con el postulado del área de regiones congruentes y el postulado de la suma de áreas, se concluye que las áreas del paralelogramo y del rectángulo son la misma. Por tanto, dado que el área de un rectángulo es el producto de la longitud por la anchura, se deduce que el área del paralelogramo también es «longitud por anchura».



Con los paralelogramos, se usan los términos *base* y *altura* en lugar de longitud y anchura. Cualquier lado de un paralelogramo puede ser la base. Una vez elegida la base, un segmento perpendicular a ella, con un extremo en la base y el otro en el lado opuesto, se denomina altura. Obsérvese que un paralelogramo tiene dos pares de bases paralelas.



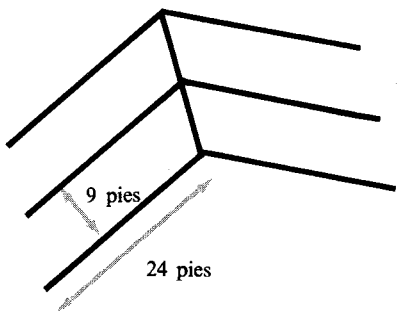
Definición 11.3

Una **altura de un paralelogramo** es un segmento perpendicular a un par de lados paralelos en los cuales tiene sus extremos. La **altura** del paralelogramo es la longitud de ese segmento.

Teorema 11.1 Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = bh$.

APLICACION

La medida estándar para un estacionamiento de vehículo en batería es 9 pies de ancho por 24 pies de largo. ¿Cuál es el área de la superficie que cubre el asfalto en un estacionamiento?



Respuesta. Un estacionamiento es un paralelogramo con 24 pies de base y 9 pies de altura. Si se aplica el teorema 11.1, se puede calcular el área:

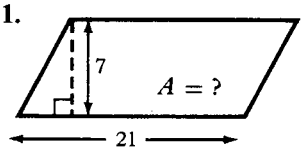
área = 24 pies × 9 pies = 216 pies cuadrados

EJERCICIOS

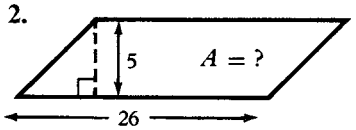
A.

En los ejercicios 1 a 3, encuéntrese el área de cada paralelogramo.

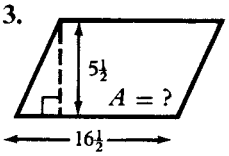
1.



2.

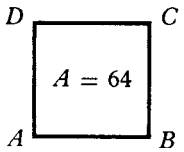


3.



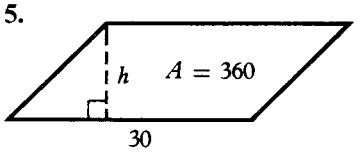
En los ejercicios 4 a 6, se da el área de los paralelogramos. Encuéntrese el dato que falta.

4.



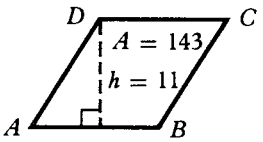
ABCD es un cuadrado
AB = ?

5.



h = ?

6.

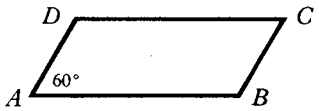


ABCD es un rombo
AD = ?

B.

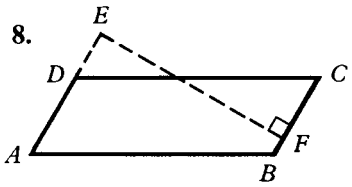
Encuéntrense las áreas de los paralelogramos de los ejercicios 7 a 9.

7.



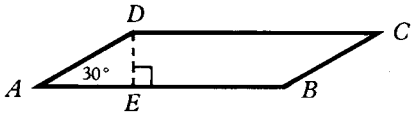
AB = 14, *AD* = 5

8.



AD = 5, *EF* = 11

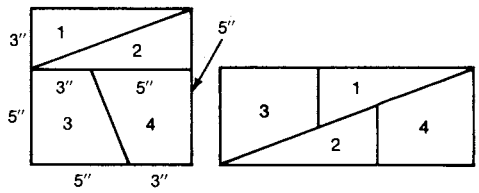
9.



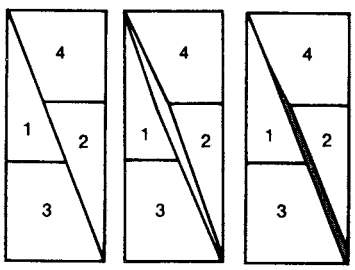
AB = 12, *AE* = 5

ACTIVIDADES

Dibújese este cuadrado de 8 pulgadas. Recórtense las piezas y colóquense de nuevo como se muestra en la figura.



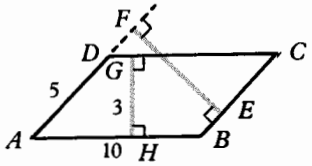
1. ¿Cuál de las tres situaciones que se señalan a la derecha se presenta?
2. Empléense los conceptos relacionados con el área para determinar cuál de los tres casos se presenta realmente.



«ajuste perfecto» «pequeña separación» «pequeño solape

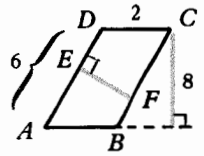
En los ejercicios 10 a 12, encuéntrese el dato desconocido. Cada cuadrilátero es un paralelogramo.

10.



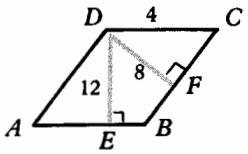
$EF = ?$

11.



$EF = ?$

12.

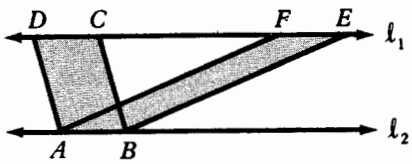


$AD = ?$

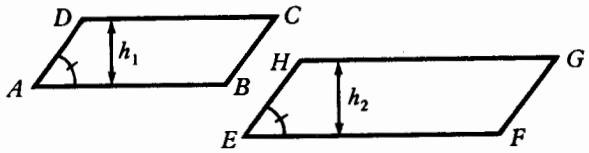
13. ¿Qué le sucede al área si se duplican las longitudes de los lados de un paralelogramo?

14. Un paralelogramo tiene lados con longitudes 12 y 8, y la medida de uno de los ángulos es 120°. ¿Cuál es el área?

C.



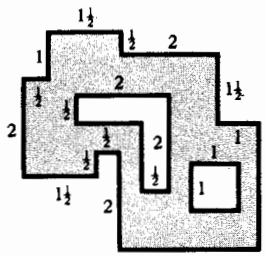
15. Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Compárese el área del paralelogramo $ABEF$ con la del paralelogramo $ABCD$.



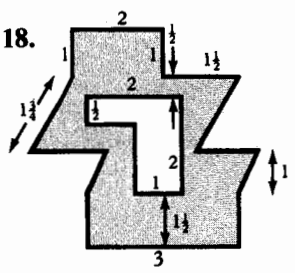
16. Dados los paralelogramos $ABCD$ y $EFGH$, con $m\angle A = m\angle E$ y $h_2 = \sqrt{3}h_1$, si el área de $EFGH$ es doble que la de $ABCD$, ¿qué relación hay entre AB y EF?

Encuéntrese el área de las regiones que aparecen en los ejercicios 17 y 18. Supóngase que los segmentos que parecen perpendiculares o paralelos lo son.

17.

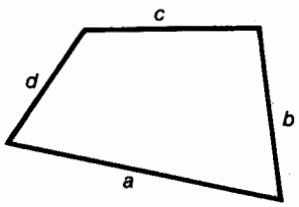


18.



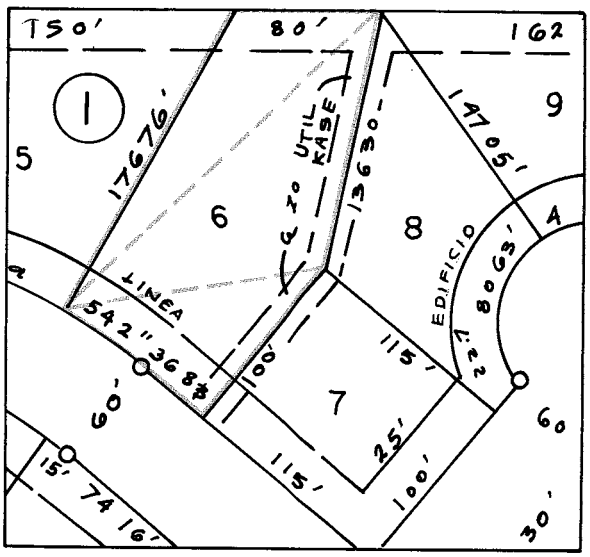
SOLUCION DE PROBLEMAS

Los antiguos babilonios usaron la fórmula $\dfrac{(a + c)(b + d)}{4}$ para determinar el área de un cuadrilátero con lados de longitudes a, b, c y d.



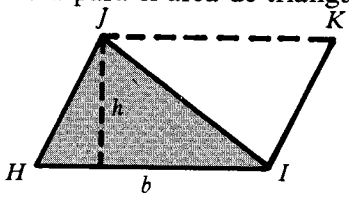
1. ¿Sirve también esta fórmula para rectángulos?
2. ¿Sirve también esta fórmula para paralelogramos?

11.3 Areas de triángulos y trapecios



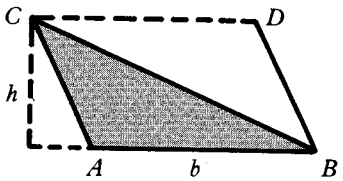
Un ingeniero civil necesita encontrar el área de una parcela para edificación de forma irregular como la que se ilustra en la figura con el número 6. Esto puede hacerse dividiendo la parcela en regiones triangulares y calculando el área de cada región triangular.

Las figuras siguientes ilustran que una región triangular puede considerarse como la mitad de una región en forma de paralelogramo. Por tanto, la fórmula para encontrar el área de un paralelogramo proporciona una fórmula para el área de triángulos.



$A(\Delta HIJ) = \frac{1}{2}A(HIKJ)$

$= \frac{1}{2}bh$

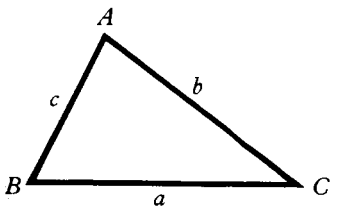


$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2}A(ABDC)$

$= \frac{1}{2}bh$

Teorema 11.2 Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.

En ocasiones, puede suceder que se conozcan los tres lados de un triángulo, pero no la altura. En tales casos es útil la fórmula utilizada por Herón de Alejandría en el siglo primero de nuestra era.

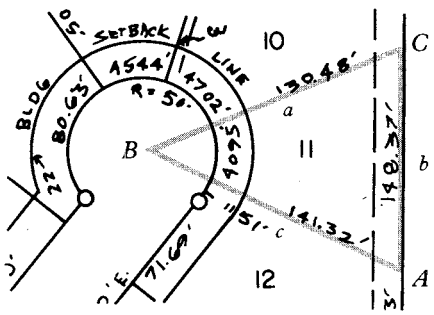


$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Teorema 11.3 **Fórmula de Herón.** Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a, b y c, entonces $A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

APLICACION

Un método para encontrar el área de la parcela 11 requiere encontrar primero el área de $\triangle ABC$. Con la fórmula de Herón y una calculadora, ésta es una tarea fácil. (Obsérvese que el radio del círculo es 50 pies.)



$a = 130.48 + 50 = 180.48 \qquad b = 148.37$

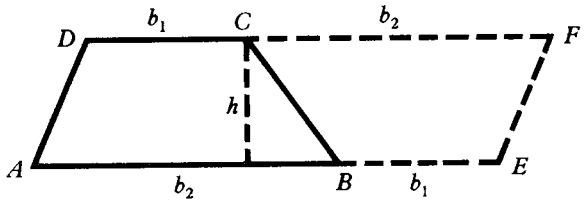
$c = 141.32 + 50 = 191.32$

$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 260.09$

$s - a = 79.61,\ s - b = 111.72,\ s - c = 68.77$

Por la fórmula de Herón, $A(\triangle ABC) \doteq \sqrt{(260.09)(79.61)(111.72)(68.77)} \doteq 12\,613.$

También puede considerarse que un trapecio es la mitad de un paralelogramo. El área de un trapecio es la mitad del área del paralelogramo.



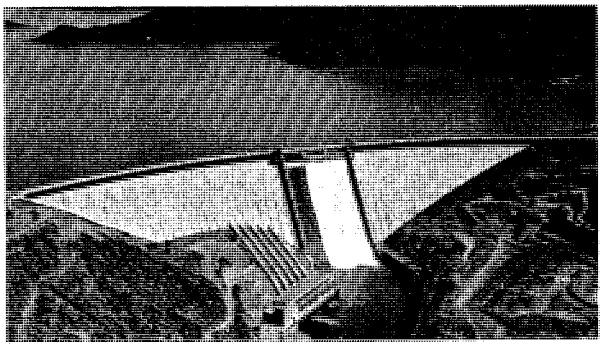
base de $\square AEFD = b_1 + b_2$

$A(\square AEFD) = h(b_1 + b_2)$

Teorema 11.4 Dado un trapecio con bases b_1 y b_2, y altura h, el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

APLICACION

Las presas suelen tener sección transversal trapecial. El diseñador de la presa debe determinar el área de esta sección transversal. Si la presa mide 180 metros de altura y tiene bases de 10 metros y 60 metros de longitud, ¿cuál será el área de la sección transversal? Por el teorema 11.4 puede calcularse el área:



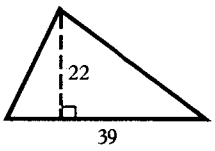
$\text{area} = \frac{1}{2} \cdot 180(10 + 60)\ \text{m}^2 = 6300\ \text{m}^2.$

EJERCICIOS

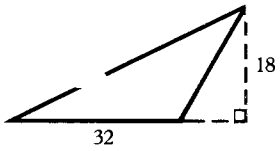
A.

Calcúlense las áreas de las regiones de los ejercicios 1 a 11.

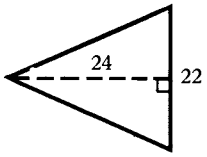
1.



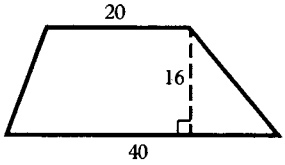
2.



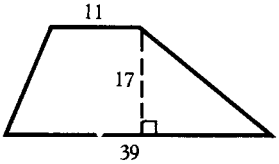
3.



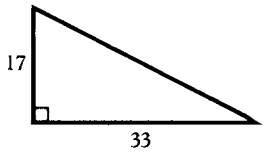
4.



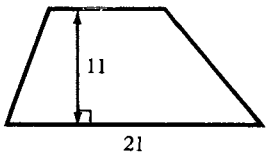
5.



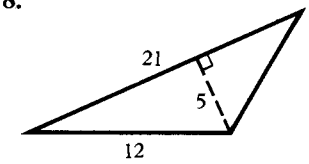
6.



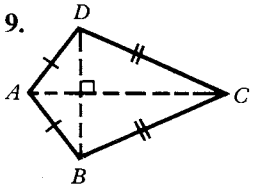
7.



8.

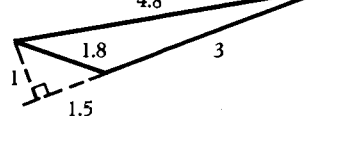


9.

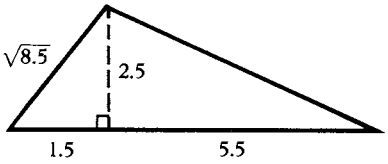


$AC = 41$ $BD = 25$

10.



11.



B.

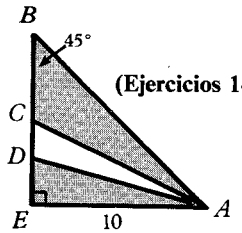
12. El área de $\triangle ABC$ es 48 cm^2, y $AB = 6$ cm. ¿Cuál es la longitud de la altura en $\overline{AB}$?

13. Un trapecio con bases de longitud 14 pies y 21 pies, tiene un área de $87\frac{1}{2}$ pies cuadrados. ¿Cuál es su altura?

14. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

15. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?

16. ¿Cuál es la razón entre el área de la región sombreada y el área de $\triangle ABE$?

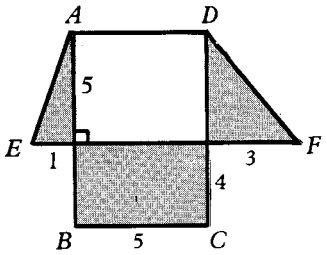


(Ejercicios 14-16)

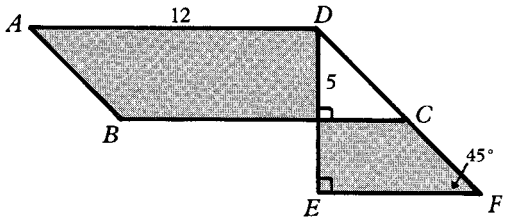
C es el punto medio de $\overline{BE}$.
D es el punto medio de $\overline{CE}$.

En los ejercicios 17 y 18, encuéntrese el área de las regiones sombreadas.

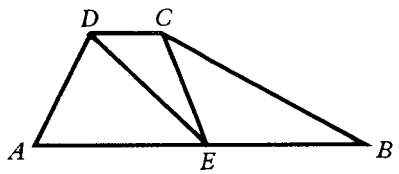
17. *ABCD* es un rectángulo.



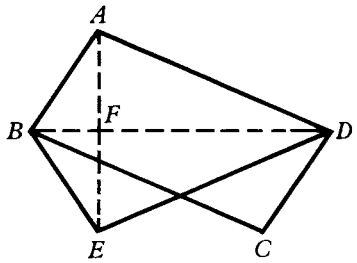
18. *ABCD* es un paralelogramo.



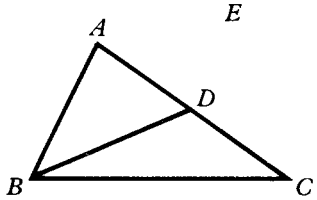
19. *ABCD* es un trapecio y *E* es el punto medio de $\overline{AB}$. Muéstrese que el área de *AECD* es igual al área de *EBCD*.



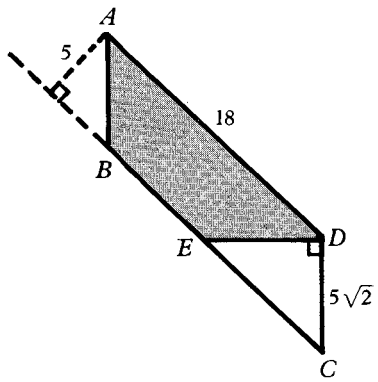
20. *ABCD* es un paralelogramo cuya área es 60 unidades cuadradas. Encuéntrese el área de la cometa *ABED*. (*Sugerencia:* Encuéntrese el área de $\triangle ABD$.)



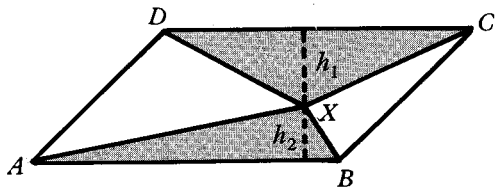
21. Muéstrese que una mediana divide a un triángulo en dos regiones de igual área. Esto es, si $\overline{BD}$ es una mediana de $\triangle ABC$, muéstrese que el área de $\triangle ABD$ es igual al de $\triangle BDC$.



22. *ABCD* es un paralelogramo. Encuéntrese la longitud de *BE*.



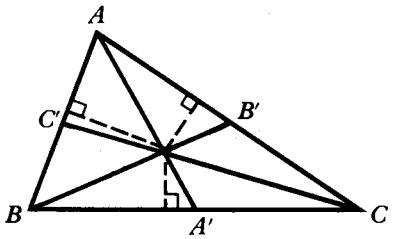
23. *ABCD* es un paralelogramo y *X* es cualquier punto en su interior. Muéstrese que el área de la región sombreada es la mitad del área del paralelogramo. (*Indicación:* $h_1 + h_2$ es la altura de *ABCD*.)



24. Empléese la fórmula de Herón para encontrar el área de un triángulo cuyos lados tienen las siguientes longitudes:

a. 3 cm, 4 cm, 5 cm. **b.** 17 cm, 18 cm, 19 cm. (Empléese una calculadora.)

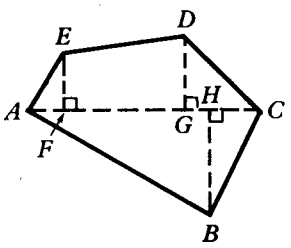
c. 25 cm, 36 cm, 41 cm. (Empléese una calculadora.)



(Ejercicio 25)

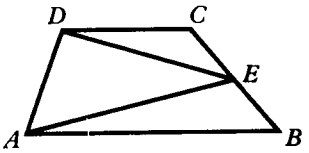
25. Muéstrese que las tres medianas de un triángulo lo dividen en seis regiones de igual área.

26. Una persona compró un terreno con forma de pentágono irregular. Encuéntrese el área de este terreno si $AF = 10$ m, $FG = 40$ m, $GH = 15$ m, $HC = 20$ m, $EF = 20$ m, $DG = 30$ m y $HB = 35$ m.

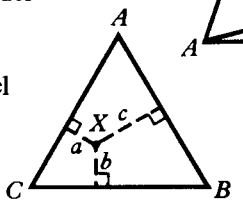


C.

27. $ABCD$ es un trapecio y E es el punto medio de $\overline{BC}$. Muéstrese que el área de $\triangle ADE$ es igual a la mitad del área de $ABCD$.

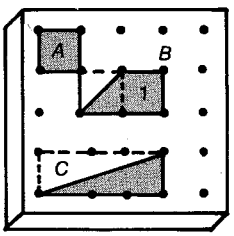


28. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero con altura h. Sea X un punto cualquiera en el interior del triángulo y sean a, b y c las longitudes de las perpendiculares a los lados de $\triangle ABC$. Pruébese que $a + b + c = h$. (*Indicación:* Empléese el área.)



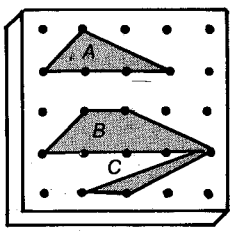
ACTIVIDADES

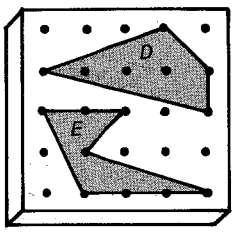
En este tablero, el área del cuadrado A es 1 y el área de cada una de las figuras B y C es $1\frac{1}{2}$.

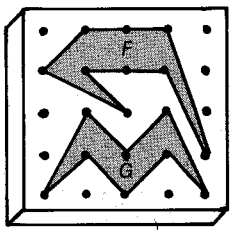


1. Dibújense las figuras siguientes en papel cuadriculado o en un tablero.

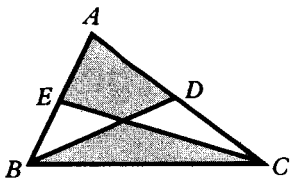
2. Encuéntrese el área de cada región sin usar ninguna de las fórmulas del área.







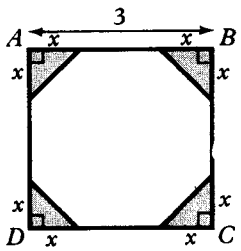
29. Dado $\triangle ABC$ con medianas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$, muéstrese que las áreas de las regiones sombreadas son iguales.



30. Pruébese que el área de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud s es $s^2\sqrt{3}/4$.

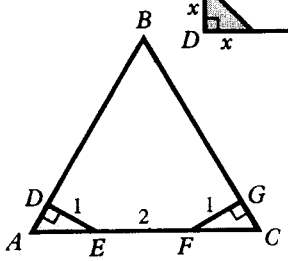
31. Considérese el cuadrado $ABCD$. Si se cortan triángulos en las esquinas, resulta un octágono. Si $AB = 3$, muéstrese que $x = \dfrac{3}{2+\sqrt{2}}$ si el octágono resultante es regular.

32. ¿Cuál es el área de un octágono regular que tiene lados de longitud 2?

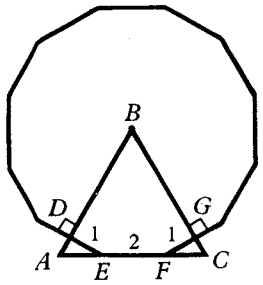


(Ejercicios 31, 32)

33. Considérese el triángulo equilátero $\triangle ABC$. Los puntos D, E, F y G se eligieron como se muestra en la figura, de manera que $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, $\overline{FG} \perp \overline{BC}$, $DE = FG = 1$, y $EF = 2$. Muéstrese que el área de $\triangle CFG$ es $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, o bien $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



34. Muéstrese que el área de un dodecágono regular con lados de longitud 2 es $6(4 + 2\sqrt{3})$. (*Sugerencia:* La figura que se muestra a continuación es un pentágono $BDEFG$ que es $\frac{1}{6}$ del dodecágono regular cuyos lados tienen longitud 2. Encuéntrese la longitud AC y empléese para encontrar el área de $\triangle ABC$. Después, réstense las áreas de los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle CFG$.)



SOLUCION DE PROBLEMAS

La longitud de las aristas del cubo es 1.

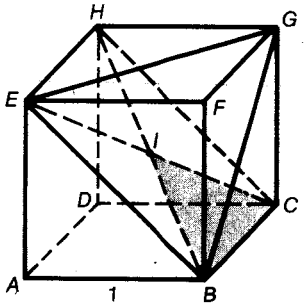
1. Encuéntrese la longitud de $\overline{BE}$.

2. Encuéntrese la longitud de $\overline{BH}$.

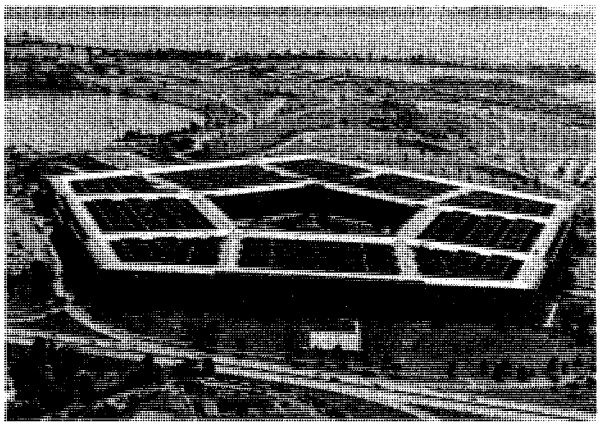
3. Encuéntrese el área de $\triangle BEG$.

4. Encuéntrese el área del rectángulo $BCHE$.

5. Encuéntrese el área de $\triangle BIC$.

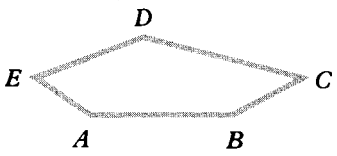


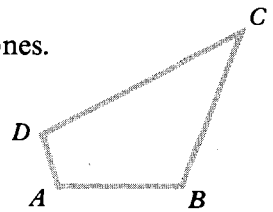
11.4 Area de polígonos regulares



El costo de construcción de un edificio depende de la longitud de las paredes exteriores, es decir, del perímetro de la construcción. Es obvio que un edificio grande requiere más bloques, vigas y materiales para ventanas. En consecuencia, al diseñar un edificio, un arquitecto puede plantearse la cuestión de qué polígono regular proporcionará la mejor área para un perímetro dado.

Para esto son necesarias dos definiciones.

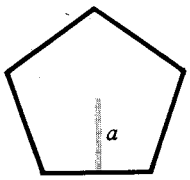


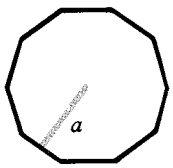


Definición 11.4

El **perímetro (p) de un polígono** es la suma de las longitudes de los lados del polígono.

$p = AB + BC + CD + DE + AE$ $\quad p = AB + BC + CD + AD$

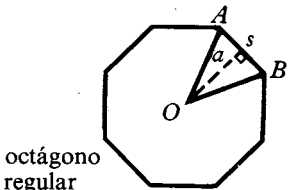




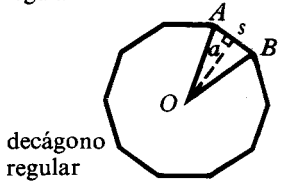
Definición 11.5

La **apotema (a) de un polígono regular** es la distancia de su centro a un lado.

Estas dos definiciones se emplean para desarrollar una fórmula para el área de un polígono regular de n lados. La tabla que se muestra a continuación resulta útil para analizar dos ejemplos.



octágono regular

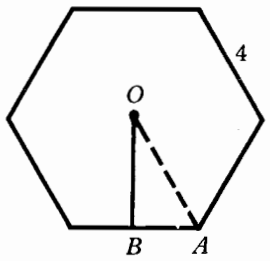


decágono regular

	Area de $\triangle ABO$	Perímetro (p)	Area del polígono
octágono	$\frac{1}{2}as$	$p = 8s$	$8 \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(8s) = \frac{1}{2}ap$
decágono	$\frac{1}{2}as$	$p = 10s$	$10 \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(10s) = \frac{1}{2}ap$

Teorema 11.5 Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a, el área A está dada por la fórmula $A = (\frac{1}{2})ans = (\frac{1}{2})ap$, donde el perímetro $p = ns$.

Ejemplo



La longitud de cada lado de un hexágono regular es 4. Encuéntrense la apotema y el área del hexágono regular.

$\triangle OAB$ es un triángulo 30°-60°-90°. Por tanto,

$AB = 2$, $OA = 4$ y

$a = OB = 2\sqrt{3}$.

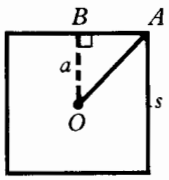
Aplicando el teorema 11.5, área $= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}) \cdot 6 \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

$a \quad n \quad s$

APLICACION

Si un edificio cuadrado y un edificio con forma de hexágono regular tienen el mismo perímetro (p), ¿cuál es la relación entre sus áreas?

1. $\triangle OAB$ es un triángulo 45°-45°-90°.

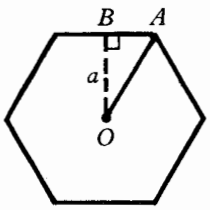


Por tanto, la apotema $a = AB =$

$$= \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{8}.$$

$$\text{Area del cuadrado} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{8} \cdot p.$$

2. $\triangle OAB$ es un triángulo 30°-60°-90°.



La apotema $a = \sqrt{3}AB = \sqrt{3}(\frac{1}{2}s) =$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}p}{12}.$$

$$\text{Area del hexágono} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}p \cdot p.$$

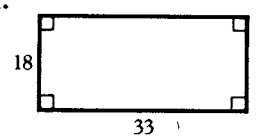
Dado que $\dfrac{\sqrt{3}}{2 \times 12} > \dfrac{1}{2 \times 8}$, el área del hexágono es mayor que el área del cuadrado. Por tanto, un edificio hexagonal proporciona mayor área que un edificio cuadrado con el mismo perímetro.

EJERCICIOS

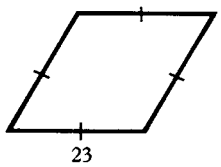
A.

En los ejercicios 1 a 6, encuéntrese el perímetro de la figura dada.

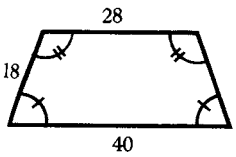
1.



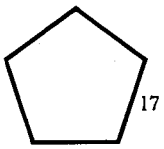
2.



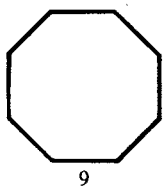
3.



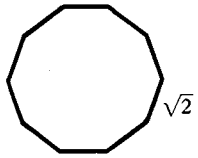
4.



5.

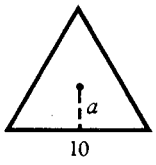


6.

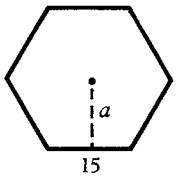


En los ejercicios 7 a 9, encuéntrense la apotema y el área de cada polígono regular dado.

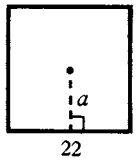
7.



8.

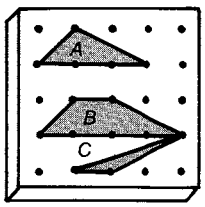


9.



ACTIVIDADES

En las actividades de la sección anterior se encontraron las áreas de algunas regiones en un tablero sin usar ninguna fórmula del área. Complétese la tabla siguiente. Búsquese una fórmula para las áreas de estos polígonos en función del número de clavos que delimitan a cada figura (d) y del número de puntos interiores (i).



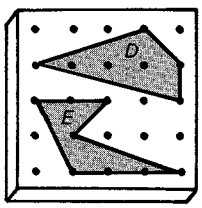
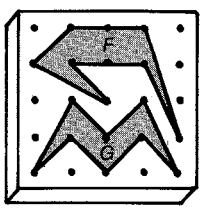


Figura	Número de clavos en el límite (d)	Número de puntos interiores (i)	$\frac{d}{2} + i$	Area del polígono
A	?	?	?	?
B	7	0	$\frac{7}{2} + 0$	$\frac{5}{2}$
C	?	?	?	?
⋮				



B.

10. Encuéntrese el área de un hexágono regular con apotema $3\sqrt{3}$.

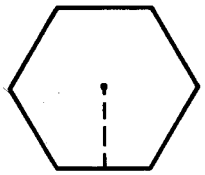
11. Encuéntrese el área de un octágono regular con lados de longitud 5 y apotema k.

12. Si el área de un hexágono regular es $36\sqrt{3}$ cm^2, ¿cuáles son la apotema y la longitud de cada lado?

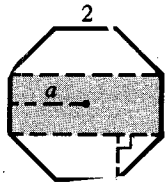
13. Si la apotema de un hexágono regular es 5 m, ¿cuáles son el perímetro y el área?

C.

14. Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro, demuéstrese que la razón entre sus áreas es 2 a 3.



15. El área de un hexágono regular es $50\sqrt{3}$ pies cuadrados. ¿Cuáles son el perímetro y la apotema?



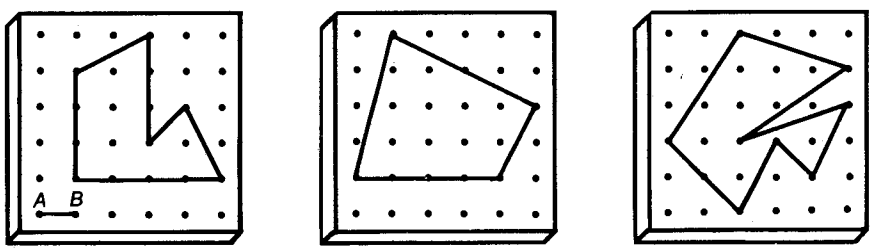
16. La longitud de los lados de un octágono regular es 2. ¿Cuál es su apotema?

17. Un granjero quiere construir un corral con 100 metros de valla y ha de decidir la forma del corral. Rellénese la siguiente tabla y véase si se le puede hacer alguna recomendación al granjero.

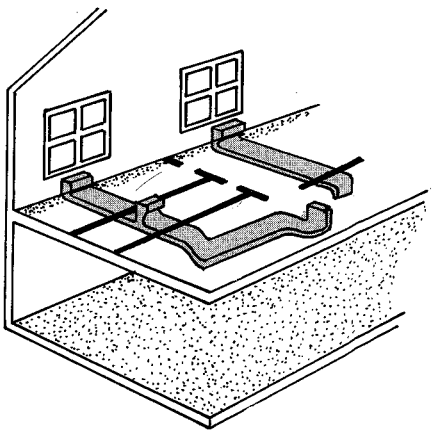
Longitud	Ancho	Perímetro	Area
48 m	?	100 m	?
45 m	?	100 m	?
40 m	?	100 m	?
35 m	?	100 m	?
30 m	?	100 m	?
25 m	?	100 m	?

SOLUCION DE PROBLEMAS

Encuéntrese el perímetro de cada uno de los polígonos de este tablero. Obsérvese que $AB = 1$.



11.5 Comparación entre perímetros y áreas de polígonos semejantes



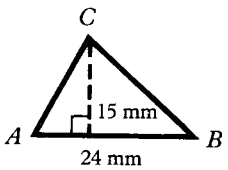
Para diseñar el sistema de aire acondicionado de un edificio, un ingeniero debe poder responder a preguntas como las siguientes:

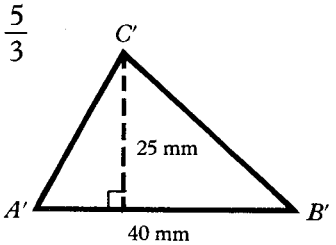
1. ¿Qué diferencia hay entre el paso de aire de un conducto de 7 pulgadas × 14 pulgadas y uno de 5 pulgadas × 10 pulgadas?
2. ¿Qué será más económico, dos conductos de 5 pulgadas × 10 pulgadas o uno de 7 pulgadas × 14 pulgadas?

Para responder a estas preguntas, es necesario hacer una comparación entre las áreas de las secciones transversales de un rectángulo de 5 × 10 y de otro de 7 × 14, es decir, de un par de polígonos semejantes.

Estúdiense los dos ejemplos siguientes, en los que se comparan las áreas de un par de triángulos semejantes y de un par de hexágonos semejantes.

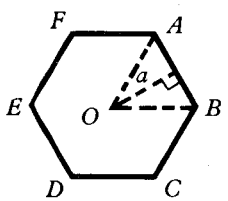
Ejemplo 1 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ con $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{5}{3}$

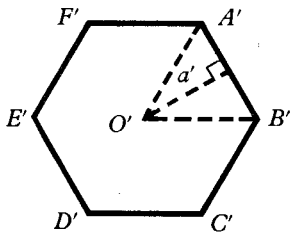




$$\frac{\text{perímetro } \triangle A'B'C'}{\text{perímetro } \triangle ABC} = \frac{5}{3} \qquad \frac{\text{área } \triangle A'B'C'}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{\frac{1}{2}(40)(25)}{\frac{1}{2}(24)(15)} = \frac{500}{180} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Ejemplo 2 $A'B'C'D'E'F' \sim ABCDEF$ con $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{2}{1}$





$$\frac{\text{perímetro } (A'B'C'D'E'F')}{\text{perímetro } (ABCDEF)} = \frac{2}{1} \qquad \frac{\text{área } (A'B'C'D'E'F')}{\text{área } (ABCDEF)} = \frac{6 \cdot A(\triangle A'O'B')}{6 \cdot A(\triangle AOB)} = \frac{\frac{1}{2}a'A'B'}{\frac{1}{2}aAB} = \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

Los ejemplos anteriores se resumen en esta tabla.

	Razón de los lados correspondientes	Razón de los perímetros	Razón de las áreas
Ejemplo 1	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2$
Ejemplo 2	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\left(\frac{2}{1}\right)^2$

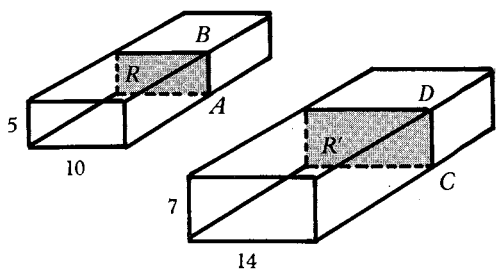
Estos ejemplos sugieren los teoremas siguientes.

Teorema 11.6 La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

Teorema 11.7 La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

APLICACION

Ahora se responderá a las dos preguntas planteadas al principio de esta sección por medio de una comparación entre las áreas y los perímetros de las secciones transversales rectangulares de los dos conductos.



$$\frac{CD}{AB} = \frac{7}{5} \quad \frac{\text{área}\,(R')}{\text{área}\,(R)} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \doteq \frac{2}{1} \quad \frac{\text{perímetro}\,(R')}{\text{perímetro}\,(R)} = \frac{7}{5}$$

Conclusión: El área de la sección transversal (y por tanto la cantidad de aire movido) del conducto mayor es casi el doble que la del otro, aunque el perímetro de su sección transversal es sólo $\frac{7}{5}$ mayor que la del conducto menor. En consecuencia, se requerirá menos material para construir un conducto grande que para construir dos conductos pequeños.

EJERCICIOS

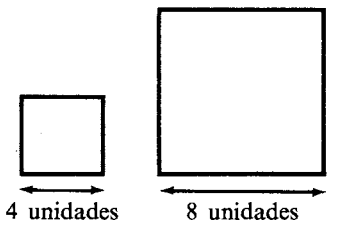
A.

Supóngase que las longitudes de los lados de dos cuadrados son 4 y 8, respectivamente.

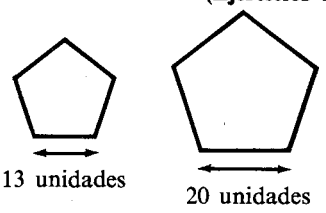
1. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
2. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

La razón entre las longitudes de los lados de dos pentágonos regulares es 13:20.

3. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
4. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?



(Ejercicios 1, 2)



(Ejercicios 3, 4)

B.

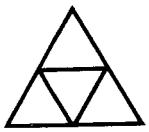
5. La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?
6. Si la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes de n lados es $\frac{36}{25}$, ¿cuál es la razón entre sus perímetros?
7. La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es $\frac{25}{9}$, y la suma de las dos áreas es 272. Encuéntrense las áreas de los dos polígonos.

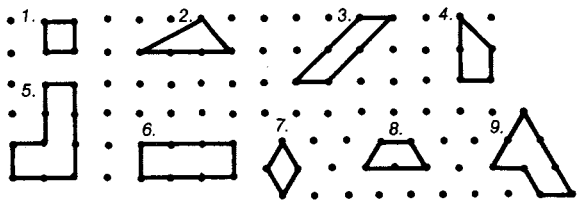
ACTIVIDADES

Hay figuras, como los triángulos equiláteros, con las que se pueden formar otras de la misma forma, pero más grandes. ¿Cuáles de las siguientes figuras podrían entrar en esta clasificación?

Contéstese a la pregunta dibujando en papel punteado o recortando cuatro copias de cada una de estas piezas e intentando acoplarlas para formar una figura mayor de la misma forma

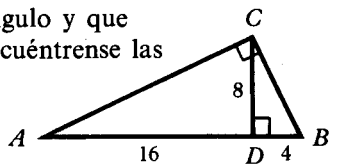
Un «reptil»





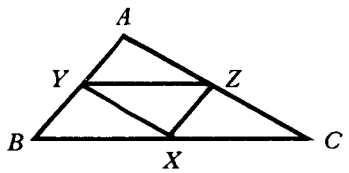
8. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Si $CD = 8$, $AD = 16$ y $BD = 4$, encuéntrense las razones entre estas áreas.

a. $\dfrac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle CBD)}$. **b.** $\dfrac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle ABC)}$.

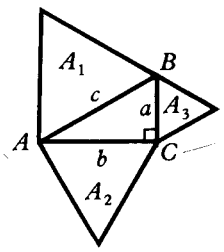


C.

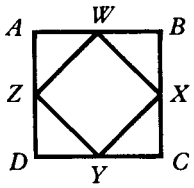
9. Supóngase que los puntos X, Y y Z son puntos medios de los lados de $\triangle ABC$. Encuéntrese la razón $A(\triangle XYZ):A(\triangle ABC)$.



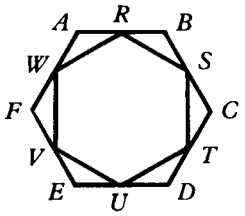
10. Supóngase que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b. Constrúyanse triángulos equiláteros a los lados de $\triangle ABC$ como se muestra en la figura. Si las áreas de estos triángulos son A_1, A_2 y A_3, como se muestra, demuéstrese que $\dfrac{A_2}{A_1} + \dfrac{A_3}{A_1} = 1$.



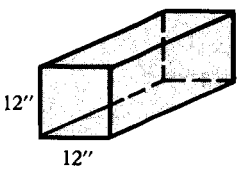
11. Los puntos W, X, Y y Z son puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. Encuéntrese $\dfrac{A(ABCD)}{A(WXYZ)}$.



12. Los puntos R, S, T, U, V y W son puntos medios de los lados del hexágono regular $ABCDEF$. Encuéntrese $\dfrac{A(ABCDEF)}{A(RSTUVW)}$.



13. Se construyó un conducto para aire acondicionado con una sección transversal cuadrada de 12 pulgadas de lado. ¿Qué longitud debe tener un lado del conducto para que su sección transversal admita doble cantidad de aire?

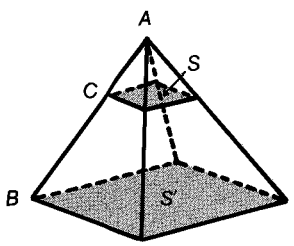


14. Si la cantidad de aire admitida por un conducto cuadrado de 10 pulgadas se va a incrementar en un 30 %, ¿de qué tamaño debe construirse el nuevo conducto cuadrado? (Redondéese el resultado a la $\frac{1}{2}$ pulgada más próxima.)

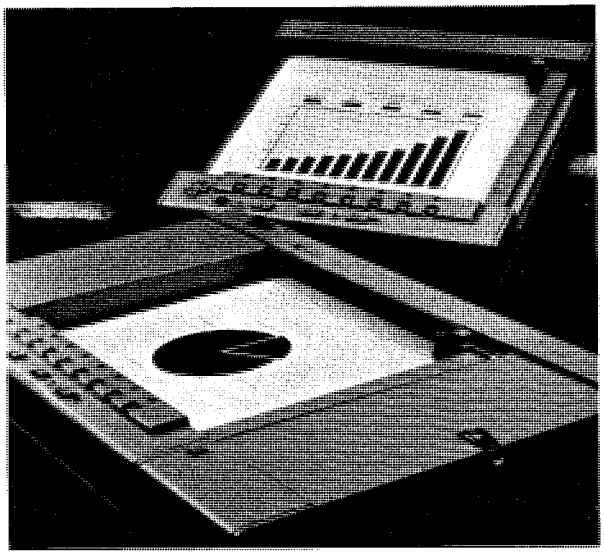
SOLUCION DE PROBLEMAS

Una pirámide cuadrada se corta por un plano que pasa por el punto C y la arista $\overline{AB}$. Si el plano es paralelo a la base cuadrada, resulta una sección transversal cuadrada.

Si $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{3}$, encuéntrese $\dfrac{A(S)}{A(S')}$.

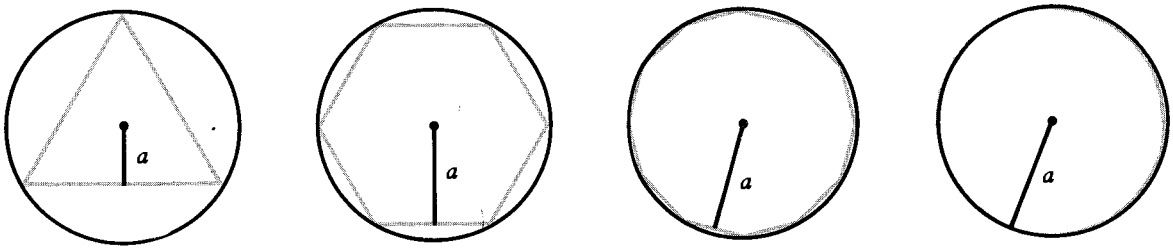


11.6 La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo



En las gráficas por computador, la impresora dibuja algo que parecen ser líneas curvas. En realidad, la pluma del graficador dibuja segmentos sucesivos de recta tan cortos que el efecto final es una línea curva. Este mismo concepto se emplea para encontrar la circunferencia de un círculo.

Estas figuras muestran una secuencia de polígonos regulares que poco a poco se aproximan a un círculo.



Al incrementarse el número de lados de un polígono regular, poco a poco su forma se aproxima a la de un círculo circunscrito. Además, su perímetro se aproxima a un número fijo que recibe el nombre de *circunferencia* del círculo, y la apotema se acerca al radio del círculo circunscrito.

El siguiente teorema es básico para la teoría de los círculos.

Definición 11.6

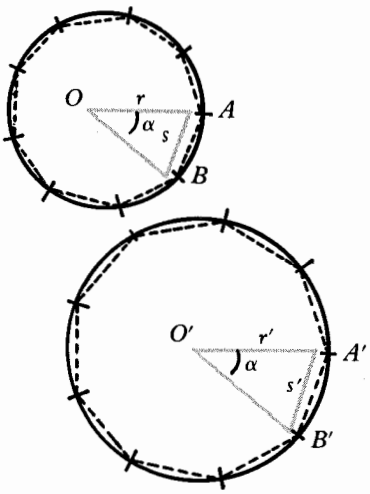
La **circunferencia de un círculo** es el número al que se aproximan los perímetros de los polígonos regulares inscritos conforme se incrementa el número de lados de los polígonos regulares.

Teorema 11.8 La razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos.

EXPLICACION DE LA PRUEBA

1. Selecciónense dos círculos cualesquiera e inscríbase en ellos un polígono regular de n lados.
2. Un par de triángulos isósceles semejantes $\triangle AOB$ y $\triangle A'O'B'$ están determinados por un lado de cada polígono.
3. Por tanto, las razones $\frac{s}{r}$ y $\frac{s'}{r'}$ son iguales y $\frac{ns}{r} = \frac{n's'}{r'}$.
4. Los números ns y $n's'$ igualan los perímetros p y p' de los dos polígonos regulares. Por tanto,
$$\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'}.$$
5. Al incrementarse el número de lados n, los perímetros p y p' se aproximan a las circunferencias C y C'. Por tanto,
$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'} \text{ y } \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}.$$

La razón $\frac{C}{d}$ es un número irracional, lo que significa que no puede escribirse exactamente como un decimal. Algunas aproximaciones de este número son 3.14, $3\frac{1}{7}$ y 3.14159.



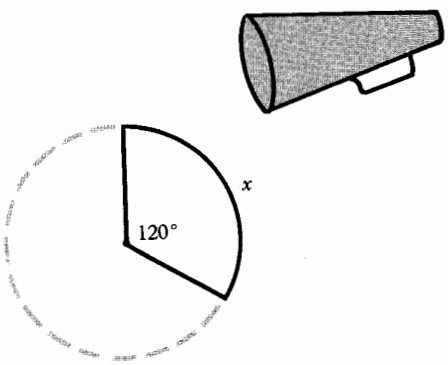
Definición 11.7

La **razón** $\frac{C}{d}$, que es el mismo número real para cualquier círculo, se representa por π (la letra griega pi).

Teorema 11.9 Dado un círculo de radio r y diámetro d, la circunferencia C está dada por la fórmula $C = \pi d = 2\pi r$.

APLICACION

El animador de un espectáculo quiere diseñar un modelo para un megáfono. Este diseño es una porción de un círculo limitado por un ángulo central y su arco interceptado. Si los lados del modelo tienen 15 pulgadas y el ángulo central mide 120°, encuéntrese la longitud del arco interceptado.



Solución. Puede establecerse una proporción entre la longitud del arco, la circunferencia del círculo, la medida del ángulo central y la medida en grados del círculo.

$$\frac{120}{360} = \frac{x}{\text{circunferencia}} = \frac{x}{2\pi 15}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{30\pi \text{ pulgadas}} \quad \text{o} \quad x = 10\pi \doteq 31.4 \text{ pulgadas}$$

EJERCICIOS

A.

1. Si un polígono regular de 100 lados está inscrito en un círculo, el perímetro del polígono es casi igual a la ? del círculo.
2. Si un polígono regular de 100 lados está inscrito en un círculo, la apotema del polígono es casi igual al ? del círculo.
3. Dense varias aproximaciones para el valor π.

En los ejercicios 4 a 8, encuéntrense los números que faltan.

	radio	*diámetro*	*circunferencia*
4.	2	?	4π
5.	?	6	?
6.	$7/\pi$	?	?
7.	?	?	8π
8.	?	?	16

B.

9. En un círculo, ¿a qué es igual la razón $\frac{C}{\pi}$?

ACTIVIDADES

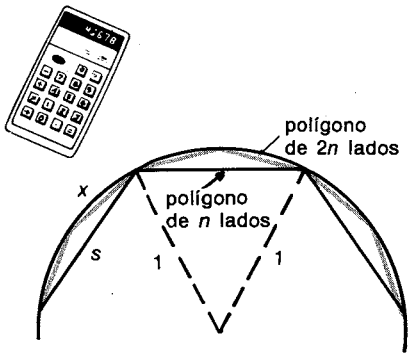
Cálculo de un valor aproximado para π. (Empléese una calculadora.) Se puede probar la siguiente fórmula.

$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$

s = longitud de un lado de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1.

x = longitud de un lado del correspondiente polígono de $2n$ lados.

Complétese la siguiente tabla y aproxímese el valor de π.

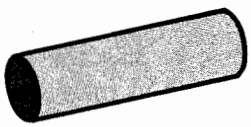


Continúese la tabla para $n = 48, 96, 192, 384$ y 768.

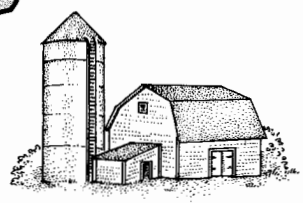
Número de lados (n)	Longitud del lado (s)	Perímetro ($n \cdot s$)	Perímetro ÷ diámetro	Longitud de los lados del polígono de $2n$ lados (x)
6	1	6	3	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - (1)^2}} = 0.517638$
12	0.517638	6.211656	3.105828	$\sqrt{2 - \sqrt{4 - (0.517638)^2}} = 0.261052$
24	0.261052	?	?	

10. Encuéntrese la longitud de un arco interceptado por un ángulo central de 60° en un círculo con radio 10. (Preséntese la respuesta en función de π.)

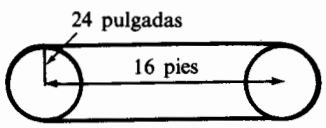
11. Un rectángulo de cartulina se enrolla para formar un tubo de 12 pulgadas de largo y 3 pulgadas de diámetro. ¿Cuál es el área del rectángulo de cartulina?



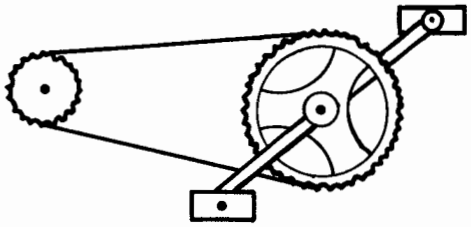
12. Si un galón de pintura cubre 400 pies cuadrados, ¿cuántos galones se necesitan para pintar un granero (sin contar el tejado) que mide 10 pies de diámetro y 50 pies de altura?



13. En una máquina grande, los centros de dos poleas están separados 16 pies, y el radio de cada polea es 24 pulgadas. ¿Qué longitud debe tener la correa para que abarque a las dos poleas?



14. En los pedales de una bicicleta, el piñón más grande tiene 50 dientes, y el pequeño, 20. Cuando los pedales completan dos vueltas ¿cuántas vueltas da la rueda?

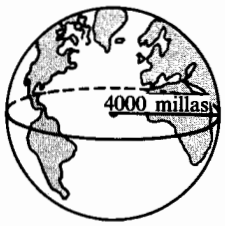


C.

15. Una torre redonda, con una circunferencia de 10 metros, está rodeada por una valla situada a dos metros de la torre. ¿Cuál es la longitud de la valla?

16. ¿Qué distancia recorre una bicicleta por cada 25 vueltas de una rueda si el diámetro exterior de cada rueda es de 29 pulgadas?

17. Supóngase que el ecuador terrestre es un círculo perfecto con radio de 4000 millas, y que se ciñe una cuerda a su alrededor. Supóngase que luego se añadió un trozo de cuerda de 40 pies y se estiró para formar una valla, ¿qué distancia hay entre la valla y la Tierra?

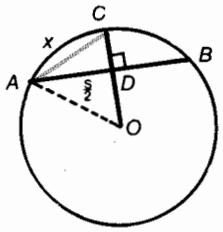


SOLUCION DE PROBLEMAS

Empléese dos veces el teorema de Pitágoras para probar la fórmula utilizada en la actividad anterior.

Dado: $OC = 1$.
$AB = s$, $AC = x$.
$AD = \frac{s}{2}$.

Encuéntrense: OD, CD y x.

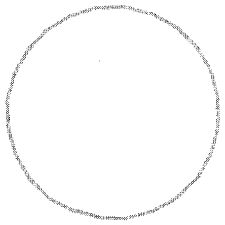


11.7 Area de círculos

Un inspector de construcciones debe asegurarse de que la tubería principal de abastecimiento de agua sea suficientemente grande para satisfacer la demanda de agua requerida en cada parte ¿Cuántas veces es mayor la cantidad de agua que puede conducir una tubería principal de 6 pulgadas que una de 4 pulgadas?

Para mostrar que el volumen mayor es $2\frac{1}{4}$ veces el volumen menor, debe compararse el área de la sección transversal circular de la tubería grande con el área de la sección transversal circular de la tubería pequeña.

La figura siguiente ayuda a explicar la definición de área de un círculo.

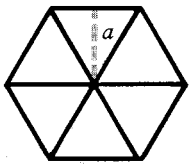


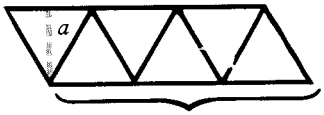
El área de un polígono inscrito de n lados es una buena aproximación al área del círculo circunscrito cuando n tiene un valor grande.

Definición 11.8

El **área de un círculo** es el número al que se aproximan las áreas de los polígonos regulares inscritos de n lados a medida que n aumenta.

Un polígono regular inscrito puede cortarse en triángulos que pueden luego disponerse para formar un paralelogramo.

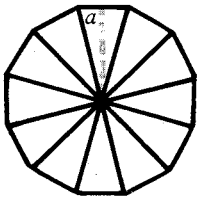


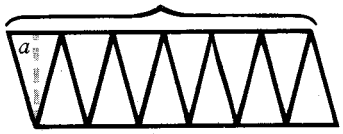


alrededor de $\frac{1}{2}C$

Una aproximación cercana al área del paralelogramo es $\frac{1}{2}Ca$, $\frac{1}{2}(2\pi r)a$, o bien πra.

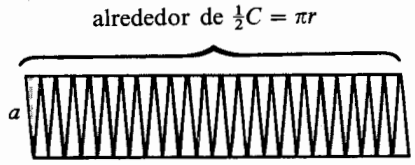
alrededor de $\frac{1}{2}C$





Esta aproximación mejora cuando aumenta el número de lados del polígono regular.

A medida que aumenta el número de lados, el número de triángulos que componen el paralelogramo también aumenta.



La apotema a se aproxima al radio r y el área πra se aproxima a πr^2.

Teorema 11.10 Dado un círculo de radio r, el área A está dada por la fórmula $A = \pi r^2$.

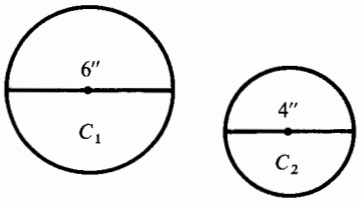
APLICACION

La cantidad de agua que puede conducir una tubería de 6 pulgadas puede compararse con el agua que conduce una tubería de 4 pulgadas. Esto puede hacerse formando la razón de las áreas.

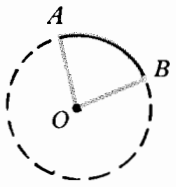
$A(C_1) = \pi(3)^2 = 9\pi$

$A(C_2) = \pi(2)^2 = 4\pi$

$$\frac{A(C_1)}{A(C_2)} = \frac{9\pi}{4\pi} = 2.25 \text{ ó } 2\tfrac{1}{4} \text{ veces más}$$



Puede usarse la fórmula para el área de un círculo para encontrar el área de una región que recibe el nombre de sector.



AOB es un sector de $\odot O$.

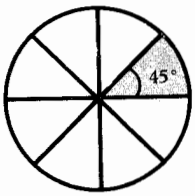
Definición 11.9

Un **sector** es una región acotada por un ángulo central y su arco interceptado.

La razón $\dfrac{\text{área de un sector}}{\text{área del círculo}}$ es igual a la razón: $\dfrac{\text{medida en grados del ángulo central}}{360°}$.

APLICACION

Si una *pizza* de 16 pulgadas se corta en ocho pedazos congruentes, ¿cuál será el área de cada pedazo?



$$\frac{\text{área de un pedazo}}{64\pi \text{ pulgadas cuadradas}} = \frac{45°}{360°}$$

Area (un pedazo) $= \frac{1}{8} \times 64\pi$ pulgadas^2 $= 8\pi$ pulgadas^2.

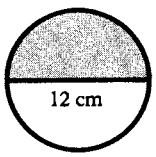
EJERCICIOS

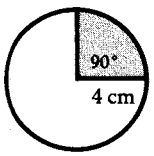
A.

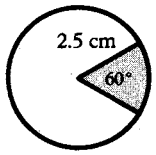
En los ejercicios 1 a 4, exprésense las respuestas con un número exacto (empléese el número π).

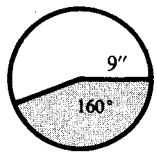
1. Encuéntrese el área de un círculo con radios:
   a. 2. **b.** $5\frac{1}{2}$. **c.** π. **d.** $\sqrt{3}$.
2. Encuéntrese el área de un círculo con diámetros:
   a. 6. **b.** $7\frac{1}{2}$. **c.** 3π. **d.** $4\sqrt{2}$.
3. Encuéntrese el área de un círculo con circunferencias:
   a. 2π. **b.** 6π. **c.** $\sqrt{6}\pi$. **d.** 10.
4. Encuéntrese el radio de un círculo con áreas:
   a. 144π. **b.** 225π. **c.** 12π. **d.** 100.

En los ejercicios 5 a 8, encuéntrese el área de los sectores sombreados. Respóndase en función de π.

5. 

6. 

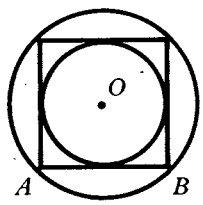
7. 

8. 

9. Encuéntrese el área aproximada de los sectores siguientes. Empléese 3.14 para π.
   a. Angulo central, 50°. Radio, 3 cm.
   b. Angulo central, 75°. Radio, 3 m.
   c. Angulo central, 15°. Radio, 10 pulgadas.
10. Si el área de un sector es un décimo del área del círculo, ¿cuál es el ángulo central del sector?

B.

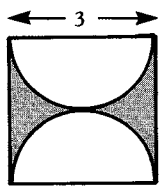
11. Dos círculos tienen radios de 4 cm y 5 cm, respectivamente. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?
12. La razón entre las áreas de dos círculos es 9 a 4. ¿Cuál es la razón entre sus radios?
13. La razón entre las áreas de dos círculos es 8 a 5. ¿Cuál es la razón entre sus radios?
14. Encuéntrese el área de los círculos inscritos y circunscritos de un cuadrado cuyo lado mide 4 cm.



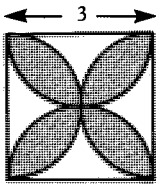
$AB = 4$ cm

En los ejercicios 15 a 17, encuéntrese el área de la región sombreada. La longitud de un lado del cuadrado es 3.

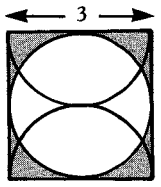
15.



16.

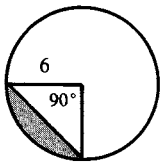


17.

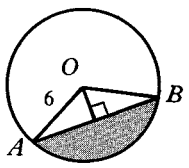


En las figuras de los ejercicios 18 a 20, las áreas sombreadas reciben el nombre de **segmento circular.** Encuéntrese el área de cada uno de ellos.

18.

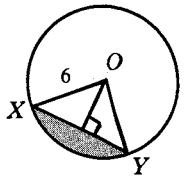


19.



$m\angle AOB = 120$

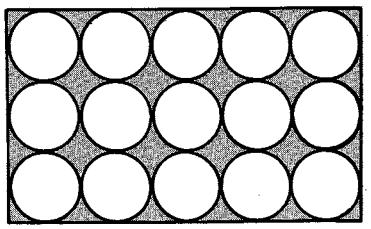
20.



$m\angle XOY = 60$

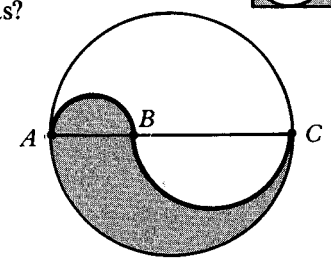
C.

21. Unos círculos, con radios iguales, están colocados en un rectángulo como ilustra la figura. ¿Qué fracción de la región rectangular está sombreada?

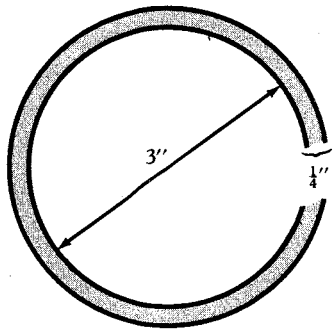


22. ¿Cuántas veces es mayor la cantidad de agua conducida por una tubería de 12 pulgadas de diámetro que la conducida por una tubería de 10 pulgadas?

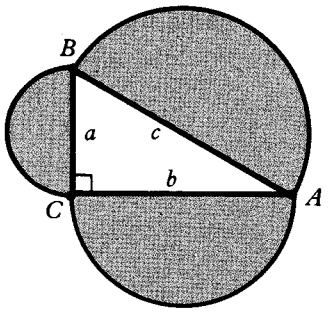
23. Si $BC = 2AB$, ¿qué fracción del círculo está sombreada?



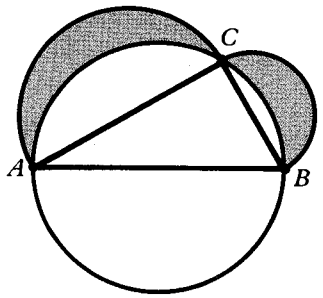
24. La figura siguiente representa la sección transversal de una tubería de $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor que tiene un diámetro interior de 3 pulgadas. Encuéntrese el área de la región sombreada.



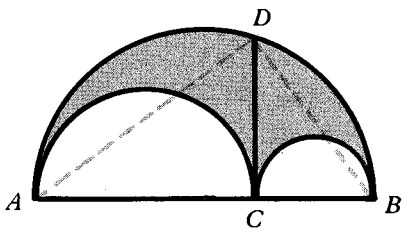
25. Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, muéstrese que el área de un semicírculo sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos sobre los dos catetos del triángulo.



26. Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, su círculo circunscrito y los semicírculos sobre los catetos, muéstrese que la suma de las áreas de las dos regiones sombreadas es igual al área de $\triangle ABC$.



27. Dado un punto C entre A y B, los semicírculos sobre $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ como ilustra la figura, si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, muéstrese que el área de la región sombreada es igual al área del círculo con $\overline{CD}$ como diámetro. (*Sugerencia:* Considérese el triángulo rectángulo $\triangle ADB$.)

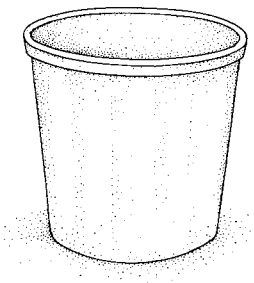


ACTIVIDADES

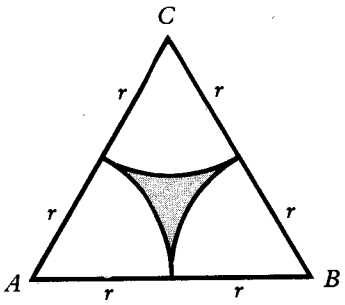
Estímese el valor de π midiendo directamente.

1. Elíjase un objeto circular que tenga el tamaño aproximado de la parte superior de un cubo de basura.
2. Mídase su diámetro (d) redondeando al milímetro más próximo.
3. Colóquese una cuerda alrededor del objeto y mídase su longitud para encontrar su circunferencia (C) redondeando al milímetro más próximo.
4. Calcúlese $\frac{C}{d}$. ¿Qué precisión tiene la estimación de π?
5. ¿Qué puede hacerse para mejorar la aproximación?

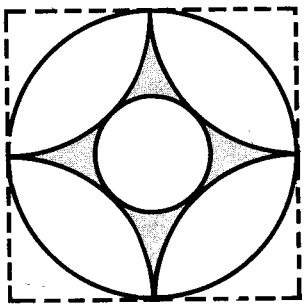
Repítase este procedimiento con una lata de aluminio y con una rueda de bicicleta.



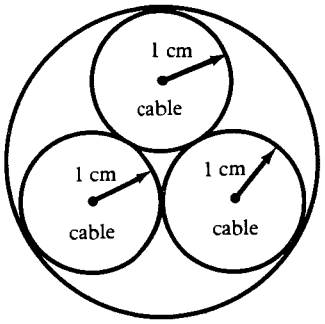
28. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, ¿qué fracción del triángulo está sombreada?



29. En la figura siguiente, el círculo pequeño es tangente a cuatro arcos circulares. ¿Qué fracción del círculo grande está sombreada?



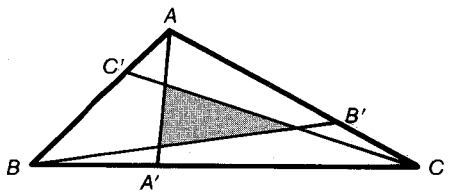
30. Los conductos de cables telefónicos están construidos para contener tres cables (todos circulares y tangentes al conducto y entre sí) de 1 cm de radio. ¿Qué fracción del conducto está ocupada por los cables?



conducto

SOLUCION DE PROBLEMAS

Los puntos A', B' y C' son puntos de trisección de los lados de $\triangle ABC$. El área de la región triangular sombreada es $\frac{?}{}$ del área de $\triangle ABC$.
Empléese una cuadrícula pequeña o alguna técnica de medición para determinar si la región blanca debe llenarse con la fracción $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ ó $\frac{1}{8}$.



Capítulo 11 Conceptos importantes

Términos

Región poligonal (pág. 610)
Unidad cuadrada (pág. 614)
Altura de un paralelogramo (pág. 615)
Perímetro de un polígono (pág. 624)
Apotema de un polígono regular (pág. 624)
Circunferencia de un círculo (pág. 632)
Pi (π) (pág. 633)
Area de un círculo (pág. 636)
Sector (pág. 637)
Segmento circular (pág. 639)

Postulados

Postulado del área. A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado área. El área de una región R se representa por $A(R)$.

Postulado del área de regiones congruentes. Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces las regiones que acotan tienen la misma área.

Postulado de la suma de áreas. Si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, entonces su área es la suma de las áreas de estas n regiones.

Postulado del área del rectángulo. El área de un rectángulo de longitud ℓ y ancho w está dada por la fórmula ℓw.

Teoremas

11.1 Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = bh$.

11.2 Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.

11.3 Si $\triangle ABC$ tiene lados de longitudes a, b y c, entonces $A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

11.4 Dado un trapecio con bases b_1 y b_2, y altura h, el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

11.5 Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a, el área A está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}ans = \frac{1}{2}ap$, donde el perímetro $p = ns$.

11.6 La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

11.7 La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón entre las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

11.8 La razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos.

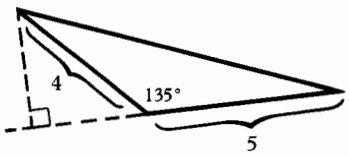
11.9 Dado un círculo de radio r y diámetro d, la circunferencia C está dada por la fórmula $C = \pi d = 2\pi r$.

11.10 Dado un círculo de radio r, el área A está dada por la fórmula $A = \pi r^2$.

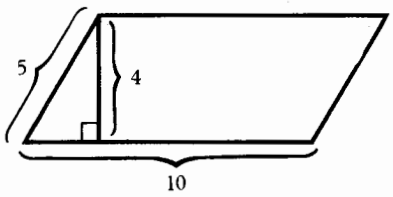
Capítulo 11 Resumen

1. Encuéntrese el área de las siguientes figuras. Supóngase que los segmentos que parecen paralelos o congruentes lo son.

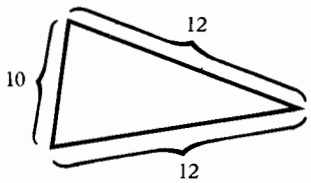
a.



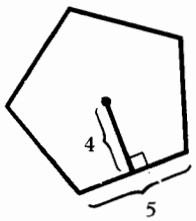
b.



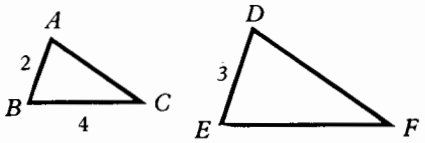
c.



d.



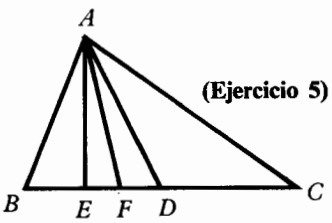
2. **Dado:** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, área $(\triangle ABC) = 3$
   a. Encuéntrese la longitud de la altura de $\overline{AB}$.
   b. Encuéntrese el área de $\triangle DEF$.



3. La circunferencia del círculo O' es doble que la del círculo O. ¿Cuál es la razón entre las longitudes de sus diámetros?

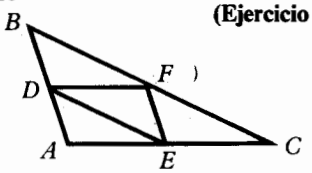
4. Encuéntrese el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de 6 cm de diámetro.

5. En $\triangle ABC$, $\overline{AE}$ es una altura, $\overline{AF}$ es la bisectriz de un ángulo y $\overline{AD}$ es una mediana. ¿Qué segmento divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos de igual área?

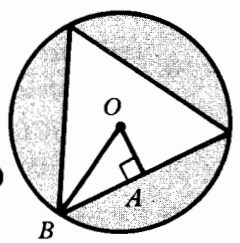


(Ejercicio 5)

6. Encuéntrese el área de las porciones sombreadas. Supóngase que los segmentos son congruentes si lo parecen.



(Ejercicio 6)



$OA = 1$
$OB = 2$

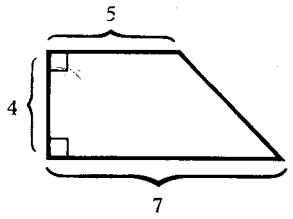
7. En $\triangle ABC$, D, E y F son puntos medios.
   Encuéntrese la razón $\dfrac{\text{área } (\triangle DEF)}{\text{área } (\triangle ABC)}$.

8. Encuéntrese el área de un círculo que está inscrito en un cuadrado de área 16 unidades cuadradas.

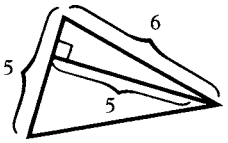
Capítulo 11 Examen

1. Encuéntrese el área de las figuras siguientes. Supóngase que los segmentos que parecen paralelos o congruentes lo son.

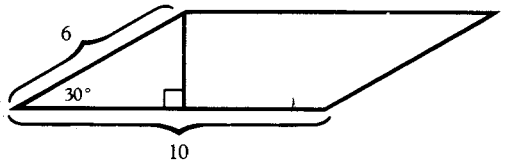
a.



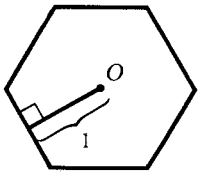
b.



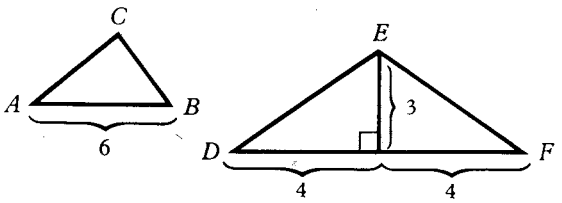
c.



d.



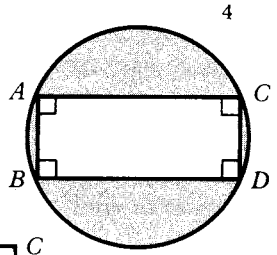
2. **Dado:** $\triangle ABC \sim \triangle DFE$



   a. Encuéntrese el perímetro de $\triangle ABC$.

   b. Encuéntrese el área de $\triangle ABC$.

3. Encuéntrese el área de las porciones sombreadas, donde $AB = 10$ y $BC = 26$.

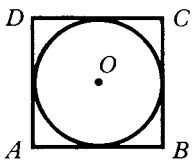


4. Si se duplica cada lado de un polígono regular, ¿en qué afecta esto al perímetro y al área?

5. Encuéntrense las dos razones siguientes.

   a. $\dfrac{\text{perímetro del cuadrado } ABCD}{\text{circunferencia del círculo } O}$.

   b. $\dfrac{\text{área } (ABCD)}{\text{área } (\odot O)}$.

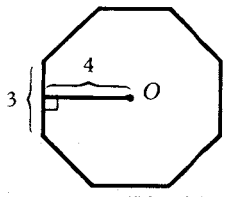


   c. ¿Las respuestas **a** y **b** dependen del tamaño de la figura?

6. Si dos triángulos son semejantes y la razón entre sus perímetros es 2:1, ¿cuál es la razón entre sus áreas?

7. Encuéntrese la circunferencia y el área de un círculo de diámetro 4 cm. ¿En qué son diferentes?

8. Encuéntrese el área del polígono regular.



(Ejercicio 8)

Repaso de álgebra

Evalúese cada fórmula para la letra indicada.

1. $A = bh$; para A si $b = 6$ cm, $h = 4$ cm.
2. $A = \frac{1}{2}h\,(b_1 + b_2)$; para A si $h = 7$ cm, $b_1 = 9$ cm, $b_2 = 15$ cm.
3. $C = 2\pi r$; para C si $r = 14$ cm (empléese $\pi \doteq 3.14$).
4. $A = 4\pi r^2$; para A si $r = 14$ cm.
5. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; para V si $r = 14$ cm.
6. $V = \frac{1}{3}Bh$; para h si $V = 100$ cm^3, $B = 30$ cm^2.
7. $A = \frac{1}{2}h\,(b_1 + b_2)$; para h si $A = 36$ cm^2, $b_1 = 12$ cm, $b_2 = 8$ cm.
8. $A = 4\pi r^2$; para r si $A = 100\pi$ m^2.
9. $A = \pi r\ell + \pi r^2$; para A si $r = 4\frac{1}{2}$ pulgadas, $\ell = 8\frac{1}{2}$ pulgadas.
10. $A = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$; para s si $A = 6\sqrt{3}$ yardas cuadradas.

Despéjese x.

11. $(x + 2)(x - 3) = 0$.
12. $x^2 - 9 = 0$.
13. $x^2 + 4x + 4 = 0$.
14. $x^2 - 6x + 9 = 0$.
15. $x^2 + 5x = -6$.
16. $x^2 + x - 2 = 0$.
17. $x(x - 1) = 90$.
18. $6x^2 - 7x = 5$.
19. $1 - 8x + 15x^2 = 0$.
20. $x^2 - 11x = 180$.
21. $x(x - 5) + 6 = 0$.
22. $0 = 5x - 3x^2 + 2$.

Resuélvase.

23. Encuéntrese el área de un campo rectangular cuya longitud es 100 yardas, y su ancho, 79 yardas.
24. Encuéntrese el área de un cuadrado cuyo perímetro es 20 cm.
25. El perímetro de un rectángulo es 40 cm, y su longitud, 5 cm mayor que su ancho. Encuéntrese el área.
26. Una laguna circular tiene 48 metros de diámetro. ¿Cuál es su área?
27. La base de un triángulo es tres veces la longitud de su altura. Si estas dos medidas suman 72 mm, ¿cuál es el área del triángulo?
28. La longitud y el ancho de un rectángulo suman 100 yardas. Su diferencia es 7 yardas. ¿Cuál es el área del rectángulo?
29. Las dimensiones de un jardín rectangular son 40 m × 24 m. Alrededor del jardín hay un camino. El área del jardín y el camino es 1232 m^2. Encuéntrese el ancho del camino.
30. El ancho de un rectángulo es 16 cm. La diagonal es 4 cm mayor que la longitud. Encuéntrese la longitud del rectángulo.

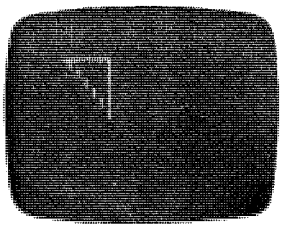
LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Gráficas por computador: transformaciones

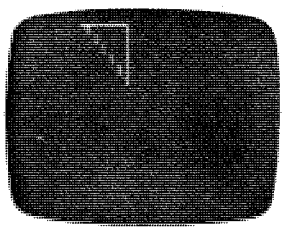
El análisis de formas es un uso importante de las gráficas por computador. Primero se analizará la idea de mover una forma en un plano. Los computadores pueden programarse para mover una figura a diferentes posiciones de la pantalla. Estos movimientos se llaman *transformaciones.*

Una de las transformaciones que pueden emplearse es la traslación. En un programa, el mandato que aparece a continuación hará que el punto (x, y) se mueva 50 unidades hacia la derecha y 70 unidades hacia arriba. Es una línea de un programa la que causa la traslación de una figura.

```
HPLOT X,Y TO X+50, Y+70
```



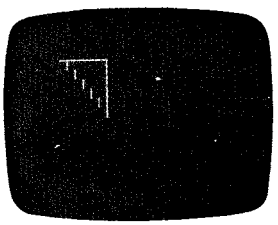
Antes de la traslación



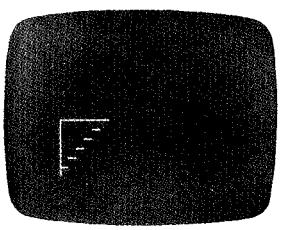
Después de la traslación

En un programa, el mandato que aparece a continuación hará que el punto (x, y) sufra una rotación de 90° sobre su origen en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Podría ser una línea de programa la que causa la rotación de una figura.

```
HPLOT X, Y TO -Y,X
```



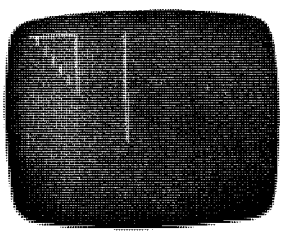
Antes de la rotación



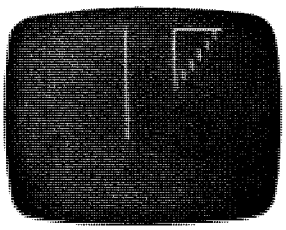
Después de la rotación

En un programa, el mandato que aparece hará que un punto (x, y) se refleje en el eje de las y. Podría ser una línea de un programa la que cause la reflexión de una figura.

```
HPLOT X,Y TO -X,Y
```



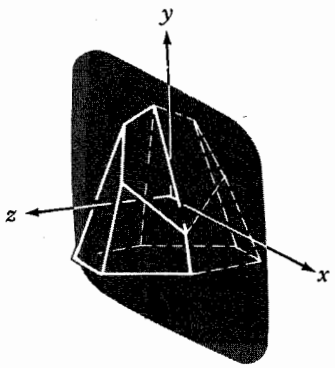
Antes de la reflexión



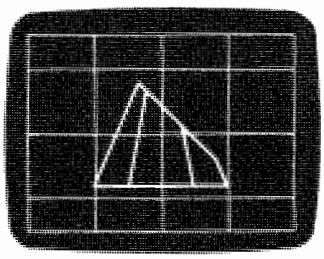
Después de la reflexión

La ventaja de usar computadores para mostrar diferentes vistas de un objeto es particularmente interesante para sólidos tridimensionales. La ilustración muestra un ejemplo de sólido de este tipo.

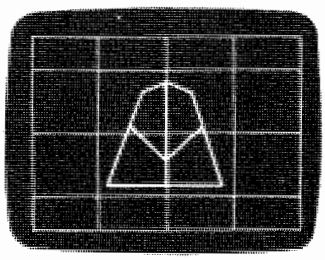
A continuación se muestra cómo puede servir un computador para presentar diferentes vistas de este sólido.



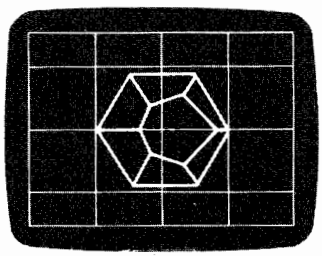
En cada una de estas figuras, la pantalla del computador muestra al sólido de acuerdo con el plano xy.



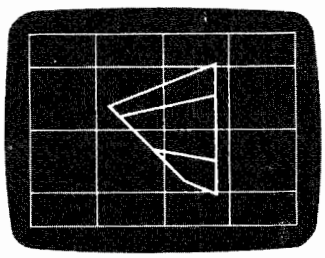
Una vista del plano xy.



Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las y.

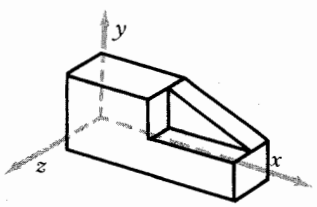


Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las x.



Una vista después de una rotación de 90° sobre el eje de las z.

1. Para el sólido que se muestra a continuación, elabórense bosquejos de las cuatro vistas presentadas antes.
2. Hágase un bosquejo tridimensional propio. Para este sólido, dibújense las cuatro vistas mostradas antes.



TEMA 16

Sólidos

CAPÍTULO 12

12.1 Pirámides y prismas 650

12.2 Área de prismas y pirámides 656

12.3 Volumen de prismas 660

12.4 Volumen de pirámides 664

12.5 Área y volumen de cilindros 668

12.6 Área y volumen de conos 672

12.7 Área y volumen de esferas 676

12.8 Poliedros regulares 680

Conceptos importantes 684

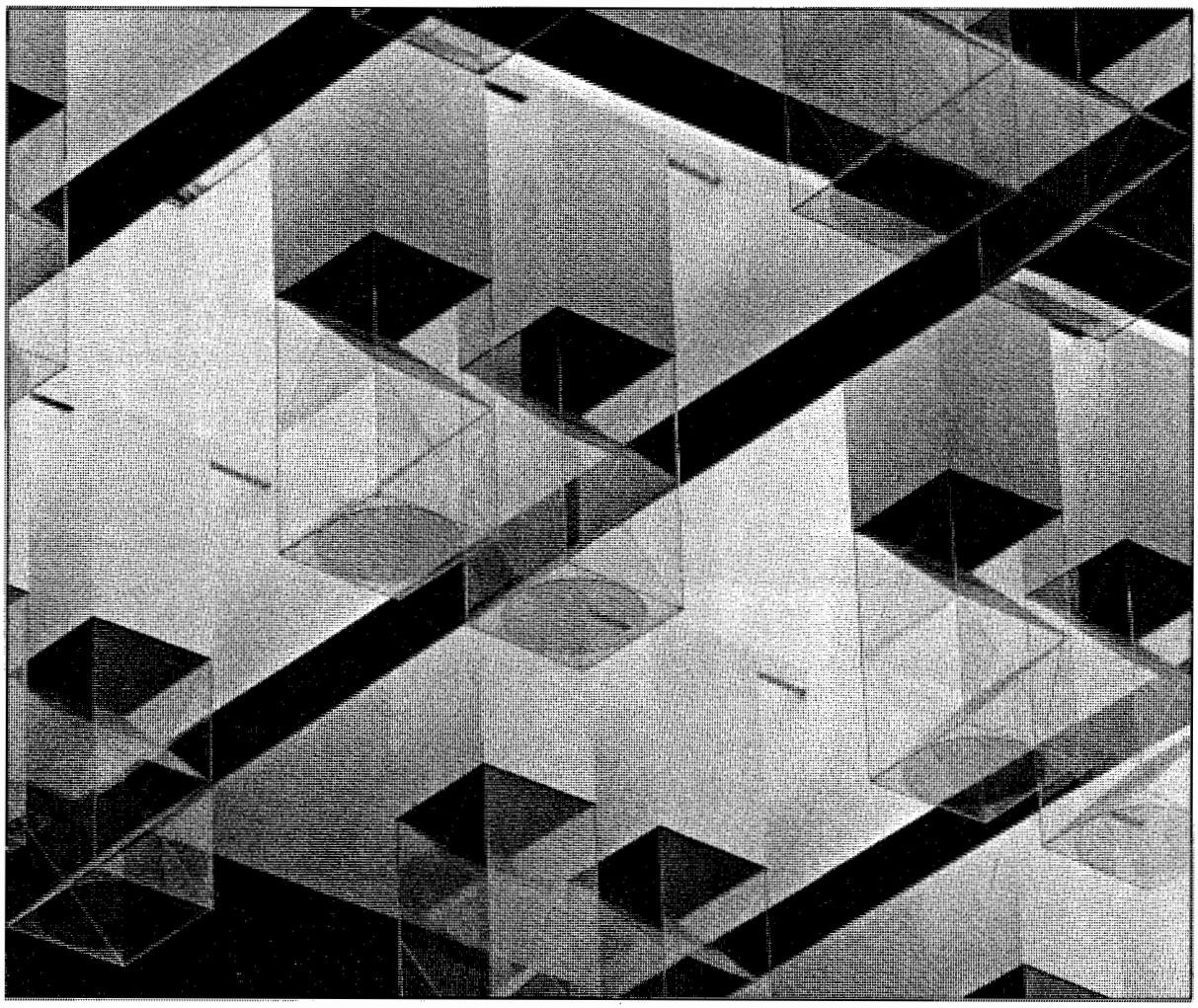
Resumen 685

Examen 686

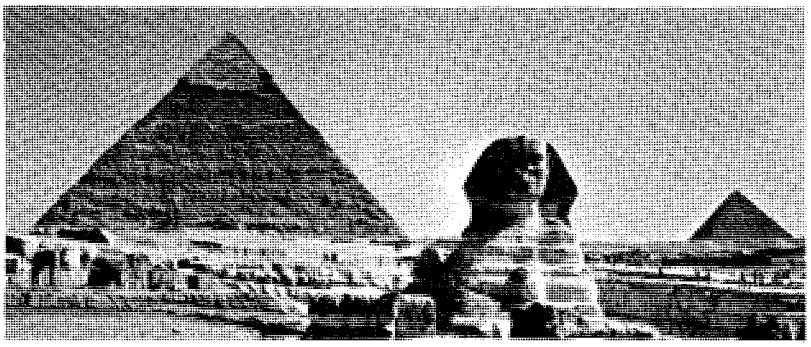
Técnicas para la solución de problemas
Hágase un dibujo preciso 687

La geometría en nuestro mundo
Navegación 688

Sólidos

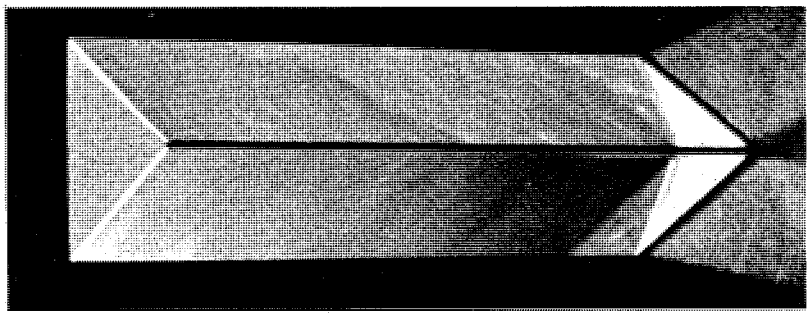


12.1 Pirámides y prismas



La forma de pirámide fue utilizada por muchas civilizaciones antiguas. Los egipcios construyeron las que aparecen en la fotografía; estas pirámides son ejemplos de *poliedros.*

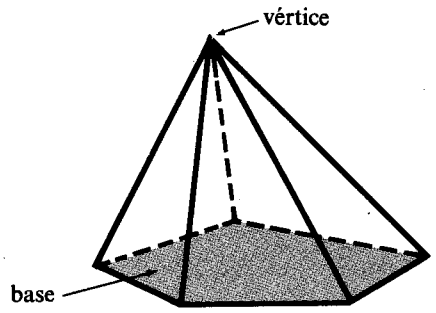
Un *poliedro* es un objeto tridimensional formado por regiones poligonales denominadas *caras.* Los lados y vértices de las caras reciben los nombres de *aristas* y *vértices* del poliedro.



Este prisma triangular es una clase especial de poliedro.

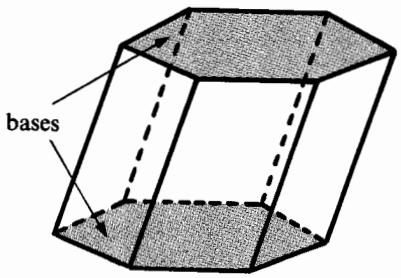
Definición 12.1

Un **poliedro** está formado por un número finito de regiones poligonales. Cada arista de una región es la arista de exactamente otra región. Si dos regiones se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice.



Definición 12.2

Una **pirámide** es un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. Ese vértice común es *el vértice* de la pirámide, y la cara que no contiene al vértice es la *base* de la pirámide.

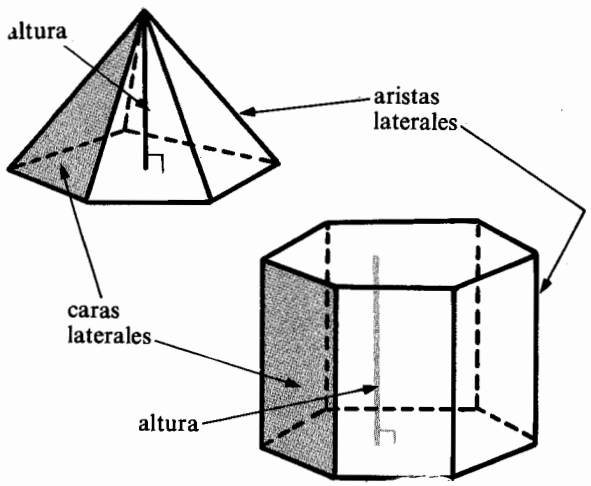


Definición 12.3

Un **prisma** es un poliedro que satisface estas condiciones:

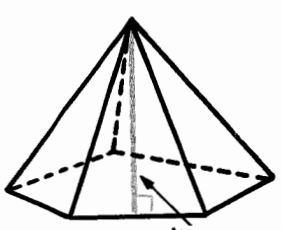
1. Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (*bases*).
2. Todas las demás caras son paralelogramos.

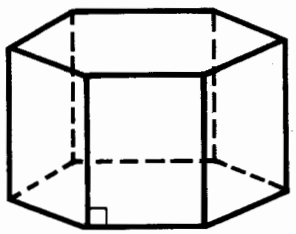
Tanto en los prismas como en las pirámides, las caras que no son bases se llaman *caras laterales*, y las aristas que no pertenecen a la base se llaman *aristas laterales*. Un segmento que esté entre las bases de un prisma y sea perpendicular a ellas es una *altura*. Un segmento que vaya del vértice a la base de una pirámide y sea perpendicular a la base, es una *altura*.



Una pirámide es *regular* si su base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

Un prisma es un *prisma recto* si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.





Este teorema establece una característica importante de los prismas.

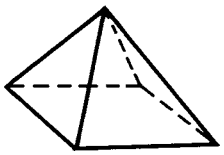
Teorema 12.1 Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.

EJERCICIOS

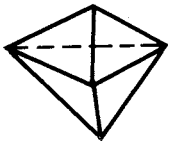
A.

1. ¿Cuál de estas figuras **no** es una pirámide y por qué?

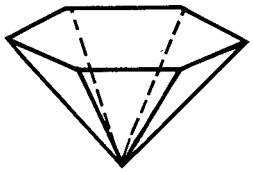
a.



b.

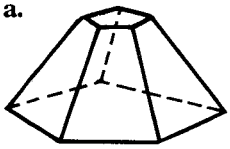


c.

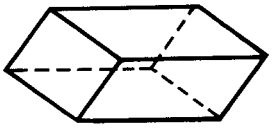


2. ¿Cuál de estas figuras es un prisma y por qué?

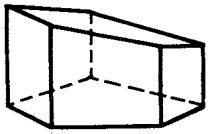
a.



b.

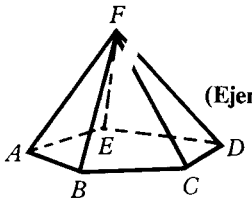


c.



3. Cítense cinco aristas de la base en esta pirámide.

4. Cítense cinco aristas laterales en esta pirámide.



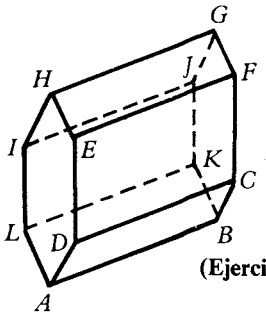
(Ejercicios 3-5)

5. Identifíquense cinco caras laterales en esta pirámide.

6. Cítense las aristas de la base de este prisma.

7. Cítense las aristas laterales de este prisma.

8. Identifíquense las caras laterales de este prisma.



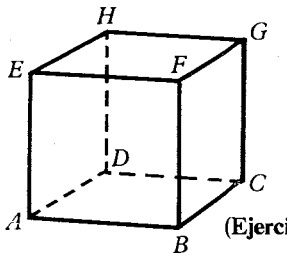
(Ejercicios 6-8)

9. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de una pirámide cualquiera?

10. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de un prisma cualquiera?

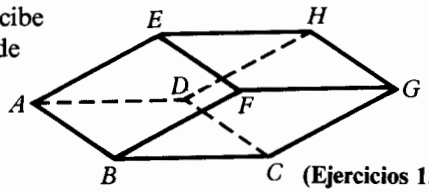
11. Si se considera que el cubo que se muestra a continuación es un prisma y se tiene que *ABCD* es una base, dígase cuáles son la segunda base y las aristas laterales.

12. Para este mismo cubo, si se considera que *ABFE* es una base, dígase cuáles son la segunda base y las aristas laterales.



(Ejercicios 11, 12)

Si las bases de un prisma son paralelogramos, el prisma recibe el nombre de *paralelepípedo*. Los ejercicios 13 a 19 tratan de paralelepípedos.



(Ejercicios 13-19)

13. Si $BCGF$ es una base del prisma, dígase cuál es la segunda base.

14. Si $ABFE$ es una base del prisma, dígase cuál es la segunda base.

En los ejercicios 15 a 19, $BC = 8$, $AB = 6$ y $BF = 5$. Encuéntrense las siguientes longitudes.

15. $AE =$?. **16.** $EH =$?.

17. $CD =$?. **18.** $DH =$?.

19. Dígase cuáles son las cuatro diagonales de este paralelepípedo.

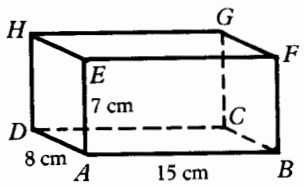
B.

20. Bosquéjese una pirámide con base en forma de cuadrilátero. Las aristas que no se ven deben dibujarse con líneas de puntos. (*Sugerencia:* Primero, dibújese la base; después, elíjase el vértice y únase a los vértices de la base.)

21. Bosquéjese una pirámide con base hexagonal.

22. Bosquéjese un prisma con base hexagonal.

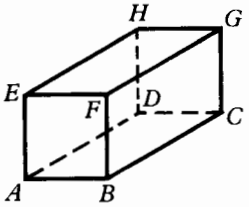
23. Supóngase que todas las caras de un paralelepípedo son rectángulos y que $AB = 15$ cm y $AD = 8$ cm. Muéstrese que $AC = 17$.



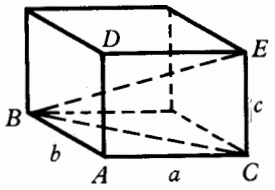
(Ejercicios 23, 24)

24. Muéstrese que la diagonal $\overline{AG}$ tiene una longitud de $\sqrt{338}$.

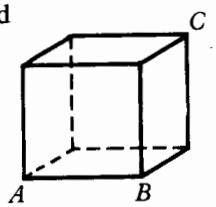
25. Dado un paralelepípedo con todas las caras rectangulares como el que se muestra, si $EH = 10$, $DC = 4$ y $FB = 4$, encuéntrese la longitud de la diagonal $\overline{HB}$.



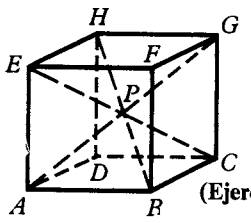
26. Supóngase que todas las caras de un paralelepípedo son rectángulos. Si $AC = a$, $AB = b$ y $EC = c$, muéstrese que $BE = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



27. En el cubo siguiente, $AB = 5$. Encuéntrese la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.



C.

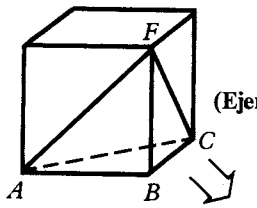


(Ejercicios 28-30)

28. ¿De qué tipo es el poliedro con vértices *ABCDP* de esta figura?

29. ¿En cuántas pirámides dividen al cubo los segmentos que van de *P* a cada uno de los vértices?

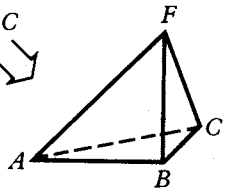
30. Dígase cuál es la base de cada una de las pirámides del ejercicio 29.



(Ejercicio 31)

31. Supóngase que el cubo de la figura está cortado por un plano *ACF*, formando la pirámide *ABCF*. Explíquese por qué esta pirámide es regular. (Recuérdese que las aristas de un cubo siempre tienen la misma longitud.)

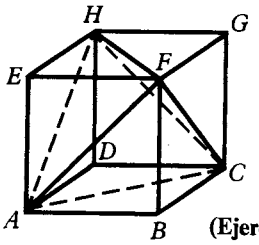
32. ¿Cuál es la base de la pirámide regular que resultó de cortar el cubo?



(Ejercicio 32)

33. ¿Cuántas pirámides regulares como *ABCF* pueden cortarse del cubo? Cítense.

34. Si se quitan cuatro pirámides como *ABCF* del cubo de la figura, queda el poliedro *ACHF*. Cítense todas las caras de *ACHF* y explíquese por qué son todas triángulos equiláteros.



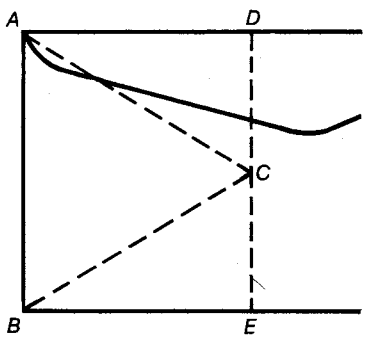
(Ejercicios 33, 34)

ACTIVIDADES

A continuación se explica un método para construir una pirámide con base triangular a partir de un sobre para cartas cerrado. Complétese la construcción.

1. Márquese el punto *C* de manera que $\triangle ABC$ sea un triángulo equilátero.
2. Hágase un corte a lo largo de $\overline{DE}$, que pase por *C* y sea paralelo a $\overline{AB}$.
3. Hágase un doblez a lo largo de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, adelante y atrás.
4. Sea *C'* el punto en el reverso del lado correspondiente a *C*.
5. Abrase y comprímase el sobre de manera que los puntos *D* y *E* se junten y que *C* y *C'* se separen. Péguese a lo largo de $\overline{CC'}$ y la pirámide está terminada.

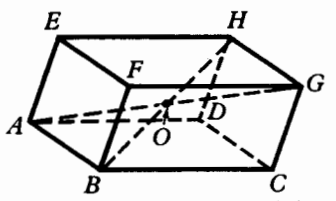
Constrúyase otro sólido con este método.



35. En este paralelepípedo, explíquese por qué el punto O es el punto medio de $\overline{AG}$ y $\overline{BH}$.

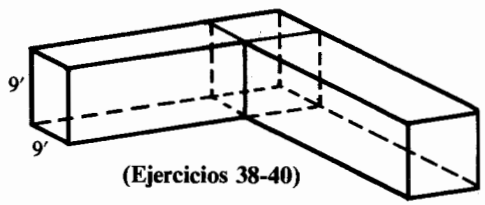
36. ¿De qué paralelogramo son diagonales los segmentos $\overline{CE}$ y $\overline{AG}$?

37. Explíquese por qué O es el punto medio de $\overline{CE}$.



(Ejercicios 35-37)

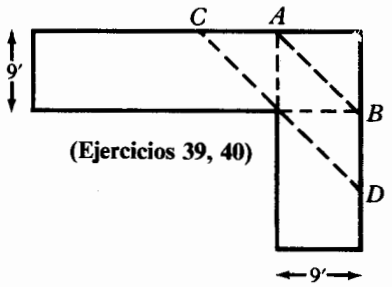
38. Una escuela tiene un pasillo de 9 pies de altura por 9 pies de ancho que hace esquina como muestra la figura. (Esto puede considerarse como la intersección de un par de paralelepípedos con caras rectangulares.) ¿Es posible hacer pasar una pértiga de 12 pies por la esquina de este pasillo? Explíquese.



(Ejercicios 38-40)

39. La figura muestra una vista aérea del pasillo del ejercicio anterior. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, verifíquese que $CD = 18\sqrt{2}$.

40. ¿Se podría hacer pasar por la esquina del pasillo una pértiga ligeramente más larga de $18\sqrt{2}$ pies? Explíquese.

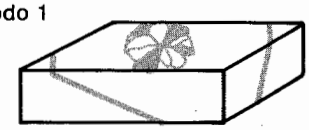


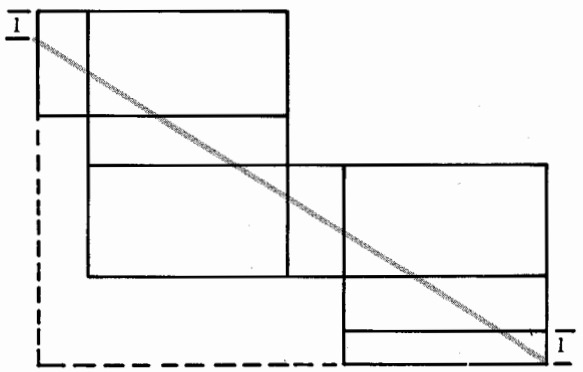
(Ejercicios 39, 40)

SOLUCION DE PROBLEMAS

Una caja de dimensiones 2 × 4 × 8 puede atarse con una cinta con dos métodos diferentes. ¿Qué cantidad de cinta se requiere en cada caso?
(*Sugerencia:* Piénsese en cortar la caja y abrirla para calcular la cantidad de cinta que se necesita para el segundo método. En el diagrama, algunas caras se muestran dos veces.)

Método 1


Método 2



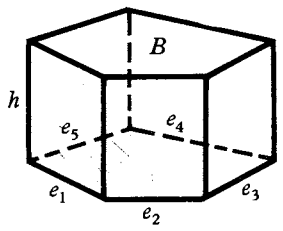
12.2 Area de prismas y pirámides

Los diseñadores profesionales y aficionados de interiores necesitan determinar la cantidad de material que se requiere para decorar superficies. En ocasiones, objetos familiares tales como mesas auxiliares o vitrinas tienen forma de prisma. Con frecuencia es necesario calcular las áreas de estas superficies.

Las áreas de prismas y pirámides pueden encontrarse usando la siguiente regla:

Area = suma de las áreas de las caras laterales + áreas de las bases

Considérese un prisma de altura h, con caras laterales rectangulares y bases pentagonales.



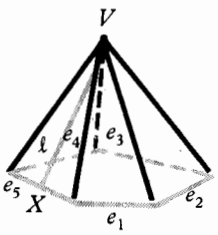
Si el área de cada base es B y las aristas de la base tienen longitudes e_1, e_2, e_3, e_4 y e_5, entonces:

$$\begin{aligned}\text{área de las caras laterales} &= e_1h + e_2h + e_3h + e_4h + e_5h \\ &= h(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \\ &= hp, \text{ donde } p \text{ es el perímetro de la base.}\end{aligned}$$

Teorema 12.2 Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es h y las bases tienen área B y perímetro p, entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = hp + 2B$.

El área total de una pirámide es igual a la suma de las áreas de las caras laterales más el área de la base.

Considérese una pirámide regular con base pentagonal, altura inclinada ℓ, y aristas de la base de longitudes $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5$.



Suma de las áreas de las caras laterales =

$$= \tfrac{1}{2}e_1\ell + \tfrac{1}{2}e_2\ell + \tfrac{1}{2}e_3\ell + \tfrac{1}{2}e_4\ell + \tfrac{1}{2}e_5\ell$$
$$= \tfrac{1}{2}\ell(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ell p, \text{ donde } p \text{ es el perímetro de la base.}$$

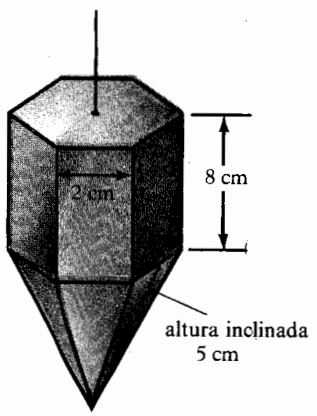
Esta información se resume en el siguiente teorema.

Teorema 12.3 Dada una pirámide regular con altura inclinada ℓ y base con área B y perímetro p, el área S se encuentra con la fórmula

$$S = \tfrac{1}{2}\ell p + B$$

APLICACION

En ocasiones, es necesario adaptar las fórmulas para aplicarlas a determinados objetos. Por ejemplo, considérese la plomada (un peso que se emplea en construcción) que se muestra a la derecha. Su forma es la de un prisma hexagonal con una base unida a una pirámide hexagonal en la parte inferior. Un fabricante necesita saber el área de esta pieza.



Por el dibujo se puede calcular que el área de la base es $6\sqrt{3}$ cm^2. De los teoremas 12.2 y 12.3 se tiene que el área del prisma y de la pirámide es:

$$\text{Area del prisma} = (12)(8) \text{ cm}^2 + 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$
$$\text{Area de la pirámide} = \tfrac{1}{2}(5)(12) \text{ cm}^2 + 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Pero una base del prisma y la base de la pirámide son comunes. Dado que ninguna de estas bases es parte de la superficie de la plomada, se debe restar dos veces el área de la base.

Por tanto, el área de la plomada es:

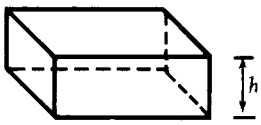
$$= (12)(8) + 12\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(5)(12) + 6\sqrt{3} - 2(6\sqrt{3})$$
$$= (126 + 6\sqrt{3})\text{cm}^2.$$

EJERCICIOS

A.

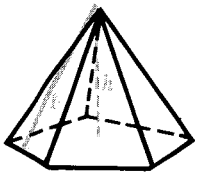
En los ejercicios 1 y 2, selecciónese la fórmula correcta para encontrar el área. p es el perímetro de la base, h es la altura, ℓ es la altura inclinada y B es el área de la(s) base(s).

1.



a. $S = \frac{1}{2}ph + 2B$.
b. $S = ph + B$.
c. $S = ph + 2B$.
d. $S = p\ell + 2B$.

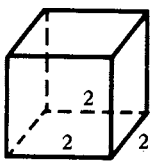
2.



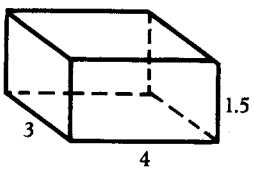
a. $S = \frac{1}{2}ph + B$.
b. $S = p\ell + B$.
c. $S = \frac{1}{2}p\ell + 2B$.
d. $S = \frac{1}{2}p\ell + B$.

En los ejercicios 3 a 5, encuéntrese el área de estos primas rectos y de la pirámide regular.

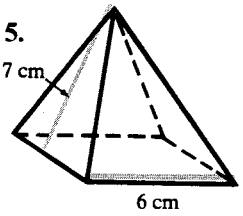
3.



4.



5.



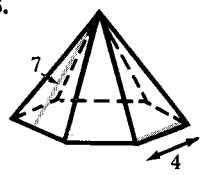
6. Encuéntrese el área de una caja sin tapa de 5 unidades de longitud, 3 unidades de ancho y 2 unidades de altura.

7. Encuéntrese el área de un prisma recto con bases de triángulo equilátero si todas las aristas miden 2 unidades de longitud.

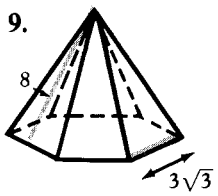
B.

Encuéntrense las áreas de estas pirámides regulares.

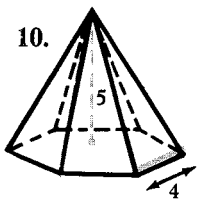
8.



9.

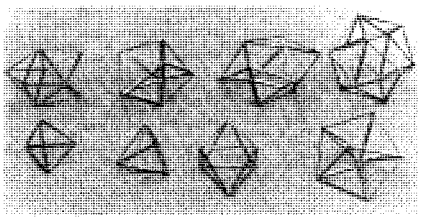


10.

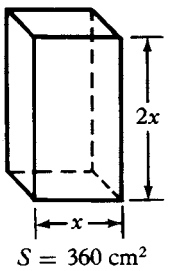


ACTIVIDADES

Un deltaedro es un poliedro con caras triangulares. Elabórense modelos de deltaedros con palillos y pegamento. ¿Cuáles de ellos son pirámides?

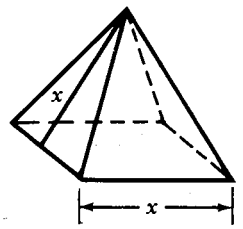


11. La superficie de un prisma con base cuadrada es 360 cm^2, y la altura es el doble de la longitud de las aristas de la base. ¿Cuáles son las longitudes de las aristas del prisma?



12. El área de una pirámide con base cuadrada es 48 cm^2. Si la altura inclinada es igual a la arista de la base, ¿cuál es el área de la base?

13. ¿Cuál es la longitud de la altura de la pirámide del ejercicio anterior?

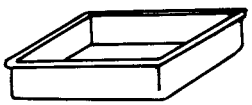


(Ejercicios 12, 13)

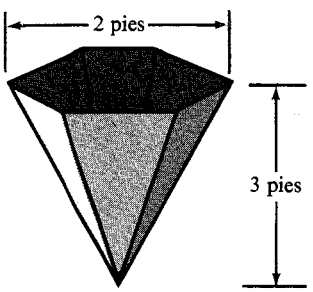
14. Si la longitud de cada arista de un prisma se duplica, ¿cómo cambia el área?

C.

15. Se desea cubrir unos moldes para bizcochos de 20 cm de lado por 6 cm de profundidad con un material antiadherente. Si la cantidad disponible de antiadherente cubre 100 metros cuadrados, ¿cuántos moldes podrán cubrirse?



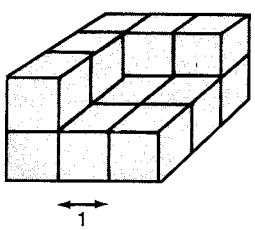
16. Un recipiente con forma de pirámide regular tiene la parte superior abierta. Esta parte es un hexágono regular con las dimensiones que muestra la figura. Si se van a pintar 100 de estos recipientes, por dentro y por fuera, con una pintura que cubre 450 pies cuadrados por galón, ¿cuántos galones se requieren?



SOLUCION DE PROBLEMAS

En la figura de la derecha, se sacaron 14 cubos para formar un sólido cuya área (incluyendo la base) es 42 unidades.

1. ¿Cómo puede cambiarse el área a 44 unidades moviendo un solo cubo?
2. ¿Cómo puede cambiarse el área a 40 unidades moviendo un solo cubo?

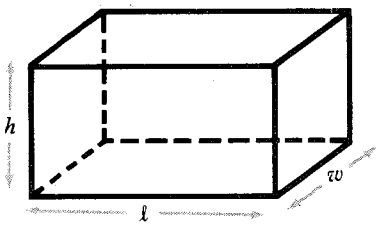


12.3 Volumen de prismas

Un ingeniero civil estima costos de construcción. En la construcción de esta carretera, un ingeniero determina la cantidad de material que debe sacarse para conformar el terreno calculando el volumen.

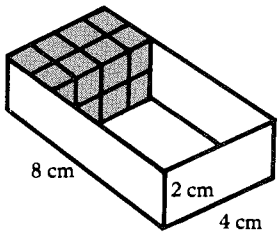
Hay postulados que caracterizan el concepto de volumen y se estudiarán en esta sección.

Intuitivamente se considera el volumen como la cantidad de espacio que ocupa un sólido.



Se iniciará el estudio del volumen considerando un sólido denominado comúnmente «caja», y que se define como un *sólido rectangular.*

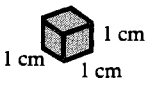
Un sólido rectangular tiene longitud, ancho y altura.



Ejemplo.

Encuéntrese el volumen (V) de una caja de 8 cm × 4 cm × 2 cm.
$V = 2$ cm × 4 cm × 8 cm = 64 cm^3
(léase 64 centímetros cúbicos).

Esto equivale a contar el número de cubos de 1 cm de lado que caben en la caja.



Postulado del volumen

A cada sólido se le asigna un número positivo único denominado **volumen.**

Definición 12.4

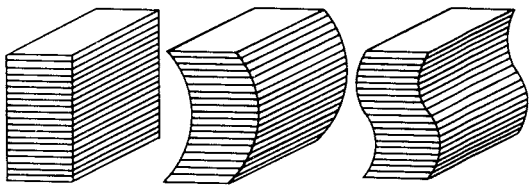
Un **sólido rectangular** es un prisma con bases rectangulares cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.

Postulado del volumen de un sólido rectangular

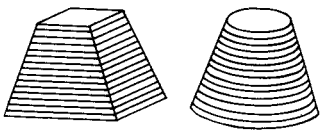
El **volumen de un sólido rectangular** es igual al producto de su longitud ℓ, ancho w y altura h.

Postulado de la suma de volúmenes

Si un sólido es la unión de dos sólidos que no tienen puntos interiores en común, entonces su volumen es la suma de los volúmenes de los dos sólidos.



Imagínese un sólido rectangular cortado en rebanadas que pueden moverse para obtener sólidos de formas irregulares. El volumen del sólido será el mismo.

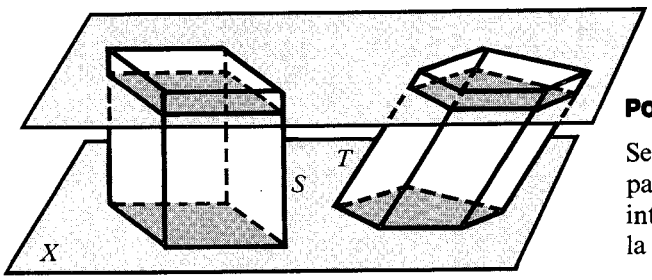


Igualmente, supóngase que dos sólidos pueden rebanarse de manera que sus partes superiores correspondientes tengan áreas iguales. La intuición sugiere que los volúmenes de los dos sólidos son iguales.

Definición 12.5

Una **sección transversal** de un sólido es una región común al sólido y a un plano que interseca al sólido.

Los ejemplos anteriores dan lugar a un postulado conocido como principio de Cavalieri, llamado así por el matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647).



Postulado de Cavalieri

Sean S y T sólidos y X un plano. Si todo plano paralelo a X que interseca a S o T, también interseca a S y a T en una sección transversal con la misma área, entonces

Volumen S = Volumen T.

Los postulados de esta sección pueden combinarse para probar el siguiente teorema.

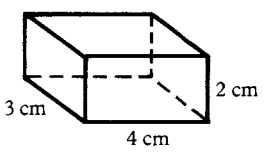
Teorema 12.4 El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la longitud de una altura por el área de la base.

EJERCICIOS

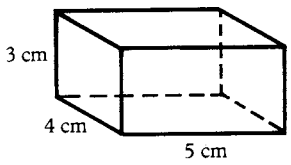
A.

Encuéntrense los volúmenes de las cajas siguientes.

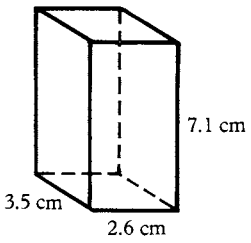
1.



2.



3.



4. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?

5. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?

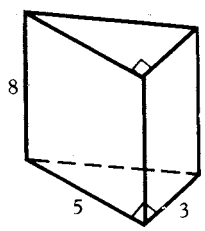
6. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 2?

7. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 3?

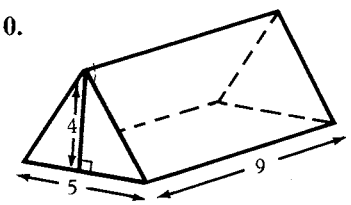
8. ¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene un pie cúbico?

Encuéntrese el volumen de los primas de los ejercicios 9 a 11.

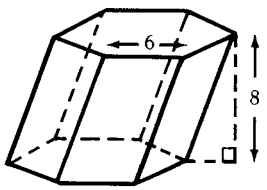
9.



10.



11.



base
de hexágono regular

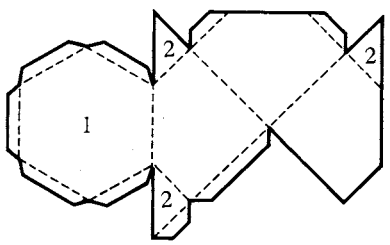
B.

12. Si el área de la base de un prisma se duplica y la altura permanece igual, ¿cuánto aumenta el volumen?

ACTIVIDADES

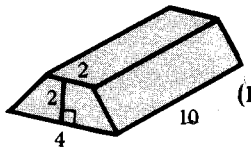
Dibújense dos copias de esta figura y constrúyanse dos sólidos.

Unanse los dos sólidos para formar un prisma. (Al dibujar la figura, asegúrese de que el polígono 1 sea un hexágono regular y que los polígonos 2 sean triángulos 45-45-90.)



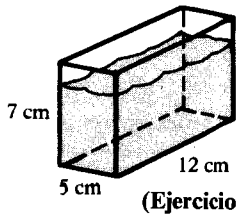
13. Si las longitudes de todos los lados de una caja se duplican, ¿cuánto aumenta el volumen?

14. Los lingotes de plata son barras moldeadas como la de la figura. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es el volumen?



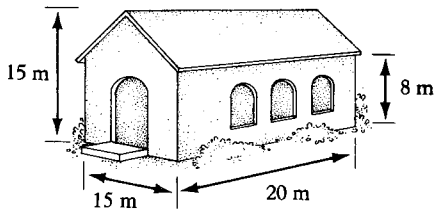
(Ejercicio 14)

15. Un recipiente rectangular tiene 5 cm de ancho y 12 cm de longitud, y contiene agua hasta una profundidad de 7 cm. Se mete una piedra y el nivel del agua sube 1.7 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?



(Ejercicio 15)

16. Un ingeniero necesita encontrar el volumen de una construcción para diseñar un sistema de calefacción. Encuéntrese el volumen de la construcción de la figura.



(Ejercicio 16)

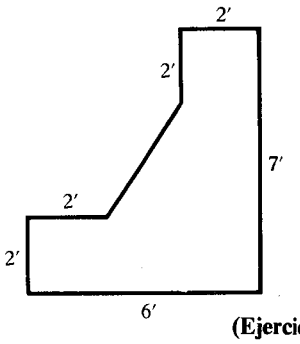
17. Si un recipiente rectangular con base cuadrada tiene 2 pies de altura y un volumen de 50 pies cúbicos, encuéntrense la longitud y el ancho de la base.

18. Supóngase que el área de la base de un prisma es x pies cuadrados, y su altura, $2x$ pies. Si el volumen del prisma es 54 pies cúbicos, ¿cuál es su altura?

C.

19. El plano de un ingeniero muestra un canal con sección transversal trapecial de 8 pies de profundidad, 14 pies a lo largo de la base, y con las paredes formando un ángulo de 45°. El canal tiene 620 pies de largo. Se estima que el costo de excavación del canal será de 1.50 dólares por yarda cúbica. Si se añade un 10 % para gastos extra, ¿cuál será el presupuesto?

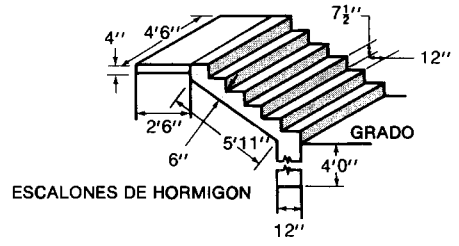
20. Un muro de contención de hormigón mide 80 pies de longitud, con extremos como los de la figura. ¿Cuántas yardas cúbicas de hormigón se emplearon para construir este muro?



(Ejercicio 20)

SOLUCION DE PROBLEMAS

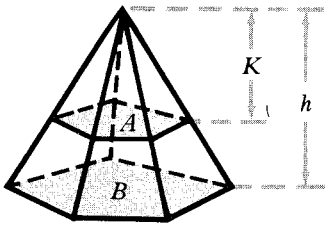
¿Cuántas yardas cúbicas de hormigón se necesitan para los escalones de la figura?

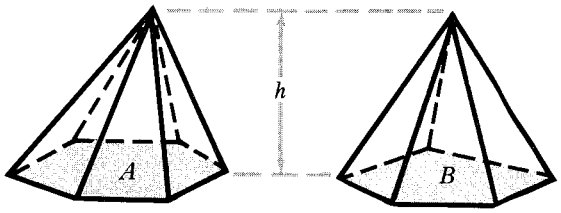


12.4 Volumen de pirámides

En muchas ocasiones es necesario encontrar el volumen de un objeto que no es ni un sólido ni un prisma regular. Este dibujo muestra un recipiente con forma de pirámide de base triangular. Conocer el volumen del recipiente es fundamental para el fabricante.

El teorema 12.7 proporciona la fórmula para encontrar el volumen de una pirámide. Primero deben presentarse otros dos teoremas, que se usan en el desarrollo de la fórmula.





área A = área B

Teorema 12.5

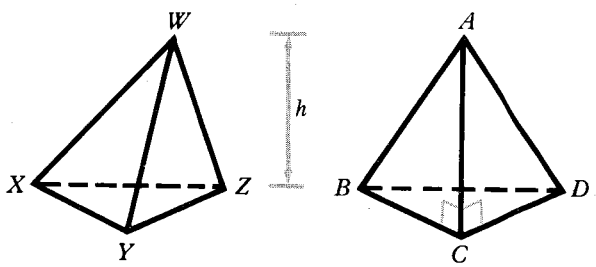
Dada una pirámide con base B y altura h, si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice a la sección transversal es K, entonces

$$\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \left(\frac{K}{h}\right)^2.$$

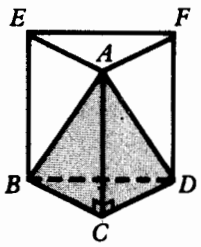
Teorema 12.6

Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área tienen el mismo volumen.

Supóngase que se desea encontrar el volumen de la pirámide $WXYZ$. Para hacer esto, primero debe encontrarse el volumen de la pirámide recta $ABCD$ con área de la base igual a la de $\triangle XYZ$ y altura h. Empléese el teorema 12.6.

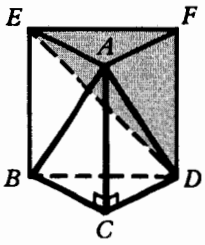


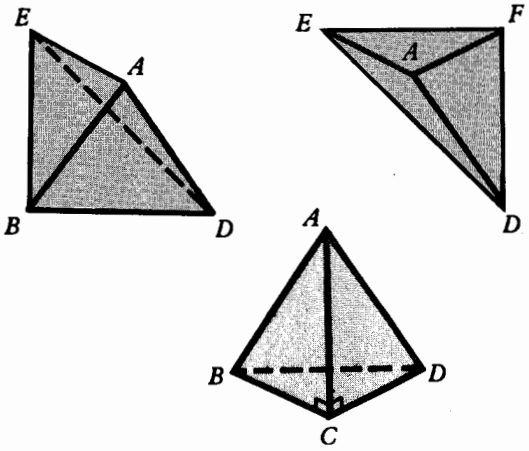
Considérese ahora el prisma recto con base y altura iguales a las de la pirámide $ABCD$.



Háganse en el prisma los dos cortes siguientes:

1. Córtese desde A a través de BD.
2. Córtese desde A a través de ED.





Entonces

1. Volumen de $ABCD$ = volumen $ADEF$. Las bases de $\triangle BCD$ y $\triangle AEF$ tienen la misma área, y las alturas AC y DF son de igual longitud. Por tanto, el teorema 12.6 implica la igualdad entre volúmenes.
2. Volumen $ADEF$ = volumen $ABDE$. Estas dos pirámides tienen bases $\triangle BDE$ y $\triangle FDE$ de áreas iguales, ya que son las mitades del rectángulo $BDFE$. Las alturas de ambas pirámides se forman por un segmento perpendicular que va de A a la base opuesta, por lo que las alturas son iguales. El teorema 12.6 establece que los volúmenes son iguales.

Por tanto, el volumen de la pirámide $ABCD = \frac{1}{3}$ del volumen del prisma $ABCDEF$

$$= \tfrac{1}{3}hB.$$

Teorema 12.7 Dada una pirámide de altura h y área de la base B, el volumen se encuentra por la fórmula $V = \frac{1}{3}hB$.

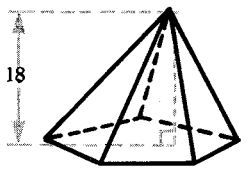
EJERCICIOS

A.

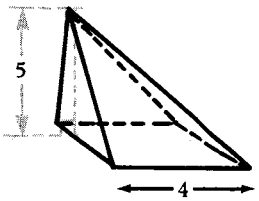
Clasifíquense los ejercicios 1 a 5 como falsos o verdaderos.

1. Si dos pirámides de alturas iguales tienen bases congruentes, entonces sus volúmenes son iguales.
2. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales, entonces sus alturas son necesariamente iguales.
3. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales y alturas iguales, entonces sus bases son necesariamente congruentes.
4. Si dos pirámides tienen volúmenes iguales y bases de la misma área, entonces sus alturas son necesariamente iguales.
5. Una pirámide con base cuadrada no puede tener nunca un volumen igual al de una pirámide con base triangular.

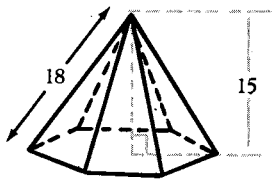
Encuéntrese el volumen de estas pirámides.

6. 

área de la base = 51

7. 

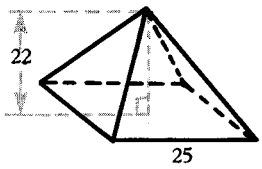
base cuadrada

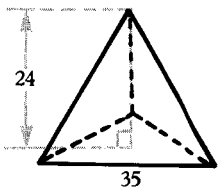
8. 

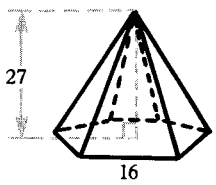
área de la base = 65

B.

En los ejercicios 9 a 11, encuéntrese el volumen de las pirámides regulares que se muestran.

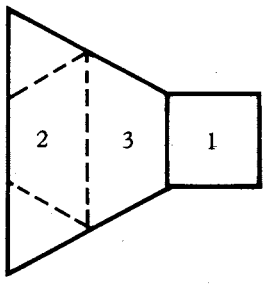
9. 

10. 

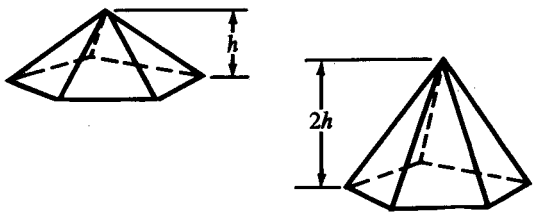
11. 

ACTIVIDADES

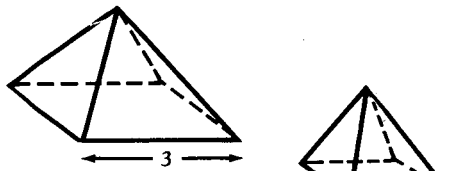
Dibújese una ampliación de esta figura, recórtense dos copias, dóblense y péguense para formar dos poliedros. ¿Se pueden unir estos dos poliedros para formar una pirámide?
(Al dibujar la figura, asegúrese de que el polígono 1 sea un cuadrado y de que los polígonos 2 y 3, juntos, formen un hexágono regular.)



12. Las bases de estas dos pirámides tienen áreas iguales. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?



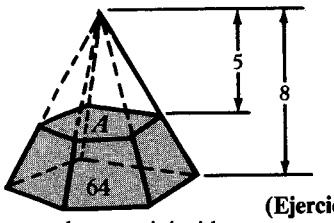
13. Estas dos pirámides tienen alturas iguales y bases cuadradas. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?



C.

14. ¿Cuál es el área de la sección transversal A de esta pirámide?

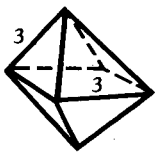
15. ¿Cuál es el volumen de la porción sombreada de esta pirámide?



tronco de una pirámide

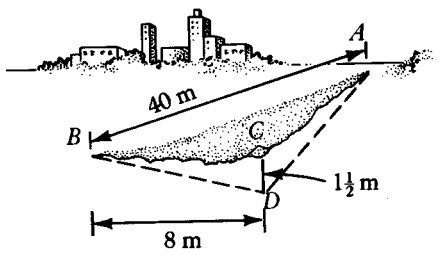
(Ejercicios 14, 15)

16. ¿Cuál es el volumen de un octaedro regular cuyas aristas miden 3 de longitud?



octaedro regular

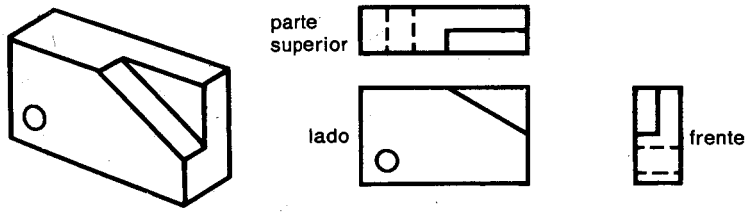
17. Una represa está situada a lo largo de un lado de un estacionamiento de vehículos. La represa empieza en el punto A y se hace más profunda a medida que aumenta su anchura. El borde superior $\overline{BC}$ de la parte más profunda mide 8 metros de ancho. El punto B está a 40 metros de A. El punto D, el más profundo, está 1.5 metros por debajo de $\overline{BC}$. En D hay un desagüe que drena 50 litros por minuto. Dado que un metro cúbico tiene 1000 litros, ¿cuántas horas tardará en vaciarse la represa si está llena? (Supóngase que $ABCD$ es una pirámide.)



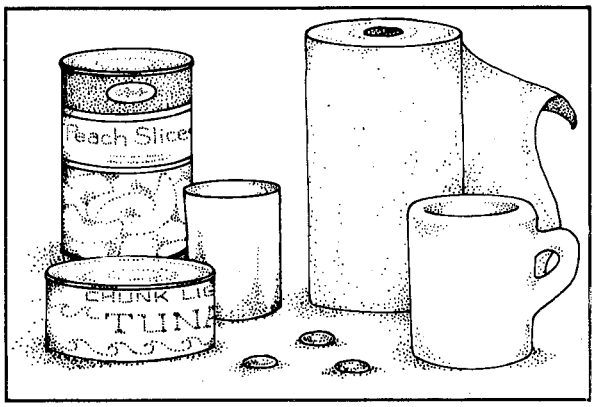
SOLUCION DE PROBLEMAS

Muchos dibujos en copias heliográficas muestran la parte superior, un lado y el frente de los objetos. Obsérvese que las líneas punteadas muestran cortes que no están a la vista.

Bosquéjense dos «cortes de bloques» que tengan las vistas superior y frontal iguales y diferente visión lateral.



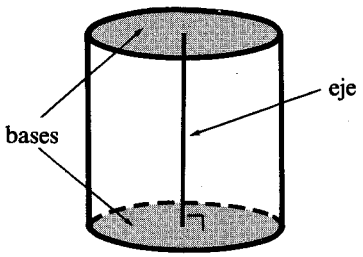
12.5 Área y volumen de cilindros



Muchos objetos de uso corriente son ejemplos de formas cilíndricas. Estos dibujos muestran algunos de ellos. En esta sección se definirá el cilindro circular y se describirán fórmulas para calcular su área y su volumen.

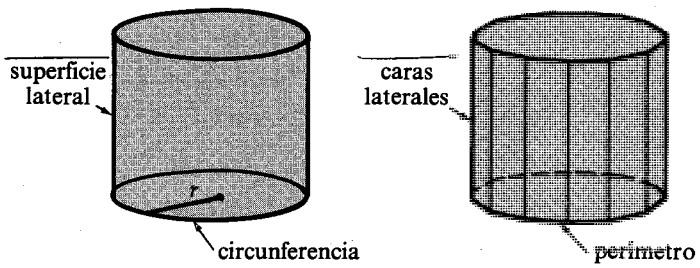
Un *cilindro* es como un prisma en el sentido de que tiene bases congruentes en un par de planos paralelos. Las bases son regiones circulares congruentes.

El segmento que une los centros de las dos bases se llama *eje* del cilindro. Un cilindro es *recto* si su eje es perpendicular a las bases. La *altura* del cilindro es la longitud del eje.



cilindro recto

Un cilindro puede considerarse como un prisma con un número infinito de lados. La superficie lateral y la circunferencia de las bases de un cilindro corresponden, respectivamente, a las caras laterales y al perímetro de un prisma.



Los dos teoremas siguientes describen el área y el volumen de un cilindro circular recto.

Teorema 12.8 Dado un cilindro circular recto de altura h, si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B, el área S está dada por la fórmula

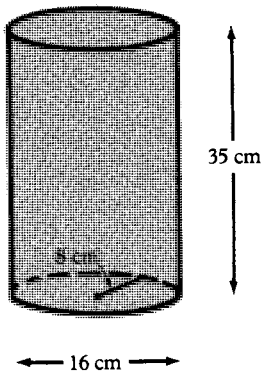
$$S = Ch + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Teorema 12.9 Dado un cilindro circular recto con área de la base B y altura h, su volumen está dado por la fórmula

$$V = Bh = \pi r^2 h.$$

Ejemplo 1

Un recipiente con forma de cilindro circular recto mide 35 cm de altura y 16 cm de diámetro. Encuéntrense el área y el volumen.

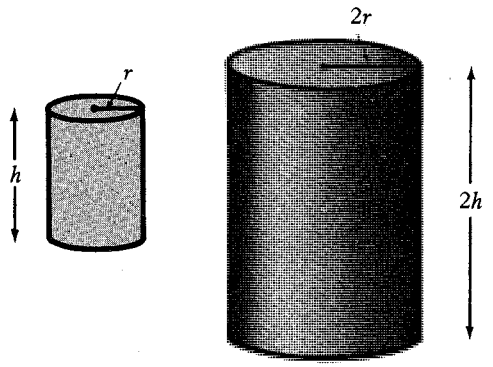


$$\begin{aligned} S &= 2\pi(8)\cdot 35 + 2\pi(8)^2 \\ &= 560\pi + 128\pi \\ &= 688\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi(8)^2 \cdot 35 \\ &= 2240\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si el radio y la altura de un cilindro se duplican, ¿en cuánto cambian su área y su volumen?



$$\begin{aligned} S(\text{cilindro grande}) &= 2\pi(2r)(2h) + 2\pi(2r)^2 \\ &= 4(2\pi rh) + 4(2\pi r^2) \\ &= 4S \text{ (cilindro pequeño).} \end{aligned}$$

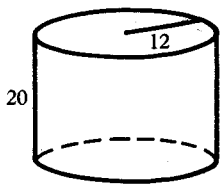
$$\begin{aligned} V(\text{cilindro grande}) &= \pi(2r)^2(2h) \\ &= 8\pi r^2 h \\ &= 8V \text{ (cilindro pequeño).} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

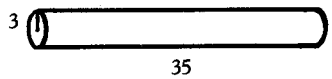
A.

Encuéntrense el área y el volumen de los cilindros de los ejercicios 1 a 3.

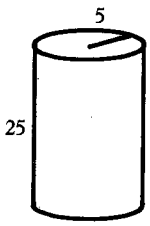
1.



2.



3.



4. Un depósito cilíndrico tiene 17 pies de altura, y el radio de su base es 10 pies. ¿Cuántos pies cúbicos contiene el depósito?

5. ¿Cuántas yardas cúbicas contiene el depósito del ejercicio 4?

B.

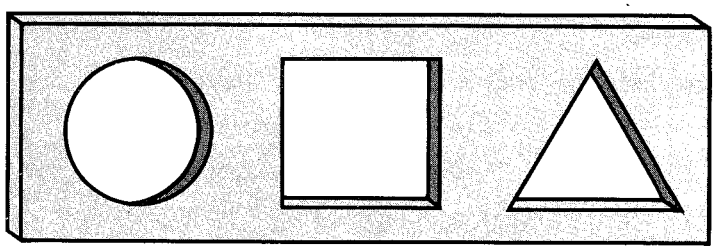
6. Una columna cilíndrica de mármol mide 9 pies de altura y 80 cm de diámetro. Si 1 m^3 de mármol pesa 300 kg, encuéntrese el peso de la columna.

7. El volumen de un cilindro circular recto es 972 cm^3. Si la altura es 12 cm, ¿cuál es el radio de la base?

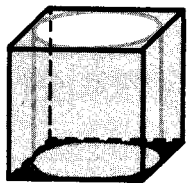
8. La razón entre los radios de dos cilindros circulares rectos de la misma altura es 2:1. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de los dos cilindros?

ACTIVIDADES

Elabórese un sólido con barro, madera o cualquier otro material que ocupe por completo estos agujeros y pueda pasar a través de ellos sin cambiar de forma.

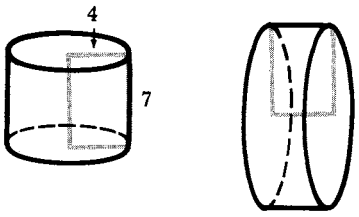


9. En un cubo se corta un cilindro de 8 pulgadas de diámetro. La arista del cubo también mide 8 pulgadas. Encuéntrense el volumen y el área de este sólido hueco.



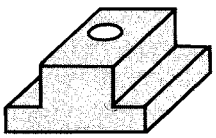
C.

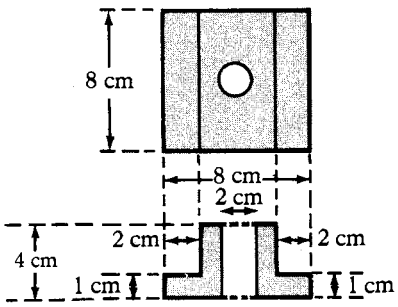
10. Un rectángulo de 4 × 7 se rota alrededor del lado largo para generar un cilindro y se rota alrededor del lado corto, para generar otro cilindro. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de estos cilindros?



11. En una caja se embalan seis latas cilíndricas. ¿Cuál es la razón entre el volumen de la caja y los volúmenes de las seis latas juntas?

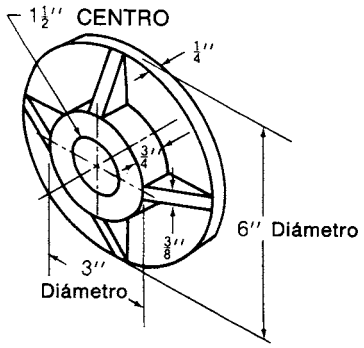
12. Encuéntrense el área y el volumen de esta pieza de acero.



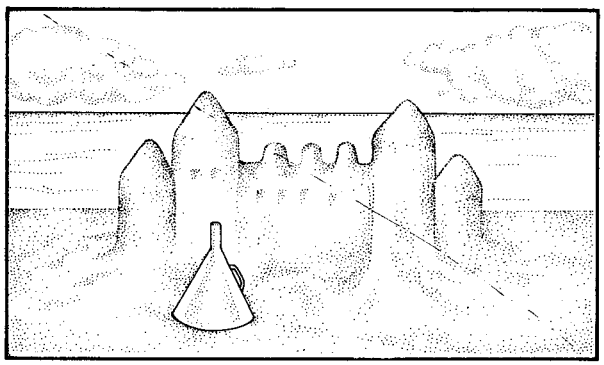


SOLUCION DE PROBLEMAS

Encuéntrense el volumen y el área de esta pieza.



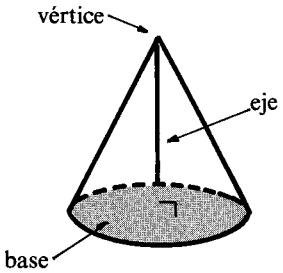
12.6 Area y volumen de conos



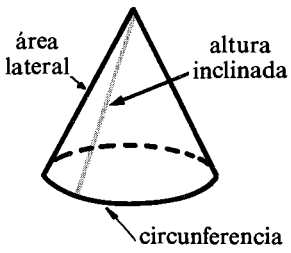
La forma de cono suele encontrarse en el mundo real combinada con la forma de cilindro. Por ejemplo, la punta de un lápiz o la punta de un alfiler puede considerarse como un cono montado sobre un cilindro. Un niño puede construir un castillo de arena combinando estas formas.

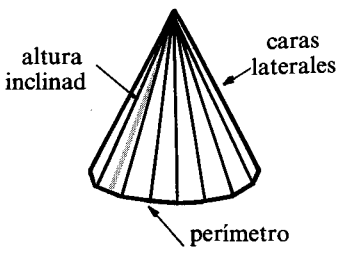
La figura de la derecha es un *cono circular recto.* Tiene una *base* circular y un *vértice.*

Su *eje* es el segmento que une al vértice con el centro de la base. El cono se llama *recto* porque el eje es perpendicular a la base.



Un cono puede considerarse como una pirámide con un número infinito de caras laterales. La superficie lateral de un cono corresponde a las caras laterales de una pirámide. La altura inclinada (ℓ) de un cono corresponde a la altura inclinada (ℓ) de una pirámide, y la circunferencia (C) de la base de un cono corresponde al perímetro (p) de la base de la pirámide.

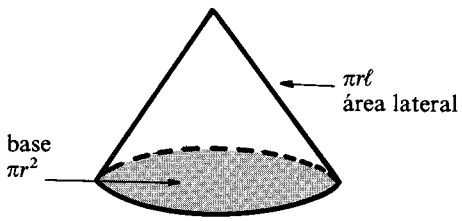




El teorema siguiente describe el área de un cono.

Teorema 12.10 Dado un cono circular recto con altura inclinada ℓ, si la circunferencia de su base es C y el área de la base B, entonces el área S está dada por la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\ell C + B = \pi r\ell + \pi r^2.$$



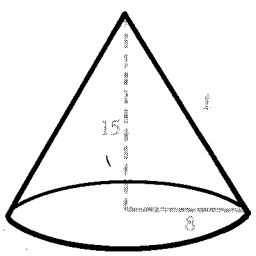
La fórmula del volumen dada en el siguiente teorema es similar a la fórmula para el volumen de una pirámide.

Teorema 12.11 Dado un cono circular recto con altura h y área de la base B, el volumen está dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Ejemplo

Un cono circular recto tiene altura 15 y radio de la base 8. Encuéntrense la altura inclinada, el área y el volumen.



a. altura inclinada:
$\ell^2 = 64 + 225 = 289.$
$\ell = 17.$

b. $S = \pi(8)(17) + \pi 64 = 200\pi.$

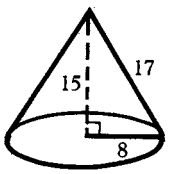
c. $V = \frac{1}{3}\pi(8)^2 15 = 320\pi.$

EJERCICIOS

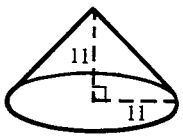
A.

En los ejercicios 1 a 3, encuéntrense el volumen y el área de cada uno de los conos rectos.

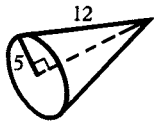
1.



2.



3.

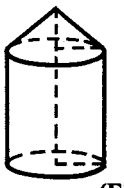


4. El radio de un cono es 5 cm, y su altura, 12 cm. Encuéntrense el área y el volumen.

5. Si el volumen de un cono es 72 π, encuéntrense la altura y el radio si son iguales.

B.

6. Un recipiente está formado por un cilindro circular recto de 4 cm de diámetro y 8 cm de altura, y un cono de 6 cm de altura. Encuéntrese el volumen del recipiente.

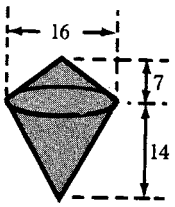


(Ejercicios 6, 7)

7. Encuéntrese el área del recipiente.

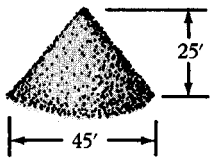
8. Encuéntrese el volumen de este trompo.

9. Encuéntrese el área de este trompo.



(Ejercicios 8, 9)

10. Una pila de arena tiene forma de cono. ¿Cuántas yardas cúbicas de arena hay en él? (Para grandes cantidades de arena se emplea la yarda cúbica.)

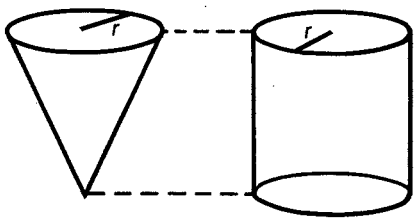


ACTIVIDADES

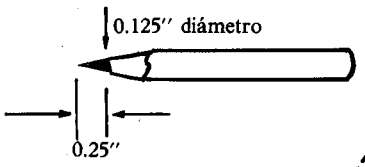
Constrúyanse o consíganse modelos de cono y cilindro sin una tapa, que tengan el mismo radio y la misma altura.

Llénese el cono con arena y luego vacíese la arena en el cilindro.

¿Cuántos conos de arena se requieren para llenar el cilindro?

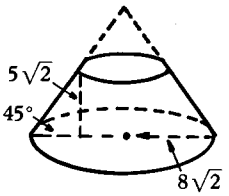


11. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de grafito hay en la punta afilada de este lápiz? (Empléese una calculadora.)

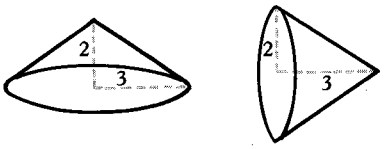


C.

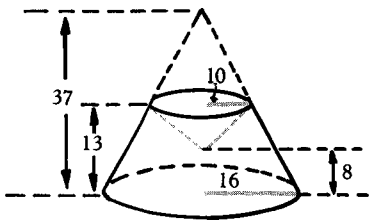
12. Este sólido está formado por un cono cortado o truncado por un plano paralelo a la base del cono. Encuéntrense el volumen y el área. (*Sugerencia:* Empléense triángulos semejantes para encontrar la altura del cono original.)



13. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen longitudes 2 y 3. Al rotar los triángulos sobre sus lados cortos y largos, se forman conos. Encuéntrese la razón entre los volúmenes y la razón entre las áreas de ambos sólidos.

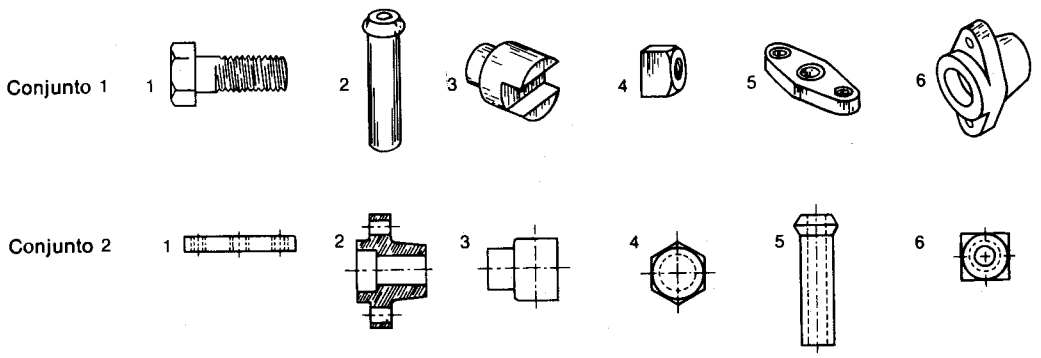


14. Este sólido se forma cortando un cono con un plano paralelo a la base y luego perforando la parte superior en forma de cono. Encuéntrese el volumen de este sólido.



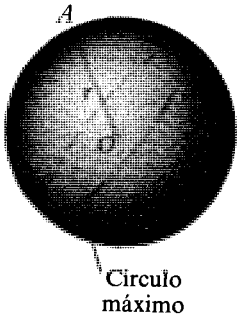
SOLUCION DE PROBLEMAS

Relaciónense correctamente los objetos del conjunto 1 con su visión (superior o lateral) del conjunto 2.



12.7 Area y volumen de esferas

En esta sección, se estudiarán las fórmulas para el volumen y el área de una esfera.

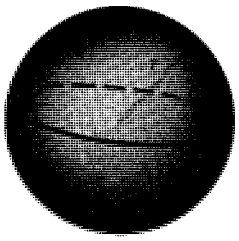


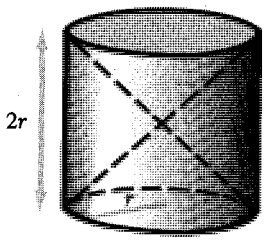
El punto O dado es el *centro* de la esfera. Un *radio* de una esfera es un segmento determinado por el centro y un punto sobre la esfera. La intersección de una esfera y un plano que contiene al centro de la esfera es un *círculo máximo* de la esfera.

Definición 12.6

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado.

La explicación de la fórmula del teorema 12.12 está basada en una comparación entre una esfera y un cilindro al que se le ha perforado un cono doble. Los radios de la esfera y del cilindro son iguales. La altura del cilindro es el doble del radio.

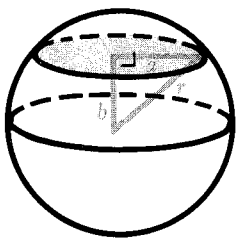




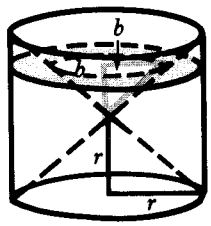
Teorema 12.12 Dada una esfera de radio r, el volumen se encuentra con la fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Considérese una sección transversal de la esfera y del cilindro perforado que está a una distancia b del centro de la esfera. Se tiene por el teorema de Pitágoras que la distancia a en la figura es $a^2 = r^2 - b^2$.



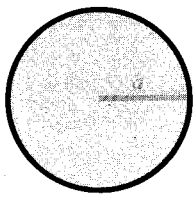
A



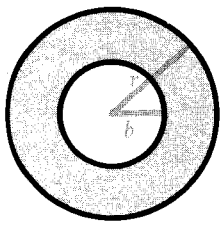
B

El triángulo en rojo es isósceles

Compárense las áreas de las dos secciones transversales.



Area $= \pi a^2$.



$$\begin{aligned}\text{Area} &= \pi r^2 - \pi b^2 \\ &= \pi(r^2 - b^2) \\ &= \pi a^2.\end{aligned}$$

Dado que las áreas de las dos secciones transversales son iguales, por el principio de Cavalieri (pág. 445) se concluye que el volumen de la esfera A es igual al volumen del sólido B en el que se perforaron dos conos.

El volumen del sólido B puede calcularse como:

$$\pi r^2(2r) - 2(\tfrac{1}{3}\pi r^2)(r) = 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Entonces, el volumen de la esfera A con radio r también es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

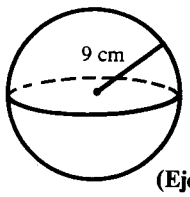
El teorema 12.13 da una fórmula para el área de una esfera.

Teorema 12.13 Dada una esfera de radio r, el área S se encuentra con la fórmula

$$S = 4\pi r^2.$$

EJERCICIOS

A.

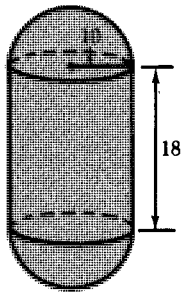


(Ejercicios 1, 2)

1. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 9 cm.
2. Encuéntrese el área de una esfera de radio 9 cm.
3. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 2π.
4. Encuéntrese el área de una esfera de radio 2π.
5. Si el área de una esfera es 36π, encuéntrese el radio.
6. Si el volumen de una esfera es 36π, encuéntrese el radio.
7. Si el área de una esfera es 8π, encuéntrese el radio.
8. Si el volumen de una esfera es $4\pi\sqrt{3}$, encuéntrese el radio.

B.

En los ejercicios 9 y 10, supóngase que el sólido de la derecha es un cilindro recto tapado con dos semiesferas.

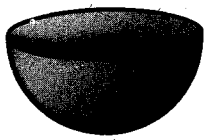


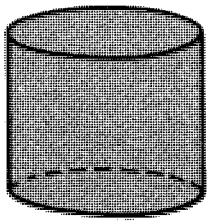
9. Encuéntrese el volumen del sólido que se muestra.
10. Encuéntrese el área del sólido que se muestra.
11. Encuéntrese el volumen de una esfera cuya área es 144π unidades cuadradas.
12. Encuéntrese el área de una esfera cuyo volumen es 36π unidades cúbicas.
13. Si el número de pies cuadrados del área de una esfera es igual al número de pies cúbicos del volumen, ¿cuál es el radio de la esfera?

ACTIVIDADES

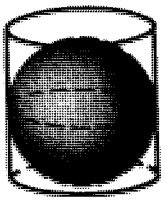
Consígase un recipiente semiesférico y otro cilíndrico; el diámetro de la base del cilindro y su altura son iguales al diámetro de la esfera.

Con arena u otro material, mídase cuántos recipientes semiesféricos se necesitan para llenar el cilindro.





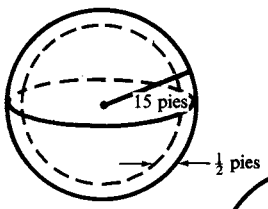
14. El radio de una esfera es el doble que el radio de otra. ¿Cuáles son las razones entre sus volúmenes y entre sus áreas?



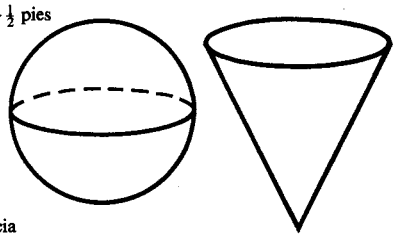
C.

15. Una esfera está inscrita en un cilindro. Muéstrese que el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro.

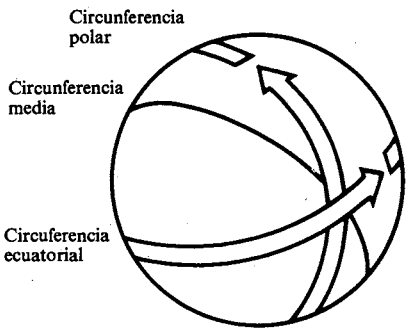
16. Un depósito esférico cuyo radio a la superficie exterior es 15 pies, está hecho de acero de $\frac{1}{2}$ pulgada de ancho. ¿Cuántos pies cúbicos de acero se usaron en la construcción del depósito?



17. Un cono tiene una altura igual al doble de su radio. Una esfera tiene un radio igual al radio de la base del cono. ¿Cuál es la relación entre el volumen del cono y el volumen de la esfera?



18. La Tierra no tiene forma esférica perfecta, sino que es un esferoide oblato. Determínese el radio promedio de la Tierra si se sabe que el radio polar es 6357 km y que el radio ecuatorial es 6378 km. Supóngase que la Tierra es una esfera perfecta y determínense su volumen y su área.

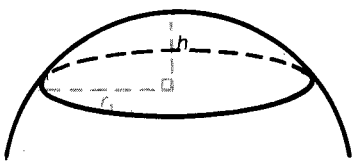


SOLUCION DE PROBLEMAS

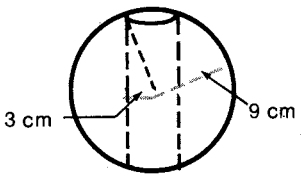
Si se corta una esfera con un plano, se obtiene una porción de ella con base circular.

Hecho: Si el radio de esta base circular es r_1 y su altura h, entonces el volumen de este casquete sólido es

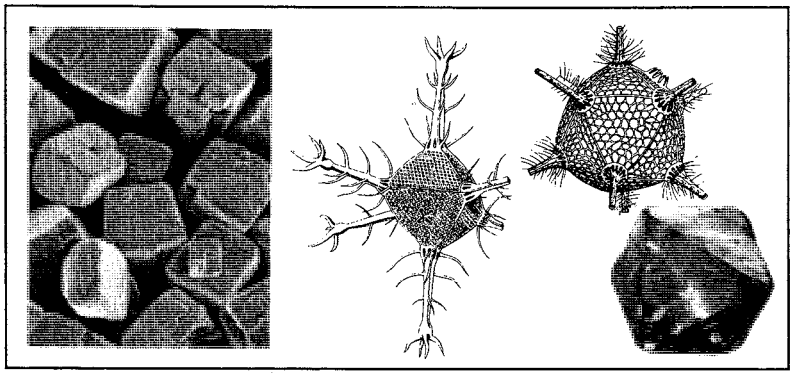
$$V = \tfrac{1}{2}\pi r_1^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3.$$



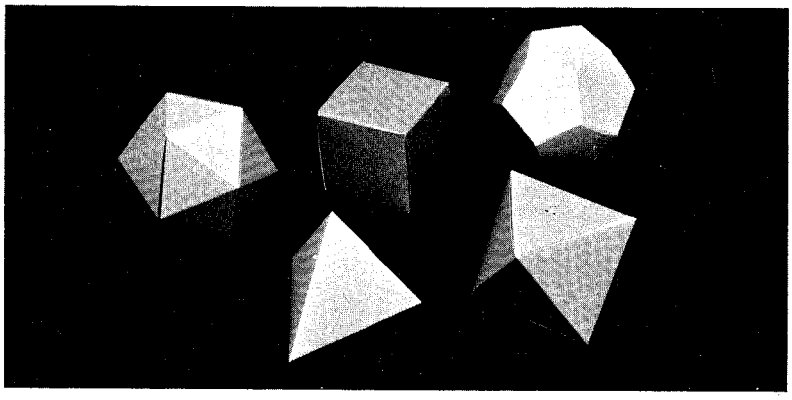
Si se perfora un agujero de 3 cm de radio en el centro de una esfera con radio 9 cm, encuéntrese el volumen de este sólido.



12.8 Poliedros regulares



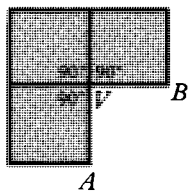
Algunos minerales y esqueletos de pequeñas criaturas marinas son modelos de los sólidos que se estudiarán en esta sección. Estos sólidos se denominan poliedros.



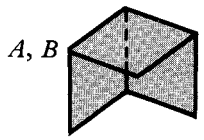
Definición 12.7

Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y cuyos vértices están rodeados, todos y cada uno, por el mismo número de caras.

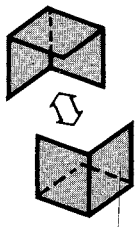
Un cubo es un ejemplo de poliedro regular. El método descrito a continuación para construir un cubo por medio de la construcción de un «tejado» es ilustrativo para el análisis del siguiente teorema.



Rodéese un vértice V con tres cuadrados.



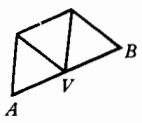
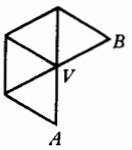
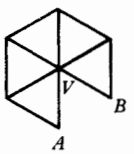
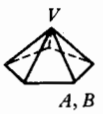
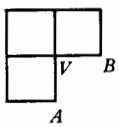
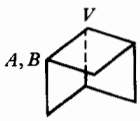
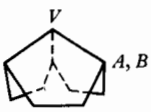
Dóblese, únanse A y B para formar un «tejado» tridimensional.



Unanse dos «tejados» para formar un cubo.

Teorema 12.14 Hay exactamente cinco poliedros regulares que son sólidos convexos.

La tabla siguiente resume los cinco poliedros regulares convexos. Sólo pueden construirse cinco tipos de «tejados» con polígonos regulares, resultando de cada uno un poliedro regular.

Cara del polígono	Número de caras en un vértice (V)	Unión de $\overline{AV}$ y $\overline{BV}$ para formar un «tejado» tridimensional	El «tejado» coincide con cada vértice de un poliedro regular completo
triangulo equilátero			tetraedro regular
triángulo equilátero			octaedro regular
triángulo equilátero			icosaedro regular
cuadrado			cubo
pentágono regular			dodecaedro regular

El prefijo que se emplea en el nombre de cada poliedro regular indica el número de caras que tiene. Esta información se resume en la siguiente tabla.

Nombre del poliedro	Prefijo y su significado	Número de caras
tetraedro	tetra-4	4
cubo (hexaedro)	hexa-6	6
octaedro	octa-8	8
dodecaedro	dodeca-12	12
icosaedro	icosa-20	20

EJERCICIOS

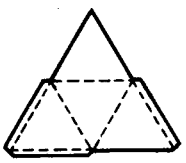
A.

1. Cítense tres poliedros regulares cuyas caras sean triángulos equiláteros.
2. ¿Qué poliedro regular tiene 20 caras?
3. ¿Por qué un hexágono regular *no puede ser* la cara de un poliedro regular?
4. ¿Por qué *no* puede haber seis caras en un vértice de un poliedro regular?
5. ¿Qué poliedro regular es una pirámide?
6. ¿Qué poliedro regular es un prisma?

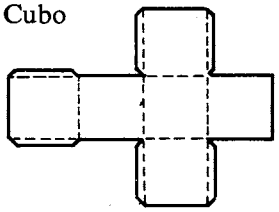
B.

Empléese cartulina para construir un modelo de cada poliedro regular. Los modelos que se muestran a continuación deben ampliarse. Córtese por las líneas continuas y dóblese por las de puntos.

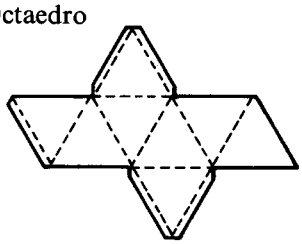
7. Tetraedro



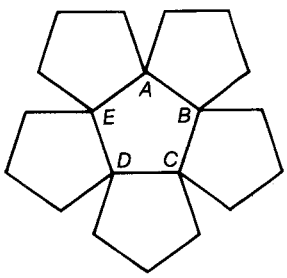
8. Cubo



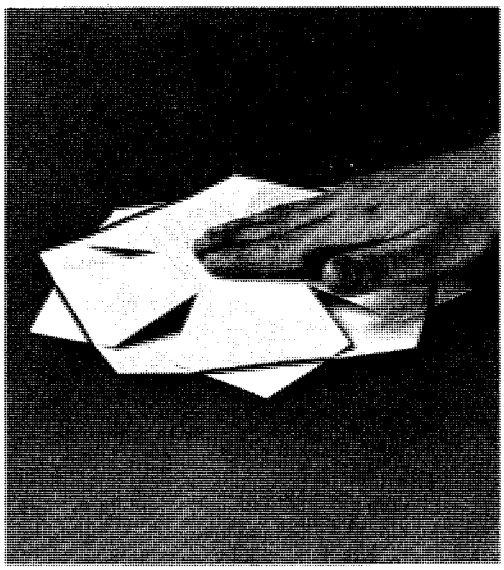
9. Octaedro



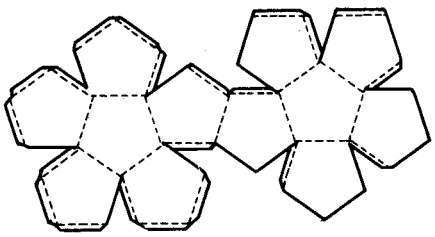
ACTIVIDADES



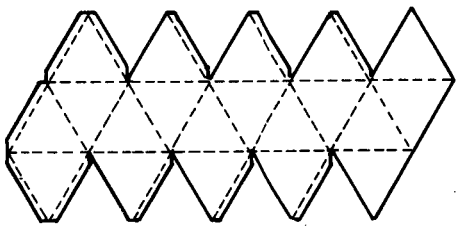
1. Recórtense en cartulina dos modelos grandes como el que se muestra arriba.
2. Hágase un doblez a lo largo de *ABCDE*.
3. Colóquese un modelo sobre el otro girando 36°. Sin soltarlos, pásese una cinta elástica alternativamente por arriba y por abajo de cada esquina.
4. Al levantar la mano, se verá un dodecaedro.



10. Dodecaedro



11. Icosaedro



C.

El número de caras (F), el número de aristas (E) y el número de vértices (V) de un poliedro satisfacen una de las fórmulas que aparecen a continuación.

12. ¿Qué fórmula corresponde a un tetraedro regular? ¿Qué fórmula corresponde a un octaedro regular?

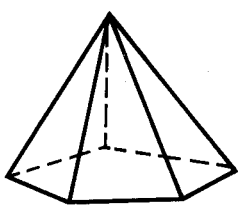
a. $F + E + V = 26$. **b.** $F - V + E = 10$.

c. $F - E + V = 2$. **d.** $F - E + V = 0$.

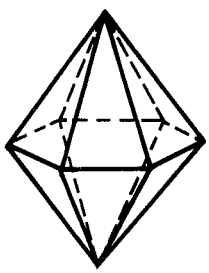
La respuesta correcta a este ejercicio se llama *fórmula de Euler.*

¿Para cuáles de estos poliedros es válida la fórmula de Euler?

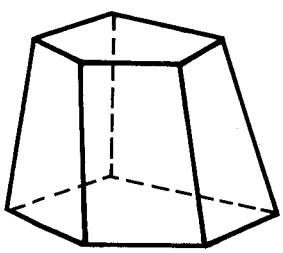
13.



14.



15.



SOLUCION DE PROBLEMAS

Sean: F el número de caras de un poliedro, E el número de aristas de un poliedro y V el número de vértices de un poliedro. $F \times$ (número de aristas por cara) $= 2E$, porque cada arista de un poliedro es la arista de dos caras.

1. ¿Cuántas aristas tiene un octaedro regular?
2. ¿Cuántas aristas tiene un dodecaedro regular?
3. ¿Cuántas aristas tiene un icosaedro regular?
4. En un dodecaedro regular, $F \times$ (número de vértices/cara) $= 3V$, porque cada vértice de un dodecaedro regular es el vértice de tres caras. ¿Cuántos vértices tiene un dodecaedro regular?

Capítulo 12 Conceptos importantes

Términos

Poliedro (pág. 650)
Pirámide (pág. 650)
Prisma (pág. 651)
Sólido rectangular (pág. 660)
Sección transversal (pág. 661)
Cilindro circular (pág. 668)
Cono circular recto (pág. 672)
Esfera (pág. 676)
Poliedro regular (pág. 680)

Postulados

Postulado del volumen (pág. 660)
Postulado del volumen de un sólido rectangular (pág. 660)
Postulado de la suma de volúmenes (pág. 661)
Postulado de Cavalieri (pág. 661)

Teoremas

12.1 Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.

12.2 Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es h y las bases tienen un área B y un perímetro p, entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = hp + 2B$.

12.3 Dada una pirámide regular con altura inclinada ℓ y una base con área B y perímetro p, el área S se encuentra con la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell p + B$.

12.4 El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la altura por el área de la base.

12.5 Dada una pirámide con base B y altura h, si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice a la sección transversal es K, entonces

$$\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \left(\frac{K}{h}\right)^2.$$

12.6 Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área, tienen el mismo volumen.

12.7 Dada una pirámide de altura h y área de la base B, el volumen se encuentra con la fórmula $V = \frac{1}{3}hB$.

12.8 Dado un cilindro circular recto con altura h, si la circunferencia de la base es C y el área de la base es B, el área se encuentra con la fórmula $S = Ch + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

12.9 Dado un cilindro circular recto con área de la base B y altura h, el volumen se encuentra con la fórmula $V = Bh = \pi r^2 h$.

12.10 Dado un cono circular recto con altura inclinada ℓ, si la circunferencia de la base es C y el área de la base B, entonces el área S se encuentra con la fórmula $S = \frac{1}{2}\ell C + B = \pi r\ell + \pi r^2$.

12.11 Dado un cono circular recto con altura h y área de la base B, el volumen está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

12.12 Dada una esfera de radio r, el volumen se encuentra con la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

12.13 Dada una esfera con radio r, el área S se encuentra con la fórmula $S = 4\pi r^2$.

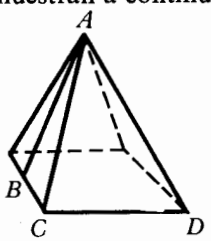
12.14 Hay exactamente cinco poliedros regulares que son sólidos convexos.

Capítulo 12 Resumen

1. Encuéntrense el área y el volumen de un cubo con aristas de 4 cm.

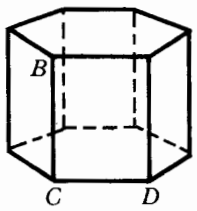
2. Encuéntrense las áreas de la pirámide y del prisma regulares que se muestran a continuación.

a.



$AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm.

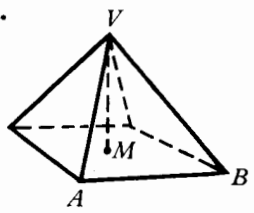
b.



$BC = 6$ cm, $CD = 2$ cm.

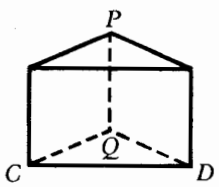
3. Encuéntrense los volúmenes de la pirámide y el prisma regulares.

a.



$VM = 8$ cm, $AB = 5$ cm.

b.



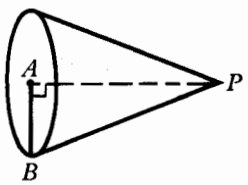
$PQ = 8$ cm, $CD = 4$ cm.

4. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel se necesitan para una etiqueta de una lata cilíndrica de 10 cm de altura y base circular de 6 cm de diámetro?

5. Encuéntrese el volumen de la lata cilíndrica del ejercicio 4.

6. El volumen de un cilindro circular recto es 160π. Si la altura es 10, ¿cuál es el diámetro de la base?

7. Encuéntrese el volumen del cono circular, donde $PA = 12$ cm y $AB = 3$ cm.



8. Si la altura de un cono circular recto se duplica, ¿cómo afecta esto al volumen?

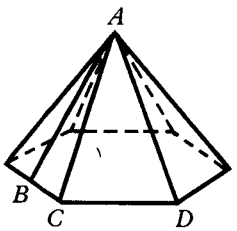
9. Una esfera tiene un volumen de 36π cm^3. ¿Cuál es su radio?

10. Encuéntrese el área de una esfera con radio 10 cm.

Capítulo 12 Examen

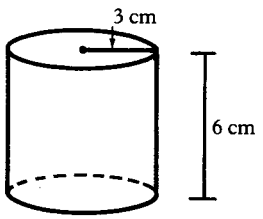
1. ¿Cuántos cubos con aristas de 2 cm pueden colocarse dentro de una caja de dimensiones 3 cm × 10 cm × 16 cm?
2. Encuétrese la diagonal de un cubo con aristas de 1 cm de longitud.
3. Encuéntrense las áreas de la pirámide regular y el cilindro circular recto siguientes.

a.



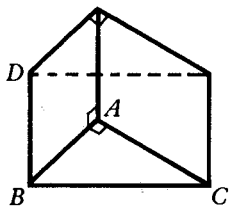
$AB = 6$ cm, $CD = 2$ cm.

b.



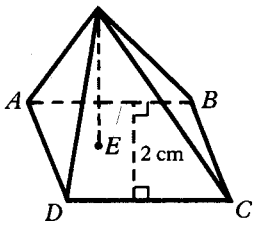
4. Encuéntrense los volúmenes del prisma y de la pirámide con base trapecial siguientes.

a.



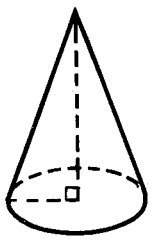
$AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BD = 12$ cm.

b.



$AB = 4$ cm, $DC = 3$ cm, $FE = 5$ cm.

5. ¿Cuántos centímetros cúbicos de líquido podrían caber en un cono circular recto si su altura es 8 cm y el radio de su base es 3 cm?
6. Encuéntrese el área de un cono circular recto si la base tiene radio 2 cm y su altura es 6 cm.
7. Encuéntrese el volumen del cono descrito en el ejercicio 6.
8. Encuéntrese el volumen de una esfera de radio 3 cm.
9. Encuéntrese el radio de una esfera si su volumen es 228π cm^3.

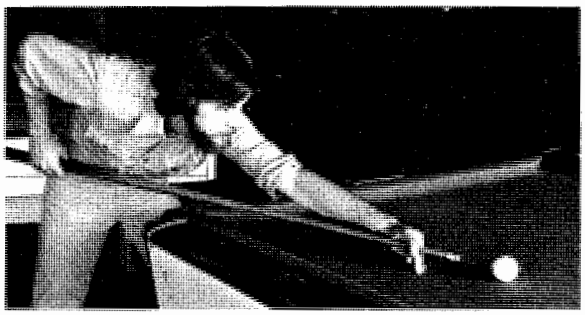


(Ejercicios 5-7)

10. ¿Cómo afecta al área de una esfera la duplicación del diámetro?
11. ¿Cómo afecta al volumen de una esfera la duplicación del radio?

Técnicas para la solución de problemas

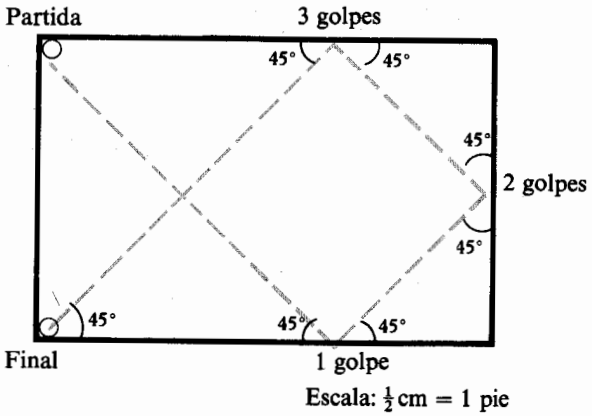
Hágase un dibujo preciso



En ocasiones, la respuesta a un problema puede encontrarse haciendo un dibujo preciso o un dibujo a escala. Estúdiese el ejemplo que se presenta a continuación, en el cual se emplea un dibujo a escala para la solución.

Ejemplo

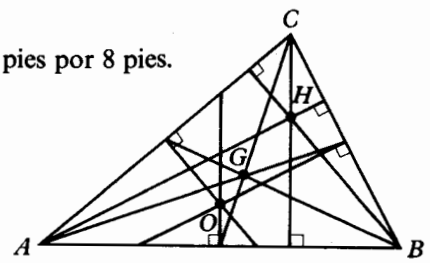
Una mesa de billar de 8 pies por 12 pies, tiene una bola en una esquina. Supóngase que se golpea la bola y que ésta se desplaza formando un ángulo de 45° con una banda de la mesa. Entonces, la bola rebota y se desplaza en otro ángulo de 45° hasta llegar a otra banda y rebotar de nuevo. ¿Cuántas veces golpeará la bola las bandas antes de llegar a una esquina? El dibujo a escala muestra que la bola golpeará tres veces.



PROBLEMAS

Empléese un dibujo preciso o uno a escala para resolver los problemas siguientes.

1. Supóngase que una bola se desplaza como se describió en el ejemplo anterior, pero en una mesa de 8 pies por 10 pies. ¿Cuántas veces golpeará la bola las bandas antes de llegar a una esquina?
2. Respóndase a la misma pregunta para una mesa de 6 pies por 8 pies.
3. O es la intersección de las bisectrices perpendiculares de los lados de $\triangle ABC$, G es la intersección de las medianas y H es la intersección de las alturas. Obsérvese que O, G y H son colineales. ¿Qué fracción de OH es OG? Inténtese con varios triángulos.



4. Un piloto de una avioneta mantiene una velocidad constante de 120 m.p.h. Viaja hacia el norte 30 minutos y hacia el noreste 10 minutos, luego hacia el sureste 45 minutos y, finalmente, hacia el suroeste 30 minutos. Una vez en ese lugar, ¿cuánto tiempo tendrá que volar para volver directamente a su punto de partida?

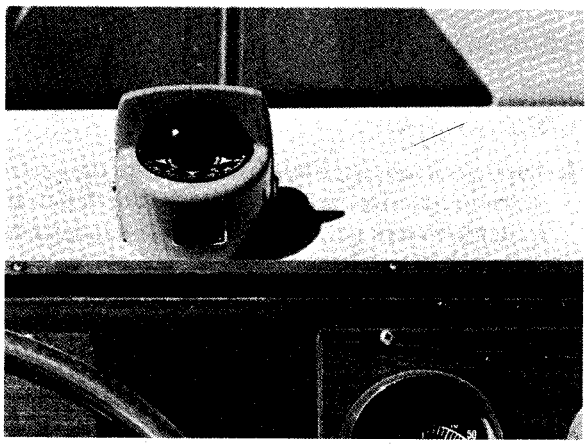
LA GEOMETRIA EN NUESTRO MUNDO

Navegación

Viajar en un barco de recreo puede resultar una forma audaz de conocer el mundo. Pero alguien de a bordo tiene que saber navegar.

En términos generales, navegar significa saber encontrar el camino para ir de un lado a otro y saber dónde se está en cada momento. Un piloto náutico debe conocer siempre la ubicación de la nave, la dirección en que viaja y la distancia recorrida.

Dos instrumentos necesarios para un navegante son la brújula y las cartas náuticas. Las cartas náuticas son mapas a escala de las zonas marinas y contienen información sobre la profundidad de las aguas, la ubicación de puertos y señales, y toda clase de peligros para la navegación de la zona.



Dos técnicas de navegación

1 Determinación de la posición de un barco observando un objeto.

Para determinar la posición de un barco, a veces es útil encontrar la distancia D del barco a un objeto observado. (Fig. 1).

Mientras el barco navega en la dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$, se observa el faro desde P_1. Después, cuando el ángulo visual se ha duplicado, la observación se hace desde P_2. La distancia, d, que recorre el barco de P_1 a P_2 se calcula por medio de la velocidad y el tiempo. La distancia buscada D es igual a d.

¿Por qué es cierto esto? ¿Qué teorema o teoremas se emplearon?

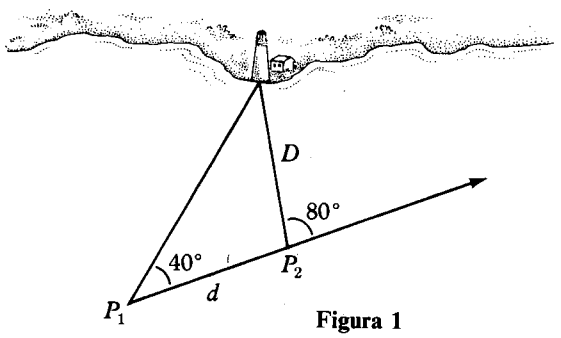
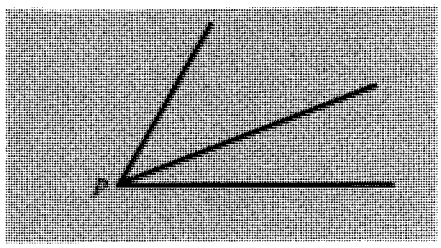
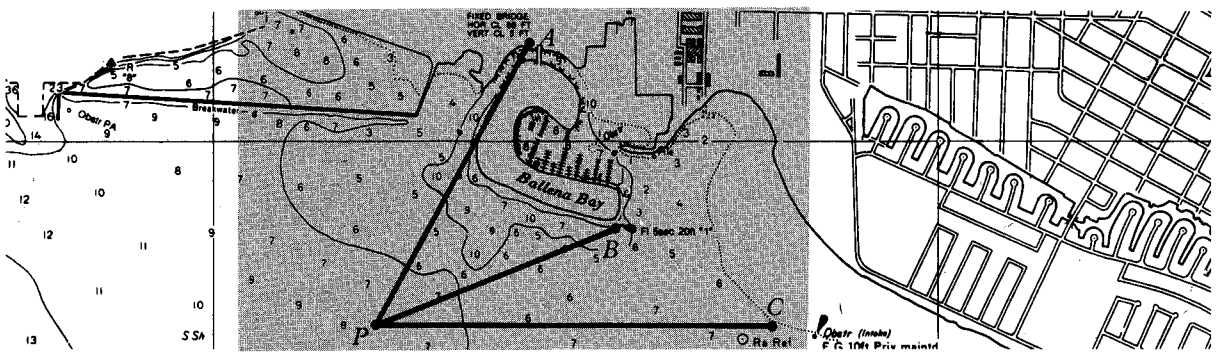


Figura 1

2 Determinación de la posición de un barco observando tres objetos.

Para determinar la posición de un barco, un piloto observa tres objetos reales representados por A, B y C en una carta náutica (Fig. 2). Entonces, el piloto mide los ángulos entre las líneas de visión. Las líneas que parten del punto P y muestran estos ángulos, se dibujan en una hoja de plástico rojo. Al colocar la hoja de plástico sobre la carta, de forma que las rectas pasen por A, B y C, la posición del barco está indicada por el punto P.

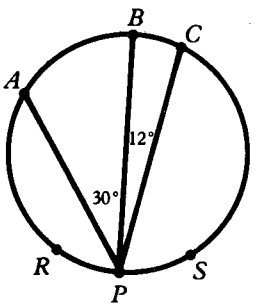




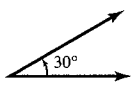
U.S. Dept. of Commerce

Figura 2

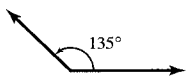
Sin embargo, el método que se acaba de describir no funcionará cuando P está en un círculo que contenga a A, B y C. En esta figura, por ejemplo, el barco podría estar en el círculo en la posición R, en la S o en otra. ¿Qué teorema puede usarse para demostrar que esto es verdad?



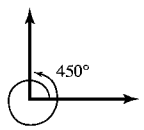
1.



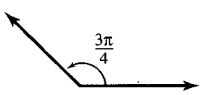
3.



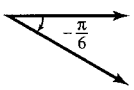
5.



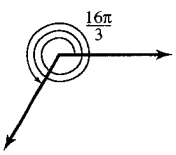
7.



9.



11.



13. $\frac{\pi}{6}$ **15.** $\frac{4\pi}{3}$ **17.** $\frac{-\pi}{3}$ **19.** π **21.** $\frac{3\pi}{4}$ **23.** 60° **25.** −225° **27.** 90° **29.** 15° **31.** 120° **33.** 5 m **35.** 6 pies **37.** 0.6 radián

39. $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ pulgadas. **41.** 0.30 **43.** −0.70 **45.** 2.18 **47.** 5.93 **49.** 179.91° **51.** 587.28° **53.** 114.59° **55.** 362.11° **57.** 40.17° **59.** 1.03°

61. 9.15° **63.** 40°19′12″ **65.** 18°15′18″ **67.** 19°59′24″ **69.** $3\pi \approx 9.4248$ pulgadas.; $5\pi \approx 15.7080$ pulgadas. **71.** $\omega = \frac{1}{60}$ radián/s; $v = \frac{1}{12}$ cm/s

73. 452.5 rpm **75.** 37.7 pulgadas. **77.** 2292 mph **79.** $\frac{3}{4}$ rpm **81.** 2.86 mph **83.** 1.152 millas **85.** 1037 mph

1. sen $\theta = \frac{4}{5}$, cos $\theta = -\frac{3}{5}$, tan $\theta = -\frac{4}{3}$, csc $\theta = \frac{5}{4}$, sec $\theta = -\frac{5}{3}$, cot $\theta = -\frac{3}{4}$

3. sen $\theta = -3\sqrt{13}/13$, cos $\theta = 2\sqrt{13}/13$, tan $\theta = -\frac{3}{2}$, csc $\theta = -\sqrt{13}/3$, sec $\theta = \sqrt{13}/2$, cot $\theta = -\frac{2}{3}$

5. sen $\theta = -\sqrt{2}/2$, cos $\theta = -\sqrt{2}/2$, tan $\theta = 1$, csc $\theta = -\sqrt{2}$, sec $\theta = -\sqrt{2}$, cot $\theta = 1$

7. sen $\theta = -2\sqrt{13}/13$, cos $\theta = -3\sqrt{13}/13$, tan $\theta = \frac{2}{3}$, csc $\theta = -\sqrt{13}/2$, sec $\theta = -\sqrt{13}/3$, cot $\theta = \frac{3}{2}$

9. sen $\theta = -\frac{3}{5}$, cos $\theta = \frac{4}{5}$, tan $\theta = -\frac{3}{4}$, csc $\theta = -\frac{5}{3}$, sec $\theta = \frac{5}{4}$, cot $\theta = -\frac{4}{3}$

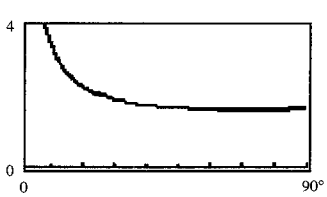
11. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$ **13.** 2 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $\sqrt{6}$ **19.** 4 **21.** 0 **23.** 0 **25.** $2\sqrt{2}+4\sqrt{3}/3$ **27.** -1 **29.** 1
31. $\operatorname{sen}(2\pi/3)=\sqrt{3}/2$, $\cos(2\pi/3)=-\frac{1}{2}$, $\tan(2\pi/3)=-\sqrt{3}$, $\csc(2\pi/3)=2\sqrt{3}/3$, $\sec(2\pi/3)=-2$, $\cot(2\pi/3)=-\sqrt{3}/3$
33. $\operatorname{sen}150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\sqrt{3}/2$, $\tan 150°=-\sqrt{3}/3$, $\csc 150°=2$, $\sec 150°=-2\sqrt{3}/3$, $\cot 150°=-\sqrt{3}$
35. $\operatorname{sen}(-\pi/6)=-\frac{1}{2}$, $\cos(-\pi/6)=\sqrt{3}/2$, $\tan(-\pi/6)=-\sqrt{3}/3$, $\csc(-\pi/6)=-2$, $\sec(-\pi/6)=2\sqrt{3}/3$, $\cot(-\pi/6)=-\sqrt{3}$
37. $\operatorname{sen}225°=-\sqrt{2}/2$, $\cos 225°=-\sqrt{2}/2$, $\tan 225°=1$, $\csc 225°=-\sqrt{2}$, $\sec 225°=-\sqrt{2}$, $\cot 225°=1$
39. $\operatorname{sen}(5\pi/2)=1$, $\cos(5\pi/2)=0$, $\tan(5\pi/2)$ no está definida, $\csc(5\pi/2)=1$, $\sec(5\pi/2)$ no está definida, $\cot(5\pi/2)=0$
41. $\operatorname{sen}(-180°)=0$, $\cos(-180°)=-1$, $\tan(-180°)=0$, $\csc(-180°)$ no está definida, $\sec(-180°)=-1$, $\cot(-180°)$ no está definida
43. $\operatorname{sen}(3\pi/2)=-1$, $\cos(3\pi/2)=0$, $\tan(3\pi/2)$ no está definida, $\csc(3\pi/2)=-1$, $\sec(3\pi/2)$ no está defindia, $\cot(3\pi/2)=0$
45. $\operatorname{sen}450°=1$, $\cos 450°=0$, $\tan 450°$ no está definida, $\csc 450°=1$, $\sec 450°$ no está definida, $\cot 450°=0$ **47.** 0.47
49. 0.38 **51.** 1.33 **53.** 0.36 **55.** 0.31 **57.** 3.73 **59.** 1.04 **61.** 5.67 **63.** 0.84 **65.** 0.02 **67.** 0.93
69. 0.31 **71.** $\sqrt{3}/2$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** $\frac{3}{4}$ **77.** $\sqrt{3}/2$ **79.** $\sqrt{3}$ **81.** $\sqrt{3}/4$ **83.** 0 **85.** -0.1 **87.** 3 **89.** 5
91. $R\approx 310.56$ pies, $H\approx 77.64$ pies **93.** $R\approx 19{,}542$ m, $H\approx 2278$ m **95.** **(a)** 1.2 sec **(b)** 1.12 sec **(c)** 1.2 sec
97. **(a)** 1.9 h **(b)** 1.69 h **(c)** 1.63 h **(d)** 1.67 h **99.** 16.56 pies

Ejercicio 5.3

1. $\sqrt{2}/2$ **3.** 1 **5.** 1 **7.** $\sqrt{3}$ **9.** $\sqrt{2}/2$ **11.** 0 **13.** $\sqrt{2}$ **15.** $\sqrt{3}/3$ **17.** II **19.** IV **21.** IV **23.** II
25. $\tan\theta=2$, $\cot\theta=\frac{1}{2}$, $\sec\theta=\sqrt{5}$, $\csc\theta=\sqrt{5}/2$ **27.** $\tan\theta=\sqrt{3}/3$, $\cot\theta=\sqrt{3}$, $\sec\theta=2\sqrt{3}/3$, $\csc\theta=2$
29. $\tan\theta=-\sqrt{2}/4$, $\cot\theta=-2\sqrt{2}$, $\sec\theta=3\sqrt{2}/4$, $\csc\theta=-3$
31. $\tan\theta=0.2679$, $\cot\theta=3.7322$, $\sec\theta=1.0353$, $\csc\theta=3.8640$
33. $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$, $\csc\theta=\frac{13}{12}$, $\sec\theta=-\frac{13}{5}$, $\cot\theta=-\frac{5}{12}$
35. $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\csc\theta=-\frac{5}{3}$, $\sec\theta=-\frac{5}{4}$, $\cot\theta=\frac{4}{3}$
37. $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$, $\cot\theta=-\frac{12}{5}$, $\sec\theta=-\frac{13}{12}$, $\csc\theta=\frac{13}{5}$
39. $\operatorname{sen}\theta=2\sqrt{2}/3$, $\tan\theta=-2\sqrt{2}$, $\cot\theta=-\sqrt{2}/4$, $\sec\theta=-3$, $\csc\theta=3\sqrt{2}/4$
41. $\cos\theta=-\sqrt{5}/3$, $\tan\theta=-2\sqrt{5}/5$, $\cot\theta=-\sqrt{5}/2$, $\sec\theta=-3\sqrt{5}/5$, $\csc\theta=\frac{3}{2}$
43. $\operatorname{sen}\theta=-\sqrt{3}/2$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$, $\cot\theta=-\sqrt{3}/3$, $\csc\theta=-2\sqrt{3}/3$
45. $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\cot\theta=\frac{4}{3}$, $\sec\theta=-\frac{5}{4}$, $\csc\theta=-\frac{5}{3}$
47. $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{10}/10$, $\cos\theta=-3\sqrt{10}/10$, $\cot\theta=-3$, $\sec\theta=-\sqrt{10}/3$, $\csc\theta=\sqrt{10}$ **49.** $-\sqrt{3}/2$ **51.** $-\sqrt{3}/3$ **53.** 2
55. -1 **57.** -1 **59.** $\sqrt{2}/2$ **61.** 0 **63.** $-\sqrt{2}$ **65.** $2\sqrt{3}/3$ **67.** -1 **69.** -2 **71.** $1-\sqrt{2}/2$ **73.** 1 **75.** 1 **77.** 0 **79.** 0.9 **81.** 9
83. 15.8 minutos **85.** En los múltiplos impares de $\pi/2$ **87.** En los múltiplos impares de $\pi/2$ **89.** 0
91. Sea $P=(x, y)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Considere la ecuación $\tan\theta=y/x=a$. Entonces $y=ax$. Pero $x^2+y^2=1$ de modo que $x^2+a^2x^2=1$. Si, $x=\pm 1/\sqrt{1+a^2}$ y $y=\pm a/\sqrt{1+a^2}$; esto es, para cualquier número real a, hay un punto $P=(x, y)$ sobre el círculo unitario para el que $\tan\theta=a$. En otras palabras, $-\infty<\tan\theta<\infty$, y el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.
93. Suponga que existe un número p, $0<p<2\pi$, para el que $\operatorname{sen}(\theta+p)=\operatorname{sen}\theta$ para toda θ. Si $\theta=0$, entonces $\operatorname{sen}(0+p)=\operatorname{sen}p=\operatorname{sen}0=0$; de modo que $p=\pi$. Si $\theta=\pi/2$, entonces $\operatorname{sen}(\pi/2+p)=\operatorname{sen}(\pi/2)$. Pero $p=\pi$. Así, $\operatorname{sen}(3\pi/2)=-1=\operatorname{sen}(\pi/2)=1$. Esto es imposible. El número positivo más pequeño p para el que $\operatorname{sen}(\theta+p)=\operatorname{sen}\theta$ para toda θ por lo tanto $p=2\pi$.
95. $\sec\theta=1/(\cos\theta)$; ya que $\cos\theta$ tiene periodo 2π, así también $\sec\theta$
97. Si $P=(a, b)$ es el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ, entonces $Q=(-a, -b)$ es el punto sobre el círculo unitario que corresponde a $\theta+\pi$. Así, $\tan(\theta+\pi)=(-b)/(-a)=b/a=\tan\theta$; esto es, el periodo de la función tangente es π.
99. Sea $P=(a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Entonces $\csc\theta=1/b=1/(\operatorname{sen}\theta)$; $\sec\theta=1/a=1/(\cos\theta)$; $\cot\theta=a/b=1/(b/a)=1/(\tan\theta)$.
101. $(\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2+(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2+\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi+\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\phi)+\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

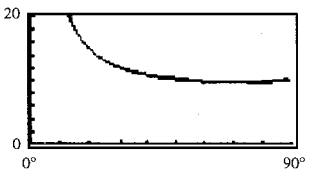
Ejercicio 5.4

1. $\operatorname{sen}\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=\frac{12}{13}$, $\tan\theta=\frac{5}{12}$, $\csc\theta=\frac{13}{5}$, $\sec\theta=\frac{13}{12}$, $\cot\theta=\frac{12}{5}$
3. $\operatorname{sen}\theta=2\sqrt{13}/13$, $\cos\theta=3\sqrt{13}/13$, $\tan\theta=\frac{2}{3}$, $\csc\theta=\sqrt{13}/2$, $\sec\theta=\sqrt{13}/3$, $\cot\theta=\frac{3}{2}$
5. $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{3}/2$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$, $\csc\theta=2\sqrt{3}/3$, $\sec\theta=2$, $\cot\theta=\sqrt{3}/3$
7. $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{6}/3$, $\cos\theta=\sqrt{3}/3$, $\tan\theta=\sqrt{2}$, $\csc\theta=\sqrt{6}/2$, $\sec\theta=\sqrt{3}$, $\cot\theta=\sqrt{2}/2$
9. $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{5}/5$, $\cos\theta=2\sqrt{5}/5$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$, $\csc\theta=\sqrt{5}$, $\sec\theta=\sqrt{5}/2$, $\cot\theta=2$ **11.** 30° **13.** 60° **15.** 30° **17.** $\pi/4$ **19.** $\pi/3$
21. 45° **23.** $\pi/3$ **25.** 60° **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** $\sqrt{2}/2$ **31.** -2 **33.** $-\sqrt{3}$ **35.** $\sqrt{2}/2$ **37.** $\sqrt{3}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** $-\sqrt{3}/2$ **43.** $-\sqrt{3}$ **45.** $\sqrt{2}$
47. 0 **49.** 1 **51.** 0 **53.** 0 **55.** 1 **57.** **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** $\frac{8}{9}$ **(c)** 3 **(d)** 3 **59.** **(a)** 17 **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** 4 **(d)** $\frac{17}{16}$
61. **(a)** $\frac{1}{4}$ **(b)** 15 **(c)** 4 **(d)** $\frac{16}{15}$ **63.** 0.6 **65.** 0 **67.** 20°
69. **(a)** $T(\theta)=1+\dfrac{2}{3\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{1}{4\tan\theta}$ **(b)** $\theta=67.97°$ para el menor tiempo; el menor tiempo es $T=1.62$ horas. Sally está en el camino durante 0.9 horas.



71. **(a)** 10 min **(b)** 20 min **(c)** $T(\theta) = 5\left(1 - \dfrac{1}{3\tan\theta} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ **(d)** 10.4 min

(e) T es menor para $\theta = 70.5°$; el menor tiempo es 9.7 min; $x = 177$ pies



75.

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
sen θ	0.4794	0.3894	0.1987	0.0998	0.0100	0.0010	0.0001	0.00001
$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$	0.9589	0.9735	0.9933	0.9983	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ se aproxima a 1 cuando θ se aproxima a 0

77. **(a)** $|OA| = |OC| = 1$; Ángulo OAC + Ángulo OAC + 180° − θ = 180°; Ángulo $OAC = \theta/2$

(b) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{|CD|}{|OC|} = |CD|$; $\cos\theta = \dfrac{|OD|}{|OC|} = |OD|$ (c) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{|CD|}{|AD|} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + |OD|} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

79. $h = x\tan\theta$ y $h = (1 - x)\tan n\theta$; así, $x\tan\theta = (1 - x)\tan n\theta$ y $x = \dfrac{\tan n\theta}{\tan\theta + \tan n\theta}$

81. **(a)** Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}|OC||AC| = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{|OC|}{1}\cdot\dfrac{|AC|}{1} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(b) Área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|BC||OC| - \frac{1}{2}|OB|^2\dfrac{|BC|}{|OB|}\cdot\dfrac{|OC|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

(c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|BD||OA| = \frac{1}{2}|OB|\dfrac{|BD|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ **(d)** $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{|OC|/1}{|OC|/|OB|} = |OB|$

(e) Utilice la sugerencia y los resultados de las partes de la (a) a la (d).

83. $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha = \cos\beta\tan\beta = \operatorname{sen}\beta$; $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, Así,

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \tan^2\beta = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}^4\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha + 1 = 0$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Ejercicio 5.5

1. $a \approx 13.74$, $c \approx 14.62$, $\alpha = 70°$ **3.** $b \approx 5.03$, $c \approx 7.83$, $\alpha = 50°$ **5.** $a \approx 0.705$, $c \approx 4.06$, $\beta = 80°$ **7.** $b \approx 10.72$, $c \approx 11.83$, $\beta = 65°$
9. $b \approx 3.08$, $a \approx 8.46$, $\alpha = 70°$ **11.** $c \approx 5.83$, $a \approx 59.0°$, $\beta \approx 31.0°$ **13.** $b \approx 4.58$, $\alpha \approx 23.6°$, $\beta \approx 66.4°$ **15.** 1.72 pulgadas., 2.46 pulgadas
17. 6.10 pulgadas o 8.72 pulgadas. **19.** 23.6° y 66.4° **21.** 70 pies **23.** 985.9 pies **25.** 137 m **27.** 20.67 pies **29.** 449.36 pies **31.** 80.5° **33.** 30 pies
35. 530 pies **37.** 555 pies **39.** **(a)** 112 pies/seg 76.3 mph **(b)** 82.4 pies/seg 56.2 mph **(c)** menores a 18.8° **41.** **(a)** 130° **(b)** 103.4° **43.** 14.9°
45. **(a)** 3.1 mi. **(b)** 3.2 mi **(c)** 3.8 mi

47. **(a)** $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3960}{3960 + \mathrm{h}}$ **(b)** $\mathrm{d} = 3960\,\theta$ **(c)** $\cos\dfrac{\mathrm{d}}{7920} = \dfrac{3960}{3960 + \mathrm{h}}$ **(d)** 206 mi **(e)** 2990 millas

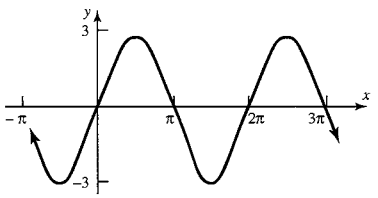
1. ángulo; lado inicial; lado terminal **2.** radianes **3.** π **4.** complementario **5.** coseno **6.** posición estándard **7.** 45° **8.** 2π; π

1. F **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** F

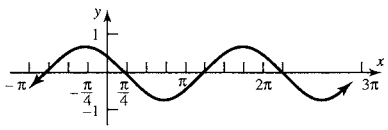
1. $3\pi/4$ **3.** $\pi/10$ **5.** 135° **7.** $-450°$ **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** $3\sqrt{2}/2 - 4\sqrt{3}/3$ **13.** $-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **15.** 3 **17.** 0 **19.** 0 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 1
27. -1 **29.** 1 **31.** $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\csc\theta = -\frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ **33.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\csc\theta = -\frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$
35. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ **37.** $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$
39. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$
41. $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{10}/10$, $\cos\theta = -3\sqrt{10}/10$, $\csc\theta = -\sqrt{10}$, $\sec\theta = -\sqrt{10}/3$, $\cot\theta = 3$
43. $\operatorname{sen}\theta = -2\sqrt{2}/3$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$, $\csc\theta = -3\sqrt{2}/4$, $\cot\theta = -\sqrt{2}/4$
45. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{5}/5$, $\cos\theta = -2\sqrt{5}/5$, $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}/2$ **47.** $\alpha = 70°$, $b \approx 3.42$, $a \approx 9.4$
49. $a \approx 4.58$, $\alpha \approx 66.4°$, $\beta \approx 23.6°$ **51.** $\pi/3$ pies **53.** 114.59 revoluciones por hora **55.** 839 pies **57.** 23.32 pies **59.** 2.15 millas

1. 0 **3.** $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ **5.** 1 **7.** 0, π, 2π **9.** sen $x = 1$ para $x = -3\pi/2$, $\pi/2$; sen $x = -1$ para $x = -\pi/2$, $3\pi/2$

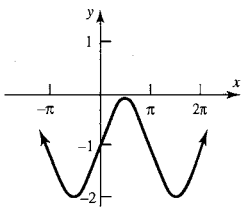
11.



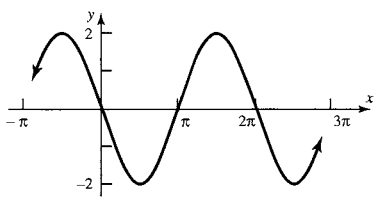
13.



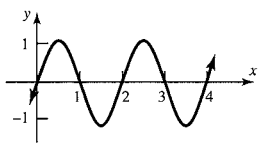
15.



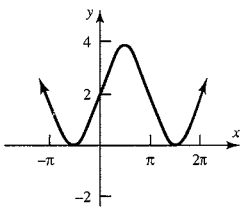
17.



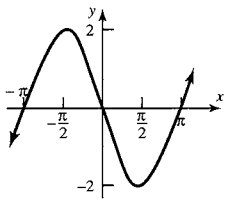
19.



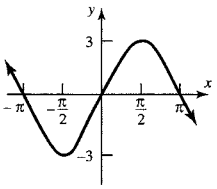
21.



23.



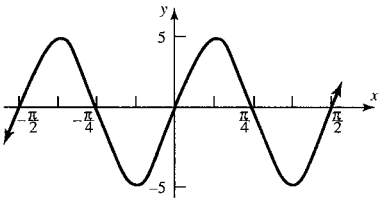
25.



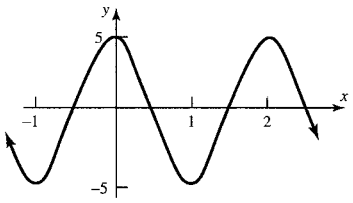
27. Las gráficas son iguales; sí **29.** $y = \operatorname{sen}\omega x$ tiene periodo $2\pi/\omega$.

1. Amplitud = 2; periodo = 2π **3.** Amplitud = 4; periodo = π **5.** Amplitud = 6; periodo = 2 **7.** Amplitud = $\frac{1}{2}$; periodo = $4\pi/3$
9. Amplitud = $\frac{5}{3}$; periodo = 3 **11.** F **13.** A **15.** H **17.** C **19.** J

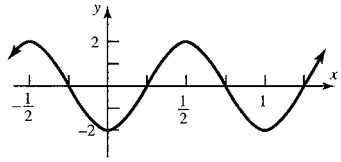
21.



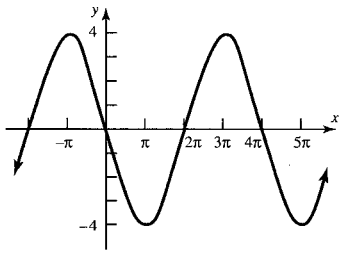
23.



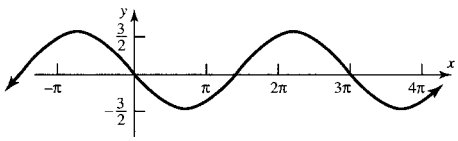
25.



27.

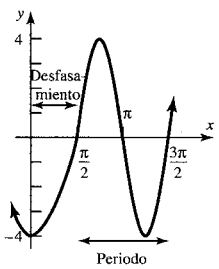


29.

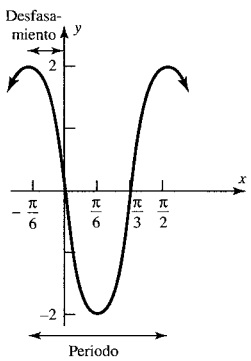


31. $y = 5\cos\frac{\pi}{4}x$ **33.** $y = -3\cos\frac{1}{2}x$ **35.** $y = \frac{3}{4}\sin 2\pi x$ **37.** $y = -\sin\frac{3}{2}x$ **39.** $y = -2\cos\frac{3\pi}{2}x$ **41.** $y = 3\sin\frac{\pi}{2}x$ **43.** $y = -4\cos 3x$

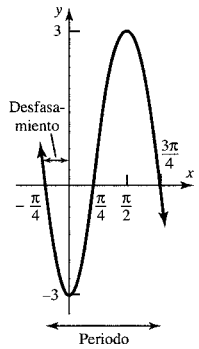
45. Amplitud = 4
Periodo = π
Desfasamiento = $\pi/2$



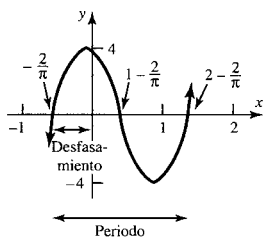
47. Amplitud = 2
Periodo = $2\pi/3$
Desfasamiento = $-\pi/6$



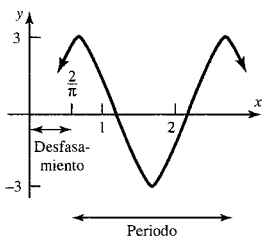
49. Amplitud = 3
Periodo = π
Desfasamiento = $-\pi/4$



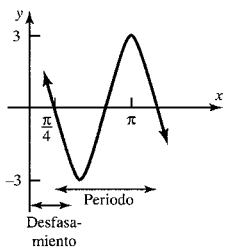
51. Amplitud = 4
Periodo = 2
Desfasamiento = $-2/\pi$



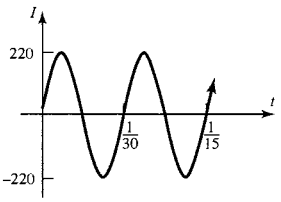
53. Amplitud = 3
Periodo = 2
Desfasamiento = $2/\pi$



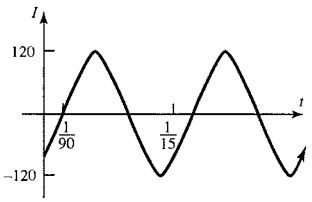
55. Amplitud = 3
Periodo = π
Desfasamiento = $\pi/4$



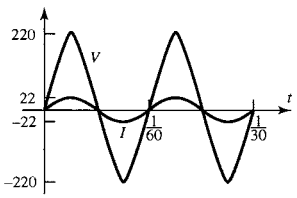
57. Periodo = $\frac{1}{30}$, amplitud = 220



59. Periodo = $\frac{1}{15}$, amplitud = 120, desfasamiento = $\frac{1}{90}$



61. **(a)** Amplitud = 220, periodo = $\frac{1}{60}$
(b) & **(e)**

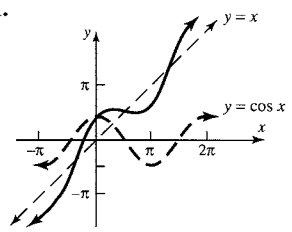


(c) $I = 22 \operatorname{sen} 120\pi t$
(d) Amplitud = 22, periodo = $\frac{1}{60}$

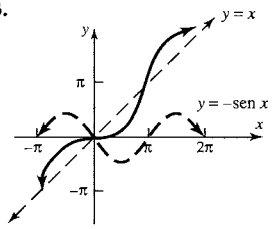
63. **(a)** $P = \dfrac{(V_0 \operatorname{sen} 2\pi ft)^2}{R} = \dfrac{{V_0}^2}{R} \operatorname{sen}^2 2\pi ft$ **(b)** $P = \dfrac{{V_0}^2}{R}\dfrac{1}{2}(1 - \cos 4\pi ft)$

Ejercicio 6.3

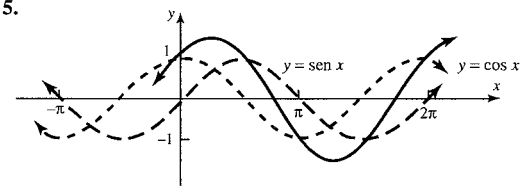
1.



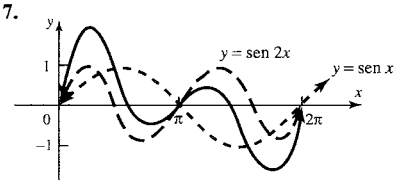
3.



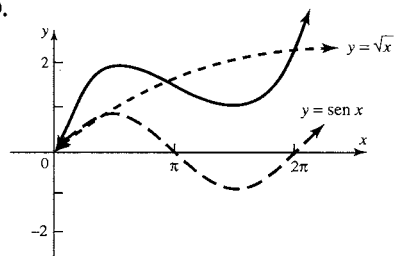
5.



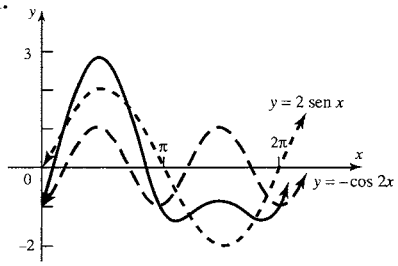
7.



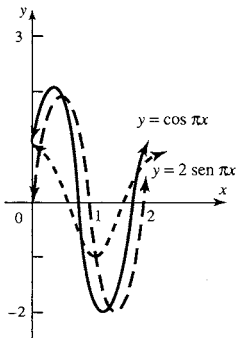
9.



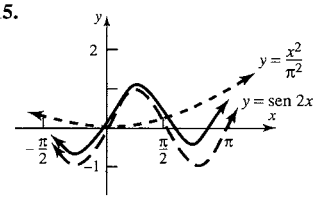
11.



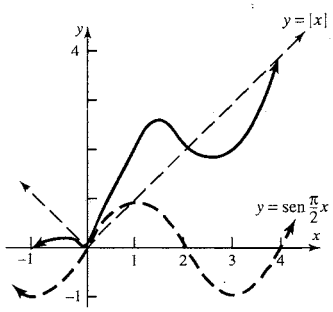
13.



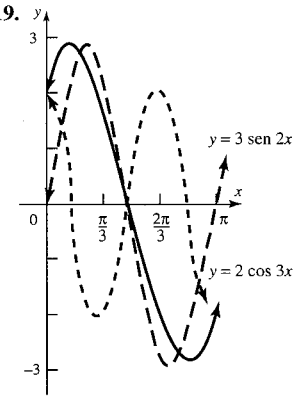
15.



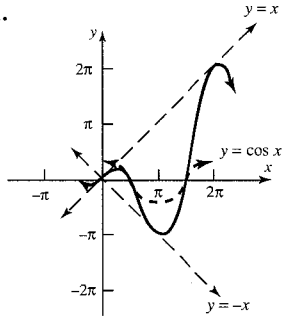
17.



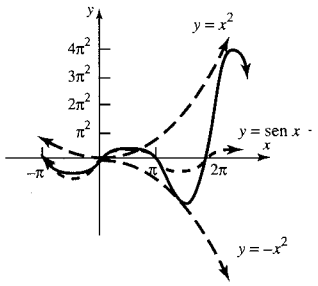
19.



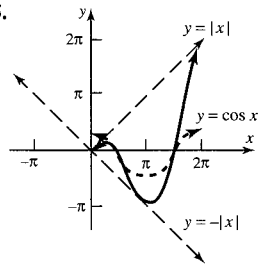
21.



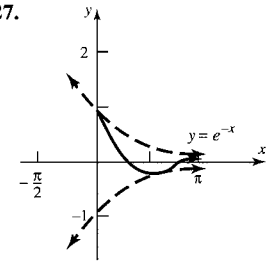
23.



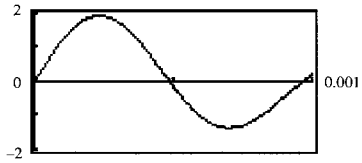
25.



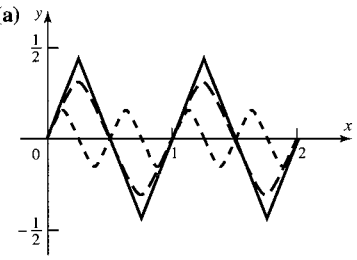
27.



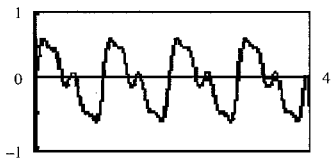
29.



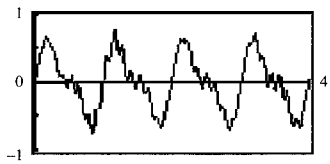
31. (a)



(b)



(c)



33. $d = 5 \cos \pi t$ **35.** $d = 6 \cos 2t$ **37.** $d = 5 \operatorname{sen} \pi t$ **39.** $d = 6 \operatorname{sen} 2t$

41. **(a)** Armónico simple **(b)** 5 cm **(c)** $2\pi/3$ segundos **(d)** $3/(2\pi)$ oscilaciones por segundo

43. **(a)** Armónico simple **(b)** 6 m **(c)** 2 segundos **(d)** $\frac{1}{2}$ oscilaciones por segundo

45. **(a)** Armónico simple **(b)** 3 m **(c)** 4π segundos **(d)** $1/(4\pi)$ oscilaciones por segundo

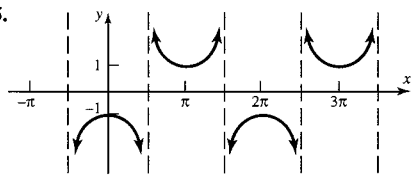
47. **(a)** Armónico simple **(b)** 2 m **(c)** 1 segundos **(d)** 1 oscilacion por segundo **49.** es cercana a 1

Ejercicios 5.4

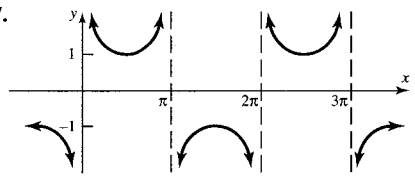
1. 0 **3.** 1 **5.** $\sec x = 1$ para $x = -2\pi, 0, 2\pi$; $\sec x = -1$ para $x = -\pi, \pi$ **7.** $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ **9.** $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ **11.** D

13. B

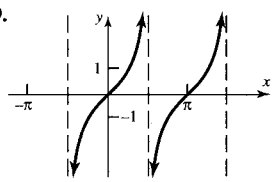
15.



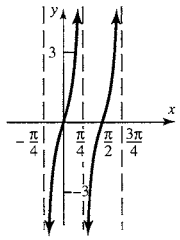
17.



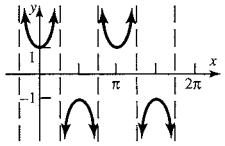
19.



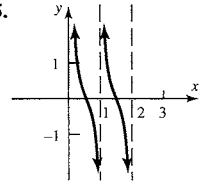
21.



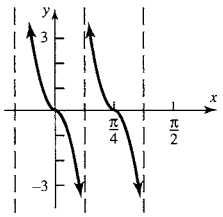
23.



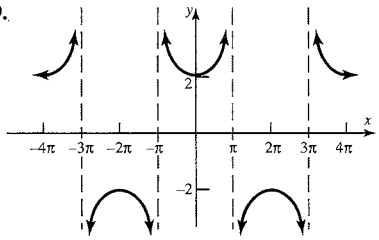
25.



27.

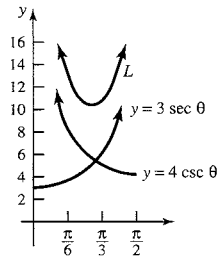


29.

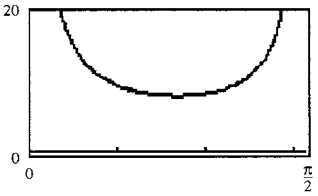


31. (a) $L = 3/\cos\theta + 4/\operatorname{sen}\theta = 3\sec\theta + 4\csc\theta$

(b)



(c)



(d) L es mínimo cuando $\theta = 0.83$, L(0.83) = 9.86 pies

Ejercicios 5.3

1. 0 **3.** $-\pi/2$ **5.** 0 **7.** $\pi/4$ **9.** $\pi/3$ **11.** $5\pi/6$ **13.** 0.10 **15.** 1.37 **17.** 0.51 **19.** −0.38 **21.** −0.12 **23.** 1.08 **25.** $\sqrt{2}/2$ **27.** $-\sqrt{3}/3$ **29.** 2 **31.** $\sqrt{2}$ **33.** $-\sqrt{2}/2$ **35.** $2\sqrt{3}/3$ **37.** $\sqrt{2}/4$ **39.** $\sqrt{5}/2$ **41.** $-\sqrt{14}/2$ **43.** $-3\sqrt{10}/10$ **45.** $\sqrt{5}$ **47.** 0.58 **49.** 0.10 **51.** 0.57 **53.** 0.43 **55.** 0.37

57. Sea $\theta = \tan^{-1} v$. Entonces $\tan\theta = v$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Ahora, $\sec\theta > 0$ y $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Así, $\sec\theta = \sec(\tan^{-1} v) = \sqrt{1 + v^2}$.

59. Sea $\theta = \cos^{-1} v$. Entonces $\cos\theta = v$, $0 \le \theta \le \pi$, y $\tan(\cos^{-1} v) = \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1-v^2}}{v}$.

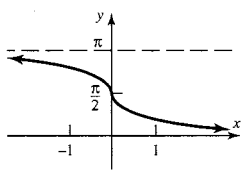
61. Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1} v$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = v$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, y $\cos(\operatorname{sen}^{-1} v) = \cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - v^2}$.

63. Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} v$ y $\beta = \cos^{-1} v$. Entonces $\operatorname{sen}\alpha = v = \cos\beta$, de modo que α y β son ángulos complementarios. Así, $\alpha + \beta = \pi/2$.

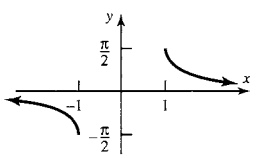
65. Sea $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{v}$. Entonces $\dfrac{1}{v} = \tan\alpha$, $\dfrac{-\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \ne 0$. Sea $\beta = \tan^{-1} v$. Entonces $v = \tan\beta$, $\dfrac{-\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\beta \ne 0$. Así, $\tan\alpha\tan\beta = 1$ de modo que $\tan\alpha = \cot\beta$. Así, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

67. 1.32 **69.** 0.46 **71.** −0.34 **73.** 2.72 **75.** −0.73 **77.** 2.55 **79.** 77.6 pulgadas **81.** $-1 \le x \le 1$ **83.** $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

85.



87.



Complete los espacios

1. $y = 3\operatorname{sen}\pi x$ **2.** 3; $\pi/3$ **3.** $y = 5x$ **4.** $-1 \le x \le 1$; $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ **5.** 0 **6.** movimiento armónico simple **7.** $y = \cos x$, $y = \sec x$ **8.** $y = \operatorname{sen} x$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \cot x$

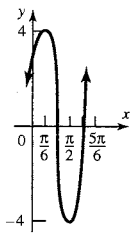
Para saber

1. C **2.** C **3.** F **4.** F **5.** C

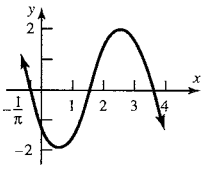
Ejercicios de revisión

1. Amplitud = 4; Periodo = 2π **3.** Amplitud = 8; Periodo = 4

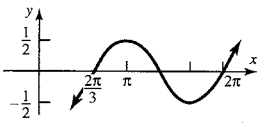
5. Amplitud = 4
Periodo = $2\pi/3$
Desfasamiento = 0



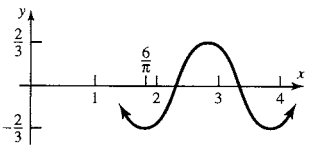
7. Amplitud = 2
Periodo = 4
Desfasamiento = $-1/\pi$



9. Amplitud = $\frac{1}{2}$
Periodo = $4\pi/3$
Desfasamiento = $2\pi/3$

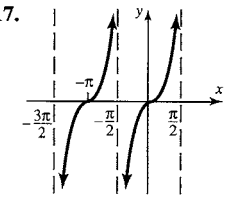


11. Amplitud = $\frac{2}{3}$
Periodo = 2
Desfasamiento = $6/\pi$

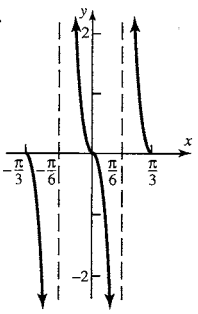


13. $y = 5\cos\frac{x}{4}$ **15.** $y = -6\cos\frac{\pi}{4}x$

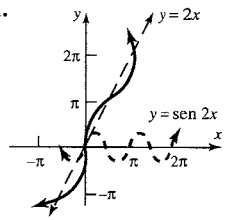
17.



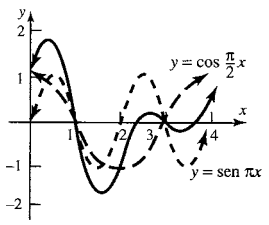
19.



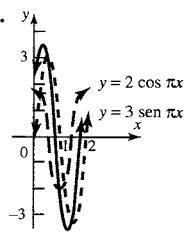
21.



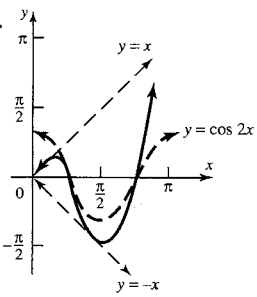
23.



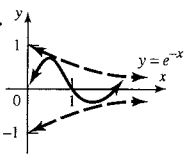
25.



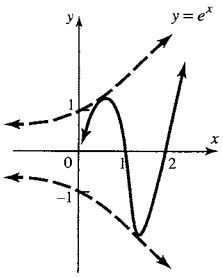
27.



29.



31.

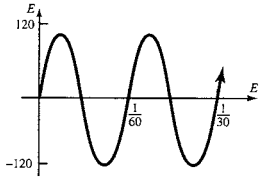


33. $\pi/2$ **35.** $\pi/4$ **37.** $5\pi/6$ **39.** $\sqrt{2}/2$ **41.** $-\sqrt{3}$ **43.** $2\sqrt{3}/3$ **45.** $\frac{3}{5}$ **47.** $-\frac{4}{3}$

49. **(a)** Armónico simple **(b)** 6 pies **(c)** π segundos **(d)** $1/\pi$ oscilaciones por segundo

51. **(a)** Armónico simple **(b)** 2 pies **(c)** 2 segundos **(d)** $\frac{1}{2}$ oscilaciones por segundo

53. **(a)** 120 **(b)** $\frac{1}{60}$ **(c)**



1. $\csc\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\cot\theta$ **3.** $1+\tan^2(-\theta)=1+(-\tan\theta)^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

5. $\cos\theta(\tan\theta+\cot\theta)=\cos\theta\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)=\cos\theta\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}=\csc\theta$

7. $\tan\theta\cot\theta-\cos^2\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\cos^2\theta=1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta$ **9.** $(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)=\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

11. $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ **13.** $\operatorname{sen}^2\theta(1+\cot^2\theta)=\operatorname{sen}^2\theta\csc^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)=1$

15. $(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2=\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1+1=2$

17. $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\sec^2\theta(\sec^2\theta-1)=(1+\tan^2\theta)\tan^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

19. $\sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

21. $3\operatorname{sen}^2\theta+4\cos^2\theta=3\operatorname{sen}^2\theta+3\cos^2\theta+\cos^2\theta=3(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\theta=3+\cos^2\theta$

23. $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=1-\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=1-(1-\operatorname{sen}\theta)=\operatorname{sen}\theta$ **25.** $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\cot\theta}}{1-\dfrac{1}{\cot\theta}}=\dfrac{\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta}}{\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta}}=\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

27. $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1/\cos\theta}{1/\operatorname{sen}\theta}+\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\tan\theta=\tan\theta+\tan\theta=2\tan\theta$ • **29.** $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\csc\theta}}{1-\dfrac{1}{\csc\theta}}=\dfrac{\dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta}}{\dfrac{\csc\theta-1}{\csc\theta}}=\dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta-1}$

31. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2-2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$

33. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{1}{1-\cot\theta}$

35. $(\sec\theta-\tan\theta)^2=\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$
$=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)^2}{(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

37. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cot\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}$
$=\dfrac{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$

39. $\tan\theta+\dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

41. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta-(\sec\theta-1)}\cdot\dfrac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta+(\sec\theta-1)}=\dfrac{\tan^2\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\tan^2\theta-(\sec^2\theta-2\sec\theta+1)}$
$=\dfrac{\sec^2\theta-1+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\sec^2\theta-1-\sec^2\theta+2\sec\theta-1}=\dfrac{2\sec^2\theta-2\sec\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{-2+2\sec\theta}$
$=\dfrac{2\sec\theta(\sec\theta-1)+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{2(\sec\theta-1)}=\dfrac{2(\sec\theta-1)(\sec\theta+\tan\theta)}{2(\sec\theta-1)}=\sec\theta+\tan\theta$

43. $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{1}=\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta$

45. $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}=\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta-(1-\operatorname{sen}^2\theta)=2\operatorname{sen}^2\theta-1$

47. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}=\tan\theta\sec\theta$

49. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{\sec^2\theta}-\dfrac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta-\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta/\cos^2\theta}{1/\cos^2\theta}=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$

51. $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}=\operatorname{sen}\theta-\cos\theta$

53. $\sec\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta\tan\theta$

55. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+1-\operatorname{sen}\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$

57. $\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

59. $\dfrac{(\sec\theta-\tan\theta)^2+1}{\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}=\dfrac{\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta+\tan^2\theta+1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}=\dfrac{2\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}=\dfrac{\dfrac{2}{\cos^2\theta}-\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}=\dfrac{2-2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

$=\dfrac{2(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$

61. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)-\cos\theta(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}=\sec\theta\csc\theta$

63. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=\dfrac{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)(\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta=1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

65. $\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\cos^2\theta$

67. $\dfrac{(2\cos^2\theta-1)^2}{\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta}=\dfrac{[2\cos^2\theta-(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)]^2}{(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=(1-\operatorname{sen}^2\theta)-\operatorname{sen}^2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$

69. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)-\cos\theta}\cdot\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}=\dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)+\cos^2\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)+(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\dfrac{2+2\operatorname{sen}\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}^2\theta}$

$=\dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

71. $(a\operatorname{sen}\theta+b\cos\theta)^2+(a\cos\theta-b\operatorname{sen}\theta)^2=a^2\operatorname{sen}^2\theta+2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta-2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta$
$=a^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=a^2+b^2$

73. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}}=(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

75. $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha)=(\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)+(\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha)$
$=2\cos^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=2\cos\beta(\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)$

77. $\ln|\sec\theta|=\ln|\cos\theta|^{-1}=-\ln|\cos\theta|$ **78.** $\ln|\operatorname{sen}\theta|-\ln|\cos\theta|=\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right|=\ln|\tan\theta|$

79. $\ln|1+\cos\theta|+\ln|1-\cos\theta|=\ln(|1+\cos\theta|\,|1-\cos\theta|)=\ln|1-\cos^2\theta|=\ln|\operatorname{sen}^2\theta|=2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

Ejercicio 7.2

1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **3.** $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ **5.** $-\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ **7.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ **9.** $-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

11. $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ **13.** $\frac{1}{2}$ **15.** 0 **17.** 1 **19.** -1 **21.** $-\sqrt{3}/2$ **23.** (a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ (b) $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (d) 2

25. (a) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$ (b) $\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{10}$ (c) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$ (d) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3}=\dfrac{25\sqrt{3}+48}{39}$

27. (a) $-\dfrac{1}{26}(5+12\sqrt{3})$ (b) $\dfrac{1}{26}(12-5\sqrt{3})$ (c) $-\dfrac{1}{26}(5-12\sqrt{3})$ (d) $\dfrac{-5+12\sqrt{3}}{12+5\sqrt{3}}=\dfrac{-240+169\sqrt{3}}{69}$

29. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=1\cdot\cos\theta+0\cdot\operatorname{sen}\theta=\cos\theta$

31. $\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\pi\cos\theta-\cos\pi\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta-(-1)\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\theta$

33. $\operatorname{sen}(\pi+\theta)=\operatorname{sen}\pi\cos\theta+\cos\pi\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta+(-1)\operatorname{sen}\theta=-\operatorname{sen}\theta$

35. $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\tan\pi-\tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}=\dfrac{0-\tan\theta}{1+0}=-\tan\theta$

37. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\cos\theta+\cos\dfrac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=(-1)\cos\theta+0\cdot\operatorname{sen}\theta=-\cos\theta$

39. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=1+\cot\alpha\tan\beta$

43. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=1-\tan\alpha\tan\beta$

45. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

47. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$

$=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$

49. $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$

$=\dfrac{\csc\alpha\csc\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}$

51. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta$

$=(\operatorname{sen}^2\alpha)(1-\operatorname{sen}^2\beta)-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

53. $\operatorname{sen}(\theta+k\pi)=\operatorname{sen}\theta\cos k\pi+\cos\theta\operatorname{sen}k\pi=(\operatorname{sen}\theta)(-1)^k+(\cos\theta)(0)=(-1)^k\cdot\operatorname{sen}\theta$, k cualquier entero

55. $\sqrt{3}/2$ **57.** $-\frac{24}{25}$ **59.** $-\frac{33}{65}$ **61.** $\frac{65}{63}$ **63.** $\frac{1}{39}(48-25\sqrt{3})$ **65.** $u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}$ **67.** $\dfrac{u\sqrt{1-v^2}-v}{\sqrt{1+u^2}}$

69. $\dfrac{uv-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{v\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{1-v^2}}$

71. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}x\cos h+\cos x\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x}{h}=\dfrac{\cos x\operatorname{sen}h-(\operatorname{sen}x)(1-\cos h)}{h}=\cos x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}-\operatorname{sen}x\cdot\dfrac{1-\cos h}{h}$

73. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u+\cos^{-1}u)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u)\cos(\cos^{-1}u)+\cos(\operatorname{sen}^{-1}u)\operatorname{sen}(\cos^{-1}u)=(u)(u)+\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-u^2}=u^2+1-u^2=1$

75. $\tan\dfrac{\pi}{2}$ no está definida; $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\cot\theta$ **77.** $\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

Ejercicio 7.3

1. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{7}{25}$ (c) $\sqrt{10}/10$ (d) $3\sqrt{10}/10$ **3.** (a) $\frac{24}{25}$ (b) $-\frac{7}{25}$ (c) $2\sqrt{5}/5$ (d) $-\sqrt{5}/5$

5. (a) $-2\sqrt{2}/3$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}}$ (d) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}}$ **7.** (a) $4\sqrt{2}/9$ (b) $-\frac{7}{9}$ (c) $\sqrt{3}/3$ (d) $\sqrt{6}/3$

9. (a) $-\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10}}$ (d) $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}}$ **11.** (a) $\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{4}{5}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{5}}$ (d) $-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{10+\sqrt{10}}{5}}$ **13.** $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

15. $1-\sqrt{2}$ **17.** $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **19.** $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **21.** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

23. $\operatorname{sen}^4\theta=(\operatorname{sen}^2\theta)^2=\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos4\theta}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos4\theta=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{8}\cos4\theta$

25. $\operatorname{sen} 4\theta = \operatorname{sen} 2(2\theta) = 2\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta = (4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)(1-2\operatorname{sen}^2\theta) = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta = (\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta)$

27. $16\operatorname{sen}^5\theta - 20\operatorname{sen}^3\theta + 5\operatorname{sen}\theta$ **29.** $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = \cos 2\theta$

31. $\cot 2\theta = \dfrac{1}{\tan 2\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \dfrac{1-\dfrac{1}{\cot^2\theta}}{2\left(\dfrac{1}{\cot\theta}\right)} = \dfrac{\dfrac{\cot^2\theta-1}{\cot^2\theta}}{\dfrac{2}{\cot\theta}} = \dfrac{\cot^2\theta-1}{\cot^2\theta}\cdot\dfrac{\cot\theta}{2} = \dfrac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}$

33. $\sec 2\theta = \dfrac{1}{\cos 2\theta} = \dfrac{1}{2\cos^2\theta - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{\sec^2\theta} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}} = \dfrac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$ **35.** $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 2(2\theta) = \cos 4\theta$

37. $\dfrac{\cos 2\theta}{1+\operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} = \dfrac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$

39. $\sec^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\cos^2(\theta/2)} = \dfrac{1}{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$

41. $\cot^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\tan^2(\theta/2)} = \dfrac{1}{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sec\theta}}{1-\dfrac{1}{\sec\theta}} = \dfrac{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta}}{\dfrac{\sec\theta-1}{\sec\theta}} = \dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta}\cdot\dfrac{\sec\theta}{\sec\theta-1} = \dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}$

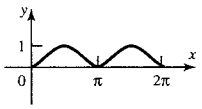
43. $\dfrac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \dfrac{1-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}{1+\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{\dfrac{1+\cos\theta-(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}}{\dfrac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{2} = \cos\theta$

45. $\dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}(3\theta-\theta)}{\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)} = \dfrac{2\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = 2$

47. $\tan 3\theta = \tan(\theta+2\theta) = \dfrac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta} = \dfrac{\tan\theta+\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\dfrac{\tan\theta(2\tan\theta)}{1-\tan^2\theta}} = \dfrac{\tan\theta-\tan^3\theta+2\tan\theta}{1-\tan^2\theta-2\tan^2\theta} = \dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

49. $\sqrt{3}/2$ **51.** $\frac{7}{25}$ **53.** $\frac{24}{7}$ **55.** $\frac{24}{25}$ **57.** $\frac{1}{5}$ **59.** $\frac{25}{7}$ **61.** 4 **63.** $-\frac{1}{4}$ **65.** $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{h}\,(\text{base}) + \frac{1}{2}\mathrm{h}\,(\text{base}) = s\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot s\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = s^2\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{1}{2}s^2\operatorname{sen}\theta$

67.



69. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; $\cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

71. $\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^3(\theta+120°) + \operatorname{sen}^3(\theta+240°) = \operatorname{sen}^3\theta + (\operatorname{sen}\theta\cos 120° + \cos\theta\operatorname{sen}120°)^3 + (\operatorname{sen}\theta\cos 240° + \cos\theta\operatorname{sen}240°)^3$

$= \operatorname{sen}^3\theta + \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3$

$= \operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{8}(3\sqrt{3}\cos^3\theta - 9\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta) - \frac{1}{8}(\operatorname{sen}^3\theta + 3\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + 3\sqrt{3}\cos^3\theta)$

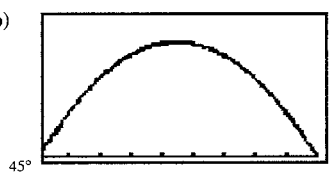
$= \frac{3}{4}\operatorname{sen}^3\theta - \frac{9}{4}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}[\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)] = \frac{3}{4}(4\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen} 3\theta$

73. $\dfrac{1}{2}(\ln|1-\cos 2\theta| - \ln 2) = \ln\left(\dfrac{|1-\cos 2\theta|}{2}\right)^{1/2} = \ln|\operatorname{sen}^2\theta|^{1/2} = \ln|\operatorname{sen}\theta|$

75. (a) $R = \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{16}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos^2\theta) = \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{16}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta - \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$

$= \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$

(b)



$\theta = 67.5°$ hace máximo a R

Ejercicios 7.4

1. $\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 6\theta)$ **3.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$ **5.** $\frac{1}{2}(\cos 8\theta + \cos 2\theta)$ **7.** $\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)$ **9.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta)$ **11.** $2\operatorname{sen}\theta\cos 3\theta$

13. $2\cos 3\theta\cos\theta$ **15.** $2\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta$ **17.** $2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta/2)$ **19.** $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta}{2\operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta} = \cos(-\theta) = \cos\theta$

21. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\cos 3\theta} = \tan 3\theta$ **23.** $\dfrac{\cos\theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta} = \dfrac{-2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}(-\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

25. $\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta) = \operatorname{sen}\theta[2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)] = 2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta(2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta[2\cdot\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)]$
$= \cos\theta(\cos\theta - \cos 3\theta)$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 6\theta\cos(-2\theta)}{2\cos 6\theta\cos(-2\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen} 6\theta}{\cos 6\theta} = \tan 6\theta$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 6\theta\cos(-2\theta)}{2\operatorname{sen}(-2\theta)\cos 6\theta} = \dfrac{\operatorname{sen} 6\theta}{\cos 6\theta}\cdot\dfrac{\cos 2\theta}{-\operatorname{sen} 2\theta} = \tan 6\theta(-\cot 2\theta) = -\dfrac{\tan 6\theta}{\tan 2\theta}$

31. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

33. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

35. $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta = (1 + \cos 6\theta) + (\cos 2\theta + \cos 4\theta) = 2\cos^2 3\theta + 2\cos 3\theta\cos(-\theta) = 2\cos 3\theta(\cos 3\theta + \cos\theta)$
$= 2\cos 3\theta(2\cos 2\theta\cos\theta) = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta$

37. $y = 2\operatorname{sen} 2061\pi t\cos 357\pi t$

39. $\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen} 2\gamma = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma$
$= 2\operatorname{sen}(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma]$
$= 2\operatorname{sen}\gamma\left(2\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right) = 4\operatorname{sen}\gamma\cos\dfrac{\pi-2\beta}{2}\cos\dfrac{2\alpha-\pi}{2} = 4\operatorname{sen}\gamma\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$
$= 4\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$

41.
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

43. $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = \cos\dfrac{2\alpha}{2} + \cos\dfrac{2\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$

Ejercicios 7.5

1. $\pi/6, 5\pi/6$ **3.** $5\pi/6, 11\pi/6$ **5.** $\pi/2, 3\pi/2$ **7.** $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$ **9.** $3\pi/4, 7\pi/4$ **11.** $4\pi/9, 8\pi/9, 16\pi/9$ **13.** $0.4115168, \pi - 0.4115168$

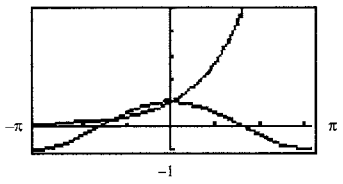
15. $1.3734008, \pi + 1.3734008$ **17.** $2.6905658, 2\pi - 2.6905658$ **19.** $1.8234766, 2\pi - 1.8234766$ **21.** $\pi/2, 2\pi/3, 4\pi/3, 3\pi/2$

23. $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$ **25.** $0, \pi/4, 5\pi/4$ **27.** $\pi/4, 5\pi/4$ **29.** $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ **31.** $\pi/2, 3\pi/2$ **33.** $0, 2\pi/3, 4\pi/3$

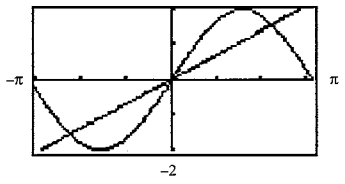
35. $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi/2, 4\pi/3, \pi, 5\pi/3, 3\pi/2$ **37.** $0, \pi/5, 2\pi/5, 3\pi/5, 4\pi/5, \pi, 6\pi/5, 7\pi/5, 8\pi/5, 9\pi/5$ **39.** $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$ **41.** $\pi/3, 5\pi/3$

43. No es una solución real **45.** No es una solución real **47.** $\pi/2, 7\pi/6$ **49.** $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$

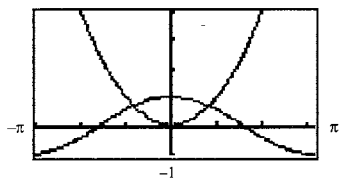
51. $-1.29, 0$



53. $-2.24, 0, 2.24$



55. $-0.82, 0.82$



57. $-1.30, 1.97, 3.83$ **59.** 0.59 **61.** 1.25 **63.** $-1.02, 1.02$ **65.** $0, 2.14$ **67.** 1.34 **69.** (a) $60°$ (b) $60°$ (c) $A(60°) = 12\sqrt{3}$ pulgadas cuadradas
71. 2.02, 4.91 **73.** 28.9° **75.** Sí; varía desde 1.27 hasta 1.34 **77.** 1.47
79. Si θ es el ángulo de incidencia original y ϕ es el ángulo de refracción, entonces $(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\phi) = n_2$. El ángulo de incidencia del rayo que sale también es ϕ, y el índice de refracción es $1/n_2$. Así, θ es el ángulo de refracción del rayo que sale.

Comprensión de conceptos

1. identidad; condicional **2.** − **3.** + **4.** $\operatorname{sen}^2\theta$; $2\cos^2\theta$; $2\operatorname{sen}^2\theta$ **5.** $1 - \cos\alpha$

Comprobación

1. C **2.** F **3.** C **4.** F **5.** F **6.** F

Ejercicios de verificación

1. $\tan\theta\cot\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ **3.** $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = \cos^2\theta\sec^2\theta = 1$
5. $4\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta + 3(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 3 + \cos^2\theta$
7. $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = \dfrac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = \dfrac{2(1-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = 2\csc\theta$
9. $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{1 - \tan\theta}$
11. $\dfrac{\csc\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$
13. $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta\cot\theta$
15. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\sec\theta} = \cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^3\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$
17. $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$
19. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$
21. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$
23. $(1+\cos\theta)\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)\dfrac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta$
25. $2\cot\theta\cot 2\theta = 2\left(\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\right) = \dfrac{2\cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \cot^2\theta - 1$
27. $1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 4\theta$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen}3\theta\cos(-\theta)}{2\cos 3\theta\cos(-\theta)} = \tan 3\theta$
31. $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} - \tan\theta\tan 3\theta = \dfrac{-2\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}(-\theta)}{2\cos 3\theta\cos(-\theta)} - \tan\theta\tan 3\theta = \tan 3\theta\tan\theta - \tan\theta\tan 3\theta = 0$ **33.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **35.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
37. $\frac{1}{2}$ **39.** $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$ **41.** (a) $-\frac{33}{65}$ (b) $-\frac{56}{65}$ (c) $-\frac{63}{65}$ (d) $\frac{33}{56}$ (e) $\frac{24}{25}$ (f) $\frac{119}{169}$ (g) $5\sqrt{26}/26$ (h) $2\sqrt{5}/5$
43. (a) $-\frac{16}{65}$ (b) $-\frac{63}{65}$ (c) $-\frac{56}{65}$ (d) $\frac{16}{63}$ (e) $\frac{24}{25}$ (f) $\frac{119}{169}$ (g) $\sqrt{26}/26$ (h) $-\sqrt{10}/10$
45. (a) $-\frac{63}{65}$ (b) $\frac{16}{65}$ (c) $\frac{33}{65}$ (d) $-\frac{63}{16}$ (e) $\frac{24}{25}$ (f) $-\frac{119}{169}$ (g) $2\sqrt{13}/13$ (h) $-\sqrt{10}/10$
47. (a) $(-\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/6$ (b) $(1 - 2\sqrt{6})/6$ (c) $(-\sqrt{3} + 2\sqrt{2})/6$ (d) $(-\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/(1 - 2\sqrt{6}) = (8\sqrt{2} + 9\sqrt{3})/23$ (e) $-\sqrt{3}/2$
(f) $-\frac{7}{9}$ (g) $\sqrt{3}/3$ (h) $\sqrt{3}/2$ **49.** (a) 1 (b) 0 (c) $-\frac{1}{9}$ (d) No definido (e) $4\sqrt{5}/9$ (f) $-\frac{1}{9}$ (g) $\sqrt{30}/6$ (h) $-\sqrt{6}\sqrt{3 - \sqrt{5}}/6$
51. $\pi/3, 5\pi/3$ **53.** $3\pi/4, 5\pi/4$ **55.** $3\pi/4, 7\pi/4$ **57.** $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ **59.** $1.1197695, \pi - 1.1197695$ **61.** $0, \pi$ **63.** $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$
65. $0, \pi/6, 5\pi/6$ **67.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ **69.** $\pi/2, \pi$

1. $a = 3.23$, $b = 3.55$, $\alpha = 40°$ **3.** $a = 3.25$, $c = 4.23$, $\beta = 45°$ **5.** $\gamma = 95°$, $c = 9.86$, $a = 6.36$ **7.** $\alpha = 40°$, $a = 2$, $c = 3.06$
9. $\gamma = 120°$, $b = 1.06$, $c = 2.69$ **11.** $\alpha = 100°$, $a = 5.24$, $c = 0.92$ **13.** $\beta = 40°$, $a = 5.64$, $b = 3.86$ **15.** $\gamma = 100°$, $a = 1.31$, $b = 1.31$
17. Un triángulo:; $\beta = 30.7°$, $\gamma = 99.3°$, $c = 3.86$ **19.** Un triángulo: $\gamma = 36.2°$, $\alpha = 43.8°$, $a = 3.51$ **21.** No hay triángulo
23. Dos triángulos; $\gamma_1 = 30.9°$, $\alpha_1 = 129.1°$, $a_1 = 9.08$ o $\gamma_2 = 149.1°$, $\alpha_2 = 10.9°$, $a_2 = 2.21$ **25.** No hay triángulo
27. Dos triángulos; $\alpha_1 = 57.7°$, $\beta_1 = 97.3°$, $b_1 = 2.35$ o $\alpha_2 = 122.3°$, $\beta_2 = 32.7°$, $b_2 = 1.28$
29. **(a)** La estación Able está a 143.3 millas del barco y la estación Baker a 135.6 millas. **(b)** Aproximadamente 41 minutos
31. 1490.5 pies **33.** 381.7 pies **35.** **(a)** 169 millas **(b)** 161.3° **37.** 84.7°; 183.7 pies **39.** 2.64 millas **41.** 1.88 millas

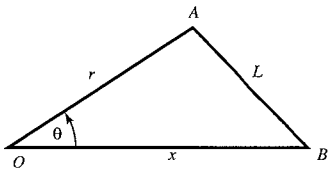
43. $$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}$$

45. $$a = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b\operatorname{sen}[180° - (\beta+\gamma)]}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}(\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cos\beta\operatorname{sen}\gamma) = b\cos\gamma + \frac{b\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

47. $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\text{Ángulo } AB'C) = b/(2r)$; $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{1}{2r}$; el resultado se deduce usando la ley de los senos.

1. $b = 2.95$, $\alpha = 28.7°$, $\gamma = 106.3°$ **3.** $c = 3.75$, $\alpha = 32.1°$, $\beta = 52.9°$ **5.** $\alpha = 48.5°$, $\beta = 38.6°$, $\gamma = 92.9°$
7. $\alpha = 127.2°$, $\beta = 32.1°$, $\gamma = 20.7°$ **9.** $c = 2.57$, $\alpha = 48.6°$, $\beta = 91.4°$ **11.** $a = 2.99$, $\beta = 19.2°$, $\gamma = 80.8°$
13. $b = 4.14$, $\alpha = 43.0°$, $\gamma = 27.0°$ **15.** $c = 1.69$, $\alpha = 65.0°$, $\beta = 65.0°$ **17.** $\alpha = 67.4°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 22.6°$
19. $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$ **21.** $\alpha = 33.6°$, $\beta = 62.2°$, $\gamma = 84.3°$ **23.** $\alpha = 97.9°$, $\beta = 52.4°$, $\gamma = 29.7°$ **25.** 70.75 pies
27. **(a)** 12° **(b)** 220.8 mph **29.** **(a)** 63.7 pies **(b)** 66.8 pies **(c)** 92.5° **31.** **(a)** 492.6 pies **(b)** 269.3 pies **33.** 342.3 pies
35. Al usar la ley de los cosenos:

$$L^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta$$
$$x^2 - 2rx\cos\theta + r^2 - L^2 = 0$$
$$x = \frac{2r\cos\theta + \sqrt{4r^2\cos^2\theta - 4(r^2 - L^2)}}{2}$$
$$x = r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + L^2 - r^2}$$

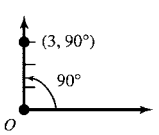


37. $$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$$
$$= \sqrt{\frac{2s(2s-2c)}{4ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

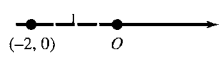
39. $$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2abc} = \frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

1. 2.83 **3.** 2.99 **5.** 14.98 **7.** 9.56 **9.** 3.86 **11.** 1.48 **13.** 2.82 **15.** 1.53 **17.** 30 **19.** 1.73 **21.** 19.90 **23.** 19.81 **25.** \$5446.38
27. $A = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\gamma\left(\dfrac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = \dfrac{a^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}$ **29.** 0.92 **31.** 2.27 **33.** 5.44 **35.** 0.84 **37.** $A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

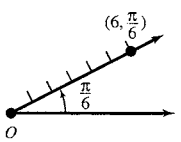
1.



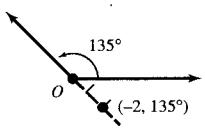
3.



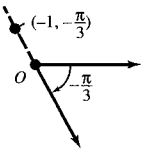
5.



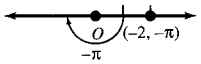
7.



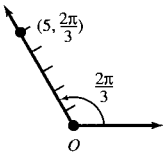
9.



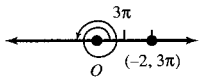
11.



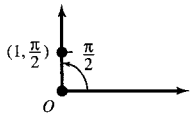
13.



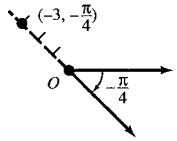
15.



17.



19.



(a) $(5, -4\pi/3)$ **(b)** $(-5, 5\pi/3)$ **(c)** $(5, 8\pi/3)$

(a) $(2, -2\pi)$ **(b)** $(-2, \pi)$ **(c)** $(2, 2\pi)$

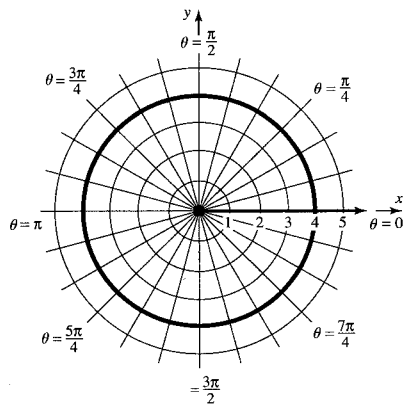
(a) $(1, -3\pi/2)$ **(b)** $(-1, 3\pi/2)$ **(c)** $(1, 5\pi/2)$

(a) $(3, -5\pi/4)$ **(b)** $(-3, 7\pi/4)$ **(c)** $(3, 11\pi/4)$

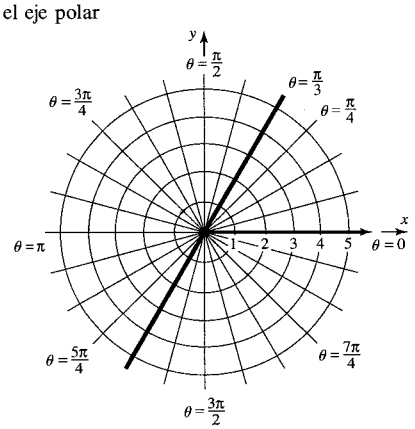
21. $(0, 3)$ **23.** $(-2, 0)$ **25.** $(-3\sqrt{3}, 3)$ **27.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **29.** $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ **31.** $(2, 0)$ **33.** $(-2.57, 7.05)$ **35.** $(-4.98, -3.86)$ **37.** $(3, 0)$
39. $(1, \pi)$ **41.** $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ **43.** $(2, \pi/6)$ **45.** $(2.47, -1.02)$ **47.** $(9.3, 0.47)$ **49.** $r^2 = \frac{3}{2}$ **51.** $r^2 \cos^2\theta - 4r \operatorname{sen}\theta = 0$ **53.** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$
55. $r \cos\theta = 4$ **57.** $x^2 + y^2 - x = 0$ o $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ **59.** $(x^2 + y^2)^{3/2} - x = 0$ **61.** $x^2 + y^2 = 4$ **63.** $y^2 = 8(x + 2)$
65. $d = \sqrt{(r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1 \operatorname{sen}\theta_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$

Ejercicio 8.3

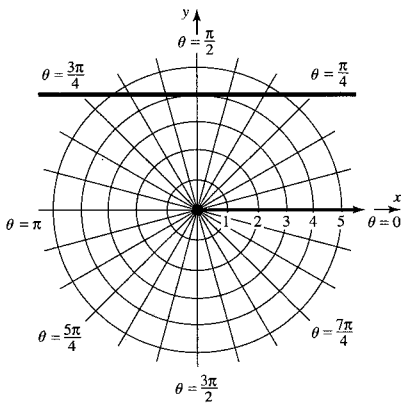
1. Círculo, radio 4, centro en el polo



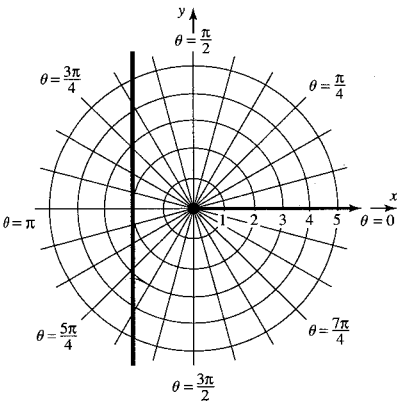
3. Recta que pasa por el polo formando un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar



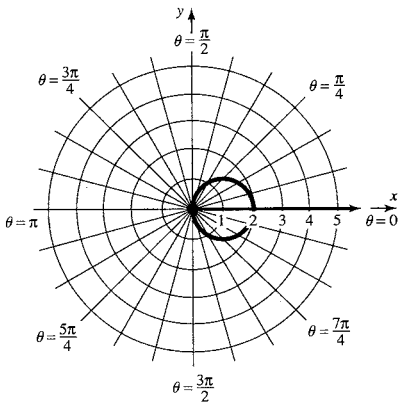
5. Recta horizontal 4 unidades arriba del polo



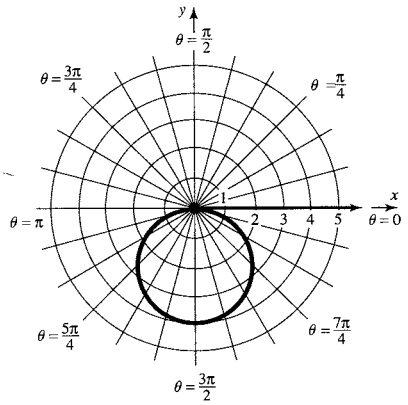
7. Recta vertical 2 unidades a la izquierda del polo



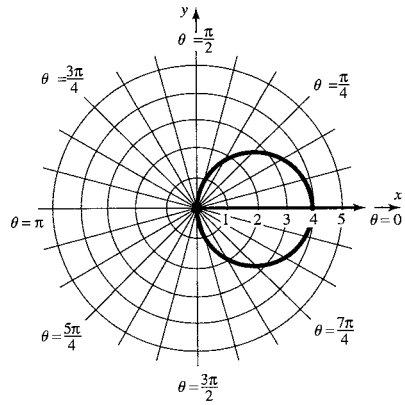
9. Círculo, radio 1, centro en (1, 0) en coordenadas rectangulares



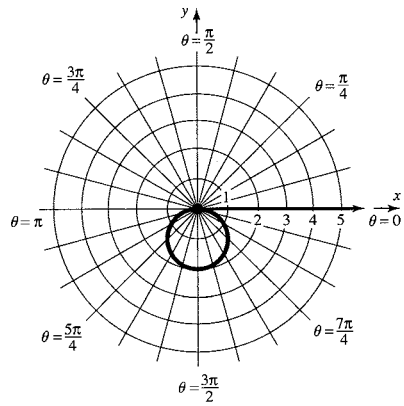
11. Círculo, radio 2, centro en (0, −2) en coordenadas rectangulares



13. Círculo, radio 2, centro en (2, 0) en coordenadas rectangulares

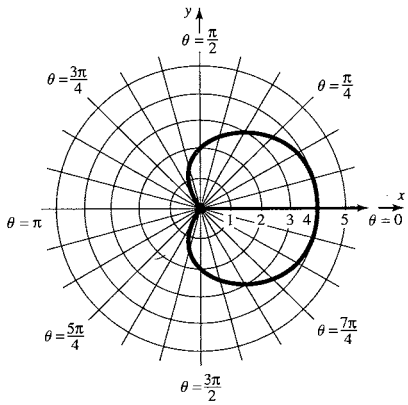


15. Círculo, radio 1, centro en (0, −1) en coordenadas rectangulares

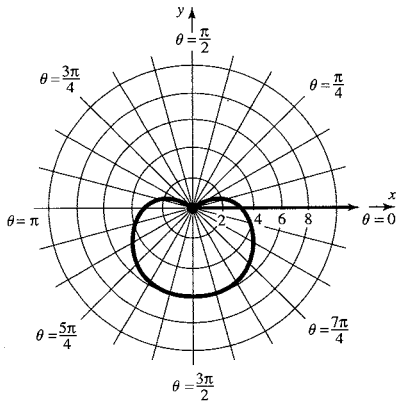


17. E **19.** F **21.** H **23.** D

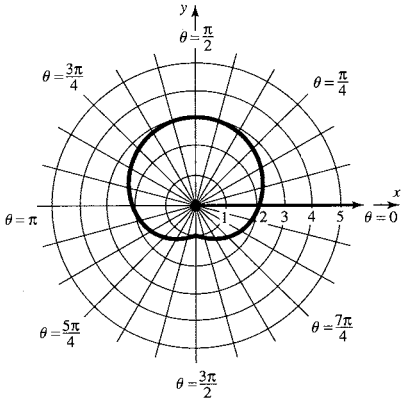
25. Cardioide



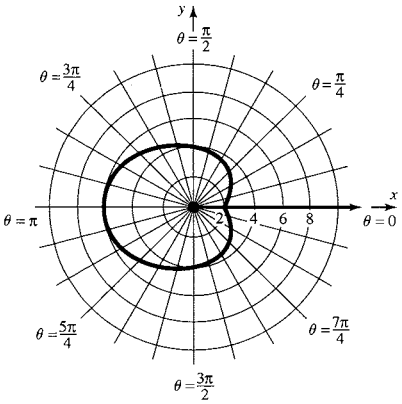
27. Cardioide



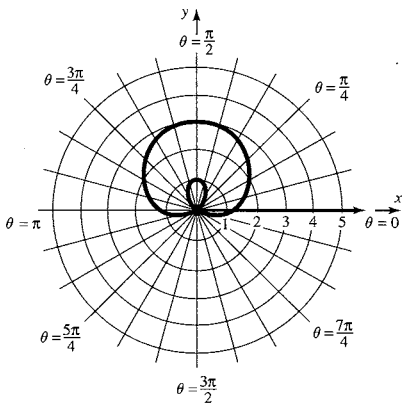
29. Caracol sin ciclo interno



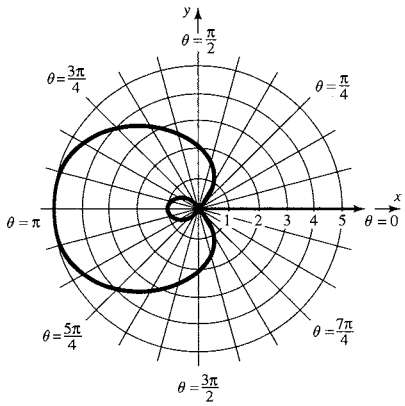
31. Caracol ón sin ciclo interno



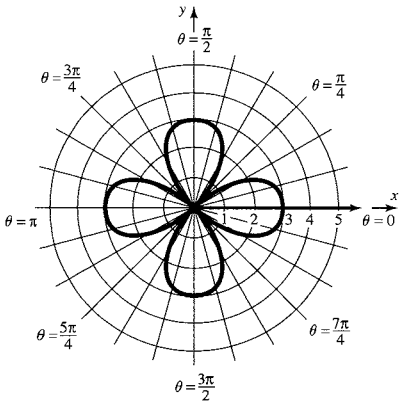
33. Caracol con ciclo interno



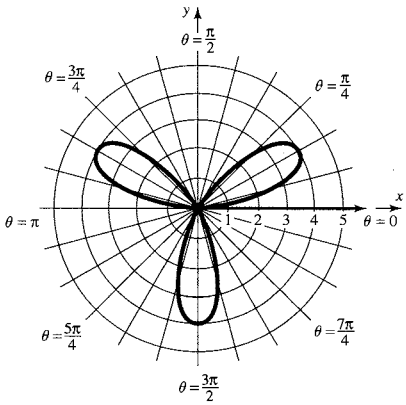
35. Caracol con ciclo interno



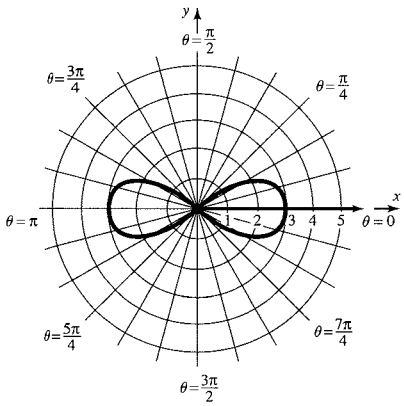
37. Rosa



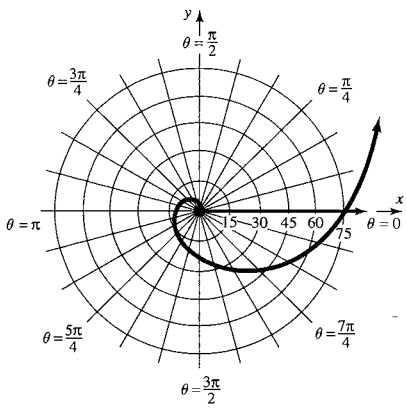
39. Rosa



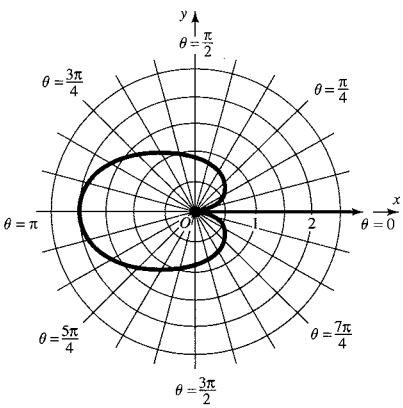
41. Lemniscata



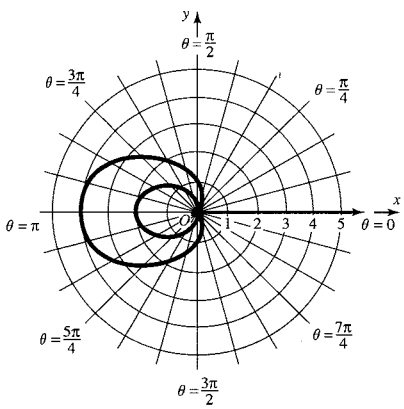
43. Espiral



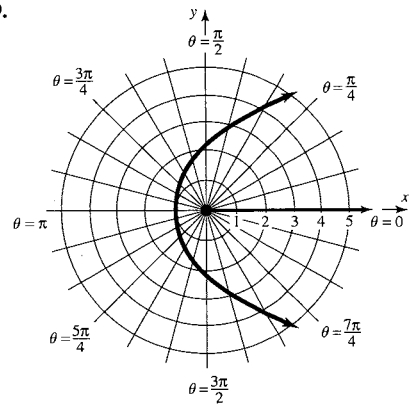
45. Cardioide



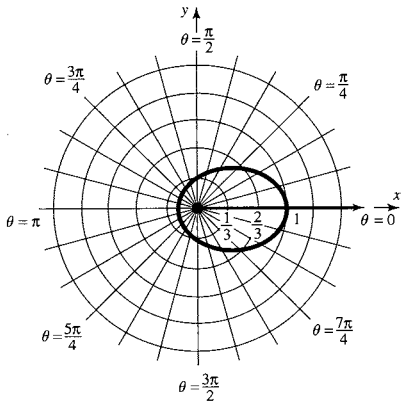
47. Caracol con ciclo interno



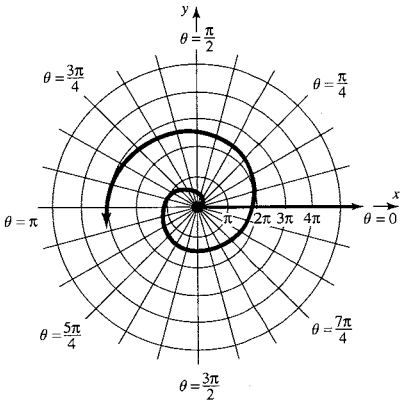
49.



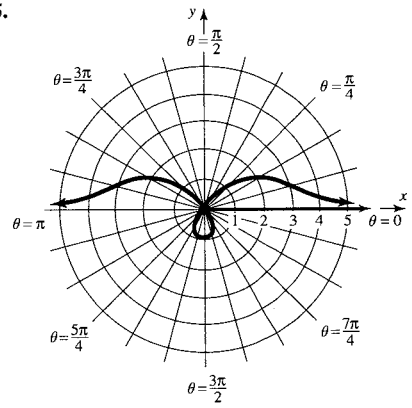
51.



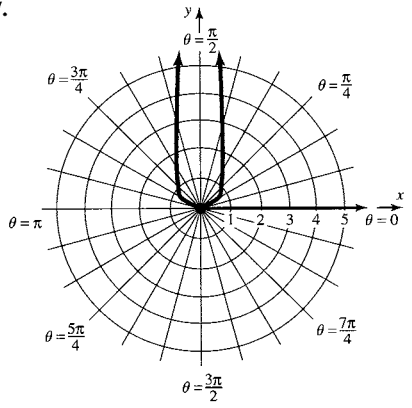
53.



55.



57.



59. $r \operatorname{sen} \theta = a$

$y = a$

61.

$r = 2a \operatorname{sen} \theta$

$r^2 = 2ar \operatorname{sen} \theta$

$x^2 + y^2 = 2ay$

$x^2 + y^2 - 2ay = 0$

$x^2 + (y - a)^2 = a^2$

Círculo, radio a, centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares

63.

$r = 2a \cos \theta$

$r^2 = 2ar \cos \theta$

$x^2 + y^2 = 2ax$

$x^2 - 2ax + y^2 = 0$

$(x - a)^2 + y^2 = a^2$

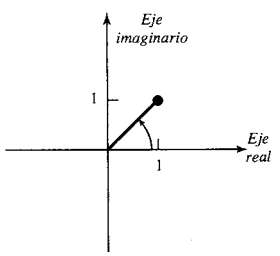
Círculo, radio a, centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares

65. (**a**) $r^2 = \cos \theta$: $r^2 = \cos(\pi - \theta)$; $r^2 = -\cos \theta$; No es equivalente; la prueba falla. $(-r)^2 = \cos(-\theta)$; $r^2 = \cos \theta$; Hacer otra prueba

(**b**) $r^2 = \operatorname{sen} \theta$: $r^2 = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$; $r^2 = \operatorname{sen} \theta$; Prueba. $(-r)^2 = \operatorname{sen}(-\theta)$; $r^2 = -\operatorname{sen} \theta$; La nueva prueba falla

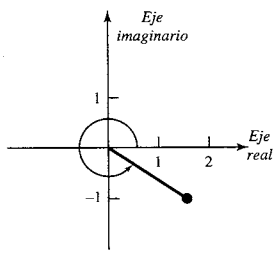
Ejercicio 6.5

1.



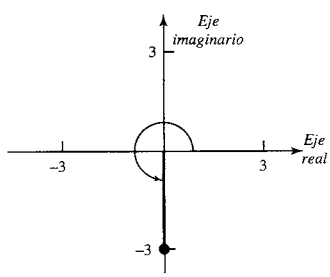
$\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

3.



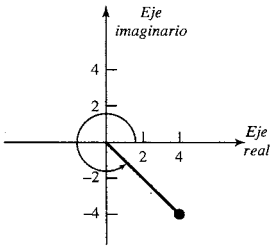
$2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

5.



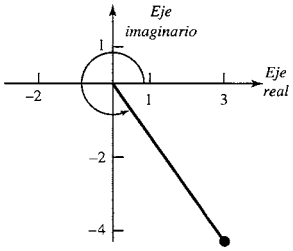
$3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

7.



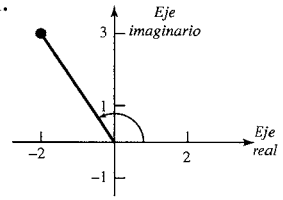
$4\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

9.



$5(\cos 306.9° + i \operatorname{sen} 306.9°)$

11.



$\sqrt{13}(\cos 123.7° + i \operatorname{sen} 123.7°)$

13. $-1 + \sqrt{3}i$ **15.** $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ **17.** $-3i$ **19.** $-0.035 + 0.197i$ **21.** $1.97 + 0.347i$

23. $zw = 8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$; $z/w = \frac{1}{2}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ **25.** $zw = 12(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$; $z/w = \frac{3}{4}(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)$

27. $zw = 4\left(\cos\dfrac{9\pi}{40} + i \operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{40}\right)$; $\dfrac{z}{w} = \cos\dfrac{\pi}{40} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{40}$ **29.** $zw = 4\sqrt{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$; $z/w = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$

31. $32(-1 + \sqrt{3}i)$ **33.** $32i$ **35.** $\frac{27}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ **37.** $\dfrac{25\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ **39.** $4(-1 + i)$ **41.** $-23 + 14.15i$

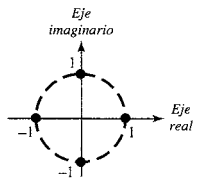
43. $\sqrt[6]{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$

45. $\sqrt[4]{8}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°)$

47. $2(\cos 67.5° + i \operatorname{sen} 67.5°)$, $2(\cos 157.5° + i \operatorname{sen} 157.5°)$, $2(\cos 247.5° + i \operatorname{sen} 247.5°)$, $2(\cos 337.5° + i \operatorname{sen} 337.5°)$

49. $\cos 18° + i \operatorname{sen} 18°$, $\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°$, $\cos 162° + i \operatorname{sen} 162°$, $\cos 234° + i \operatorname{sen} 234°$, $\cos 306° + i \operatorname{sen} 306°$

51. $1, i, -1, -i$ **53.** *Véase* la fórmula (8); $|z_k| = \sqrt[n]{r}$ para toda k. **55.** *Véase* la fórmula (8). Las z_k están separadas por un ángulo de $2\pi/n$.



Complete los espacios

1. Senos **2.** Cosenos **3.** de Herón **4.** polo; eje polar **5.** -2 **6.** $r = 2 \cos \theta$ **7.** el eje polar (eje x) **8.** magnitud o módulo; argumento

Cierto o falso

1. F **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** C

Ejercicios de revisión

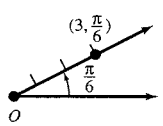
1. $\gamma = 100°$, $b = 0.65$, $c = 1.29$ **3.** $\beta = 56.8°$, $\gamma = 23.2°$, $b = 4.25$ **5.** No hay triángulo **7.** $b = 3.32$, $\alpha = 62.8°$, $\gamma = 17.2°$

9. No hay triángulo **11.** $c = 2.32$, $\alpha = 16.1°$, $\beta = 123.9°$ **13.** $\beta = 36.2°$, $\gamma = 63.8°$, $c = 4.56$ **15.** $\alpha = 39.6°$, $\beta = 18.5°$, $\gamma = 121.9°$

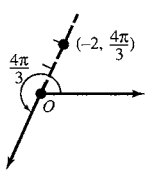
17. Dos triángulos: $\beta_1 = 13.4°$, $\gamma_1 = 156.6°$, $c_1 = 6.86$; $\beta_2 = 166.6°$, $\gamma_2 = 3.4°$, $c_2 = 1.02$ **19.** $a = 5.23$, $\beta = 46°$, $\gamma = 64°$ **21.** 1.93

23. 18.79 **25.** 6 **27.** 3.80 **29.** 0.32

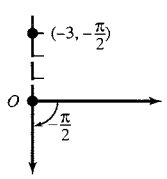
31. $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$



33. $(1, \sqrt{3})$



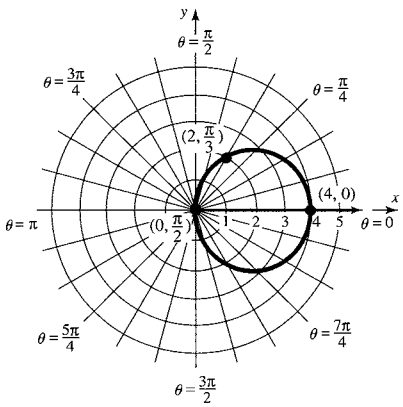
35. $(0, 3)$



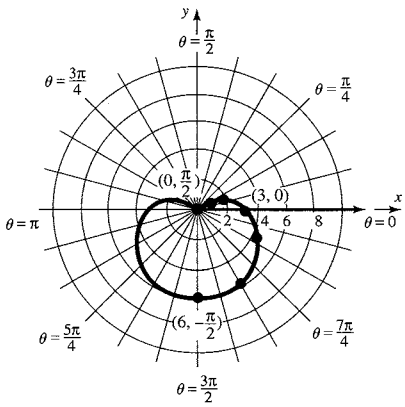
37. $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, -\pi/4)$ **39.** $(2, -\pi/2)$, $(-2, \pi/2)$ **41.** $(5, 0.93)$, $(-5, 4.07)$ **43.** $3r^2 - 6r \operatorname{sen} \theta = 0$ **45.** $r^2(2 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta) - \tan \theta = 0$

47. $r^3 \cos \theta = 4$ **49.** $x^2 + y^2 - 2y = 0$ **51.** $x^2 + y^2 = 25$ **53.** $x + 3y = 6$

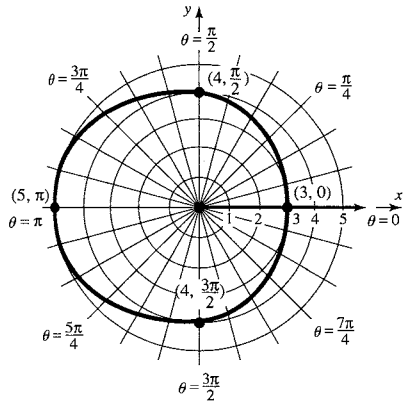
55. Círculo; radio 2, centro en (2, 0) en coordenadas rectangulares



57. Cardioide



59. Caracol sin ciclo interno



61. $\sqrt{2}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$ **63.** $5(\cos 323.1° + i \operatorname{sen} 323.1°)$ **65.** $-\sqrt{3} + i$ **67.** $-\frac{3}{2} + (3\sqrt{3}/2)i$ **69.** $0.098 - 0.017i$

71. $zw = \cos 130° + i \operatorname{sen} 130°$; $z/w = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$ **73.** $zw = 6(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$; $\dfrac{z}{w} = \dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen}\dfrac{8\pi}{5}\right)$

75. $zw = 5(\cos 5° + i \operatorname{sen} 5°)$; $z/w = 5(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$ **77.** $\frac{27}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ **79.** $4i$ **81.** 64 **83.** $-527.1 - 335.8i$

85. 3, $3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$, $3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$ **87.** 204.1 millas **89.** (**a**) 2.59 millas (**b**) 2.92 millas (**c**) 2.53 millas

91. (**a**) 131.8 millas (**b**) 23.1° (**c**) 0.2 h **93.** 9024 pies cuadrados

Respuestas seleccionadas

Se dan las respuestas a la mayoría de los ejercicios impares y a todos los de «Solución de problemas». Se incluyen todas las respuestas a los resúmenes de capítulo y a los resúmenes globales. No se dan las respuestas a los exámenes de los capítulos.

CAPITULO 1

páginas 230 y 231

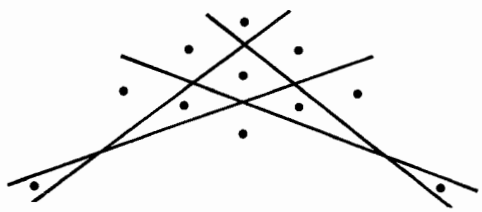
3. A, F, C; A, E, D; B, F, E; B, C, D.
5. Ejemplo: A, F, D, B. **7.** r, t. q.
11. $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BG}$ o $\overleftrightarrow{BF}$. **13.** $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{HC}$, $\overleftrightarrow{GD}$.
15. 12; $ABCD$, $ADHE$, $CDHG$, $ABFE$, $BCGF$, $EFGH$, $ADFG$, $BCEH$, $ABGH$, $CDEF$, $BFHD$, $AEGC$.
17. Todas son posibles excepto 2; el máximo es 6.

páginas 234 y 235

13. $\angle ABC, \angle CBA$. **15.** $\angle ACB, \angle BCA$.
19. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BE}$.
21. $\overleftrightarrow{AB}$, p. **23.** $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$.
25. $\angle ABC, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC, \angle CAD, \angle CAB$.
27. Sí, los segmentos tienen los mismos extremos.
29. Tres rectas; no; los lados de un triángulo son segmentos.
31. Dibújese el segmento EI.
Solución de problemas Fórmese una pirámide con una base triangular.

páginas 238 y 239

1. 4 cm.
3. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{MN} \ncong \overline{XY}$, $\overline{JK} \cong \overline{EF}$.
5. 140°. **7.** 90°.
11. $\angle EOF, \angle FOM, \angle LOH, \angle JOD$.
19. $67\frac{1}{2}°$.
Solución de problemas



páginas 242 y 243

5. Sí. **17.** 43.

páginas 246 y 247

1. $j \perp k$.
7. $ABCD$, $ABFE$; $ABCD$, $BCGF$; $ABCD$, $CDHG$; $ABCD$, $ADHE$.
13. Una recta contenida en un plano debe ser perpendicular al segundo plano.
15. Constrúyase una perpendicular de A al punto C de manera que el río pase por el punto medio de $\overline{AC}$. Sea M la intersección de $\overline{CB}$ y el río. Entonces, $AM + MB$ es el mínimo.
Solución de problemas A y D.

páginas 250 y 251

1b. Cada segmento no toca exactamente a otros dos segmentos.
3a. Igual que el ejercicio 1.
5. 2c, 3c. **9a.** Regular. **9d.** Regular.
11. $\triangle AFB, \triangle CGB, \triangle AJE, \triangle EID, \triangle DHC, \triangle FBG, \triangle GCH, \triangle HDI, \triangle JIE, \triangle AFJ$.
13. Número par de aristas.

15. *HIJ, ACEG, JIDEF, CEGJHA, BHIJFGA, CIDEGJHA, ABHICEFJG, AHBCIDEFJG.*

Solución de problemas $\frac{7\frac{1}{5}}{360} = \frac{500}{x}$; 25 000 millas.

página 253 Capítulo 1 Resumen

2a. Falso. **2b.** Falso. **2c.** Falso.
2d. Verdadero. **2e.** Falso. **2f.** Verdadero.
3. Ninguno; uno; dos.
4. Sí, ambos segmentos tienen los mismos extremos.
11. Planos: *ABCD, GHFE*; *BCFH, ADEG*; o *CDEF, BAGH*.
12. Recta: *DE, CF, AG* o *BH*.
13. Recta: *AB* o *GH, AH* o *BG*.
14. Recta *CB*.

página 255 Técnicas para la solución de problemas

1. 10. **2.** 9 ó 21. **3.** 20. **4.** 26.
5. 19 pies. **6.** Una calle al sur.

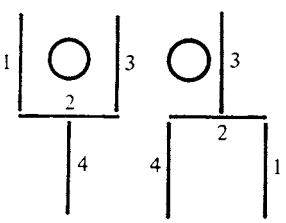
CAPITULO 2

páginas 262 y 263

1. $\overline{CB}$, $\overline{GF}$, $\overline{XZ}$; el más largo.
3. Tres iguales. **5.** $h = a + b + c$.

Solución de problemas

1. Muévase el palillo #2 hacia la derecha.
2. Muévase el palillo #1 abajo a la derecha.



páginas 266 y 267

1. Falso. **3.** *a*.
5. Falso; úsese un triángulo obtusángulo.

Solución de problemas

1.
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

2. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1}, donde n es el número de la fila.
3. $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Los coeficientes son los mismos que los números de cada fila del triángulo de Pascal.

páginas 270 y 271

1. Superficie, llana, plana.
3. Sí. La definición de plano requiere más términos básicos.
7. Los ángulos verticales son congruentes.
9. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

Solución de problemas $(30 - 3) - 2 = 25$ ó $25 + 2 + 3 = 30$ son correctos. $(30 - 3) + 2$ no es correcto.

páginas 274 y 275

1. (p) Lisa tiene 15 años. (q) Lisa es demasiado joven para votar en las elecciones de Puerto Rico. Verdadero.
3. (p) Algunas manzanas son rojas. (q) Los caballos tienen cuatro patas. Verdadero.
5. (p) Dos rectas se intersecan. (q) Esas dos rectas no son paralelas. Verdadero.
7. (p) $\triangle ABC$ es isósceles. (q) $\triangle ABC$ es equilátero. Falso.
9. Si un hombre vive en San Juan, entonces vive en Puerto Rico.
11. Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan para formar ángulos rectos congruentes.

13. Si dos rectas son paralelas, entonces no se intersecan.
15. (p) Termina en 2. (q) El número es par. Si un número termina en dos, entonces es un número par.
17. (p) Un triángulo equiángulo. (q) Debe ser equilátero. Si una figura es un triángulo equiángulo, entonces debe ser equilátero.
19. (p) Haz como te digo. (q) Serás rico. Si haces lo que yo te digo, entonces serás rico.
21. (p) Dos de sus ángulos son congruentes. (q) Un triángulo es isósceles. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
23. (p) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. (q) B es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces B es el punto medio de $\overline{AC}$.

Solución de problemas Nueve viajes de ida y ocho de regreso.

páginas 278 y 279

1. Si una persona está mojada, entonces está nadando.
3. Si una persona no tiene mucho dinero, entonces es pobre.
5. Si una persona no roba, entonces no es deshonesta.
7. Si un equipo no gana cuatro juegos de la Serie Mundial, entonces no gana la Serie.
9. Si una persona no tiene 16 años o más, entonces no conduce un automóvil legalmente.
11. Si no se gana el partido de esta noche, entonces no se ganará el campeonato.
13. Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo. Si un triángulo es equiángulo, entonces es equilátero.
15. Si dos rectas en un plano son paralelas, entonces no tienen puntos en común. Si dos rectas en un plano no tienen puntos en común, entonces son paralelas.
17. Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces tiene dos pares de lados paralelos. Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos, entonces es un paralelogramo.

Solución de problemas Alicia.

páginas 282 y 283

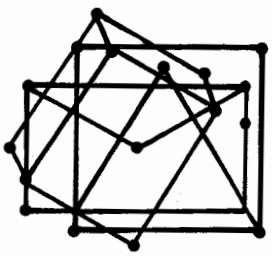
1. Ella votó a Armando Amigable.
3. No está nevando. **5.** No son paralelas.
7. El punto C está sobre la bisectriz perpendicular.
9. Un ángulo con medida mayor de 90° es un ángulo obtuso.
11. 1. Si $\triangle ABC$ es un triángular rectángulo con $\angle C$ como ángulo recto, entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ y $m\angle C = 90$. 3. Si $m\angle A + m\angle B = 90$, entonces $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.

Solución de problemas León es el encargado, Martínez es el cajero y Nieves es la administradora.

páginas 286 y 287

1. Recta, dos puntos, recta, postulado del plano.
3. Recta, postulado de la recta y el plano.
5. Recta, postulado de la perpendicular.
7. Recta, postulado de la perpendicular.
9. Postulado de la intersección de planos.
11. Postulado de la perpendicular.
13. Postulado del punto y el plano.
15. Postulado de la perpendicular.
17. Postulado del punto y el plano.
19. 4.

Solución de problemas



páginas 290 y 291

1. 3. **3.** 9. **5.** 8. **7.** 11. **9.** 19.
11. 8. **13.** 40. **15.** 155. **17.** 80.
19. *C*. **21.** *B*.

23. Definición de «entre», postulado de la regla.
25. 28, 35.
27. $BC = 14$, $CA = 42$ ó 14. **29.** 4 ó 24.
31. 96. **33.** 20.
Solución de problemas $A = 0.010$, $B = 0.540$, $C = 0.249$, $D = 0.882$, $E = 1.1555$.

página 293 Capítulo 2 Resumen

1. Triángulo equilátero; triángulo equilátero.
2a. Una cometa o un rombo sin ángulos rectos.
2b. Un rectángulo con lados adyacentes no congruentes.
3. Un postulado es una proposición que se acepta como verdadera sin necesidad de demostrarla. Un teorema es una proposición que se puede demostrar.
4a. Falso. **4b.** Verdadero. **4c.** Falso
4d. Falso. **5.** 16. **6.** 30.
7a. (Hip) no se intersecan (con) dos rectas son paralelas.
7b. (Hip) todos son cuadrados (con) todos son rectángulos.
8a. Si una figura tiene cuatro ángulos rectos, entonces es un cuadrado.
8b. Si una figura no es un cuadrado, entonces no tiene cuatro ángulos rectos.
8c. Si una figura no tiene cuatro ángulos rectos, entonces no es un cuadrado.
8d. Rectángulo (a y b).
9. Las diagonales de la figura $ABCD$ son congruentes.
10. $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ están en el mismo plano.

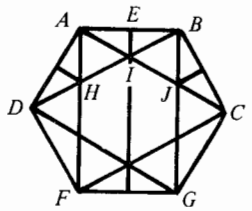
página 295 Repaso de álgebra

1. A. **3.** D. **5.** C. **7.** F. **9.** 32.
11. 26. **13.** 1. **15.** -32. **17.** 12.
21. $x \geqslant -18$. **23.** $x > 22$. **25.** $x > 20$.
27. $-9{,}9$. **29.** $3, -5$. **31.** $37, -37$.
33. $6, -7$. **35.** $8, -8$. **37.** 11. **39.** 20.
41. -12.

CAPITULO 3

páginas 302 a 305

1. No son congruentes. **3.** Congruente.
5. b. **7.** b. **9a.** $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.
9b. $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. **9c.** $\angle C \cong \angle D$.
11. $\angle C \cong \angle D$, $\angle A \cong \angle O$, $\angle T \cong \angle G$, $\overline{CA} \cong \overline{DO}$, $\overline{AT} \cong \overline{OG}$, $\overline{CT} \cong \overline{DG}$.
13. a, c. **15.** APR, BTJ.
17. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
19. $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, $\triangle ABC \cong \triangle ACB$, $\triangle ABC \cong \triangle ABC$, $\triangle ABC \cong \triangle CAB$, $\triangle ABC \cong CBA$.
21. $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, $\triangle BAE \cong \triangle CDE$.
23. $\triangle AEB \cong \triangle ADC$, $\triangle DBC \cong \triangle ECB$.
Solución de problemas b, e; c, g; d, f.
Triángulos congruentes: ADI, BCI; ADB, BCA; ADH, BCJ; AFC, BDG; AHI, BJI; AEI, BEI.



páginas 308 y 309

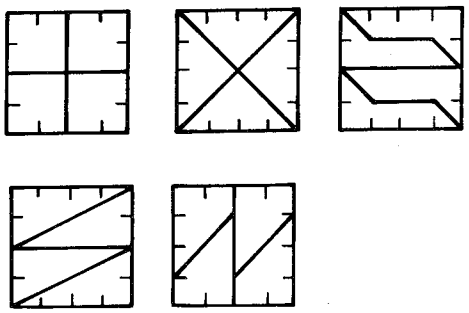
1. $\triangle LMN$. **5.** $\angle DBC$. **7.** $\overline{BD}$.
9. $\angle BDC$. **11.** LAL. **13.** ALA. **15.** LLL.
17. No hay suficiente información.
19. No hay suficiente información.
21. No hay suficiente información.
23. LLL. **25.** No congruente.
27. No congruente.
31. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, $\triangle ACD \cong \triangle ACB$, LAL, definición de triángulos congruentes.
33. $\triangle ABC \cong CDA$, ALA.
35. $\triangle ABE \cong \triangle CBD$, LAL.
37. $\triangle DBA \cong \triangle EBC$, ALA.
Solución de problemas 8, 27, 64.

páginas 313 y 314

1. *LAL.* **3.** *ALA.*
5. $\overline{BD} \cong \overline{DB}$, un segmento es congruente consigo mismo; *ALA.*
7. *LAL.* **9.** *ALA.* **11.** $\angle B \cong \angle B$; *ALA.*
Solución de problemas Todos menos el modelo medio.

páginas 318 y 319

1. $\angle ZXM \cong \angle YXM$. **3.** $\overline{AN} \cong \overline{BN}$.
5. $\overline{PV} \cong \overline{QV}$, $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$, $\angle PVS$ y $\angle QVS$ son ángulos rectos.
7. $\overline{OT} \cong \overline{ST}$.
9. Definición de bisectriz del ángulo.
11. Definición de punto medio.
13. Definición de bisectriz perpendicular.
Solución de problemas



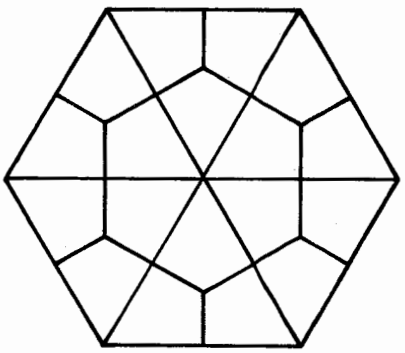
páginas 322 a 325

1. *LLL.* **3.** *ALA.*
5. 2. Dado.
3. Definición de rectas perpendiculares
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$. **5.** *LAL.*
7. 2. $\angle 3 \cong \angle 4$. 3. Dado.
4. Definición de bisectriz del ángulo.
5. Un segmento es congruente consigo mismo. 6. *ALA.*
9. $\overline{XM} \cong \overline{XM}$; *LAL.*
11. $\overline{NQ} \cong \overline{NQ}$; *LLL.*
13. $\angle RAD \cong \angle EAH$; *ALA.*
15. $\overline{AN} \cong \overline{EN}$, definición de punto medio; *ALA.*
17. $\overline{ES} \cong \overline{NS}$, definición de bisectriz del segmento; *LAL.*
19. $\angle ABF \cong CBF$, definición de bisectriz del ángulo; $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, definición de pentágono regular; $\overline{BF} \cong \overline{BF}$; *LAL.*
21. $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, definición de punto medio; $\overline{MB} \cong \overline{MB}$, $\triangle AMB \cong \triangle CMB$, *LLL*; definición de triángulos congruentes.
Solución de problemas No hay solución única; 7, 8 y 9 son una solución.

páginas 328 a 331

1. $\triangle ABD$, $\triangle ACD$.
3. $\triangle EFG$, $\triangle EIH$, $\triangle EFH$, $\triangle EIG$.
5. $\triangle JNK$, $\triangle LNK$; $\triangle JNM$, $\triangle LNM$.
7. 1. Dado. 2. $\overline{MO} \cong \overline{MO}$; un segmento es congruente consigo mismo. 3. *LLL.* 4. $\angle PMO \cong \angle NMO$. 5. Definición de bisectriz del ángulo.
9. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; $\triangle ACB \cong \triangle ACD$, *ALA*; *PCTCC.*
11. $\angle E \cong \angle B$, $\overline{AE} \cong \overline{AB} \cong \overline{ED} \cong \overline{BC}$; definición de polígono regular; definición de isósceles: $\triangle AED \cong \triangle ABC$, *LAL*; $\overline{AD} \cong \overline{AC}$, *PCTCC.*
13. $\overline{CD} \cong \overline{ED}$, definición de bisectriz del segmento; $\triangle BCD \cong \triangle FED$, *ALA*; *PCTCC.*
15. $AP = BP$ y $AN = BN$, dado que los puntos P y N en el plano de la red están a una distancia igual de las líneas de la base; $\overline{PN} \cong \overline{PN}$; $\triangle APN \cong \triangle BPN$, *LLL*; $\angle PNA \cong \angle PNB$, *PCTCC*; $\angle PNA$ y $\angle PNB$ son suplementos con medidas que suman 180°; cada uno tiene una medida de 90° ya que los ángulos son iguales; $\angle PNA$ y $\angle PNB$ son ángulos rectos y $\overrightarrow{PM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.
17. $\triangle AFE \cong \triangle BCD$, *LAL*; $\overline{AE} \cong \overline{BD}$, *PCTCC*; $\triangle AEB \cong \triangle DBE$, *LLL*; *PCTCC.*
19. $\triangle DFG \cong \triangle CFG$, *LAL*; $\overline{FD} \cong \overline{FC}$, *PCTCC*; $\triangle AEF \cong \triangle ABF$, *LAL*; $\overline{EF} \angle \overline{BF}$, *PCTCCC*, *LLL.*

Solución de problemas



páginas 334 y 335

1. $\triangle ABC$, $\triangle CDA$; $\triangle ABE$, $\triangle CDE$.
3. $\angle 1 \cong \angle 2$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle 3 \cong \angle 4$, dado; $\triangle EFD \cong \triangle BCA$, *ALA*; $\overline{EF} \cong \overline{BC}$, *PCTCC*.
5. $\overline{CB} \cong \overline{BC}$; $\triangle ECB \cong \triangle DBC$, *LAL*; *PCTCC*.
7. $\triangle ACE \cong \triangle BDF$, *ALA*, *PCTCC*.
9. $\triangle QPV \cong \triangle QRT$, *LAL*, *PCTCC*.
11. $\angle AHG \cong \angle DHF$; $\triangle AHG \cong \triangle DHF$, *ALA*; *PCTCC*.

Solución de problemas *A*-36, *B*-36, *C*-24, *D*-8.

página 337

1. $\triangle PUQ \cong TUS$, *ALA*; $\overline{QU} \cong \overline{SU}$, *PCTCC*. $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, definición de bisectriz del segmento; $\overline{UR} \cong \overline{UR}$; *LLL*.
3. $\triangle GFE \cong \triangle DEF$, *LAL*; $\overline{GE} \cong \overline{DF}$, *PCTCC*; $\triangle HGE \cong \triangle CDF$, *LAL*; *PCTCC*.
5. $\triangle AHB \cong \triangle DHE$, *LAL*; $\angle 4 \cong \angle 3$, *PCTCC*; $\triangle ACB \cong \triangle DFE$, *ALA*; *PCTCC*.

Solución de problemas 255; sea n = número de letras, $2^n - 1$.

página 339 Capítulo 3 Resumen

1. $\angle B \cong \angle Q$, $\angle A \cong \angle R$, $\angle C \cong \angle P$, $\overline{BA} \cong \overline{QR}$, $\overline{AC} \cong \overline{RP}$, $\overline{BC} \cong \overline{QP}$.

2a. *ALA*. **2b.** *LLL*. **2c.** *LAL*. **2d.** *LAL*

3a. $\angle ABC$ y $\angle ABD$ son ángulos rectos.
3b. $\overline{FE} \cong \overline{GE}$.
3c. $\angle ABD \cong \angle CBD$; $\angle ADB \cong \angle CDB$.
3d. Todos los ángulos y lados son congruentes.

4. $\angle QPM \cong \angle NPM$, $\angle QMP \cong \angle NMP$, definición de bisectriz del ángulo; $\overline{MP} \cong \overline{MP}$, $\triangle MQP \cong \triangle MNP$, *ALA*, *PCTCC*.
5. $\angle DBA \cong \angle EBC$, rectas perpendiculares forman ángulos rectos congruentes; $\triangle DBA \cong \triangle EBC$, *LAL*; *PCTCC*.
6. $\triangle ZQX \cong \triangle PYX$, *LAL*; *PCTCC*.

página 341 Resumen global capítulos 1 a 3

1a. Falso. **1b.** Falso. **1c.** Verdadero
3. Deductivo. **4.** Inductivo.
5. No hay conclusión. **6.** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

7a. Si dos rectas no son perpendiculares, entonces son paralelas.
7b. Si dos rectas no son paralelas, entonces son perpendiculares.
7c. Si dos rectas son perpendiculares, entonces no son paralelas.
7d. 7a, b; mostrar rectas intersecantes que no sean paralelas.

8. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; *LLL*.
9. $\angle BAD \cong \angle CAD$; $\triangle BAD \cong \triangle CAD$, *LAL*; *PCTCC*.

CAPITULO 4

páginas 350 a 353

5. Si dos rectas se intersecan, entonces forman dos pares de ángulos congruentes.
7. Si un segmento es la bisectriz de un ángulo del vértice de un triángulo equilátero, entonces el segmento es la bisectriz perpendicular de un lado.
9. Reflexiva.
11. Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

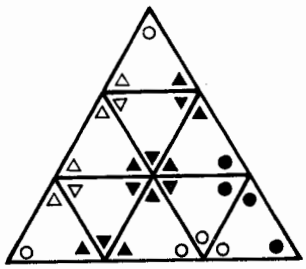
13. Si un triángulo es equilátero, entonces todos los ángulos son congruentes.
15. Propiedad transitiva.
17. $AB = AC$, transitiva; tres lados congruentes.
19. $BE = BD$, $AD = BB$, $AD = BD$, $BE = AD$, transitiva; sustitución.
21. $\overline{DB} \cong \overline{BD}$, reflexiva; *ALA*.
23. $\angle AOB \cong \angle BOC$; $\angle BOC \cong \angle COD$; transitiva.
25. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, teorema de la página 198; $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AE} \cong \overline{DF}$, *PCTCC*; *LAL*.
27. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, dado; $\angle A \cong \angle D$, $\angle D \cong \angle G$; $\angle A \cong \angle G$, transitiva, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{DE} \cong \overline{GH}$; $\overline{AB} \cong \overline{GH}$, transitiva; completar el modelo para cuatro pares más.

Solución de problemas
a. 45, 66. **b.** Sí.

páginas 356 a 359

1. Transitiva. **3.** Resta de ángulos iguales.
5. Transitiva.
7. Resta de segmentos iguales.
9. $\overline{BE} = \overline{AC}$, transitiva, resta de segmentos iguales.
11. 2. Propiedad reflexiva. 3. Suma de segmentos iguales.
13. 3. Propiedad reflexiva. 4. Suma de segmentos iguales. 5. Propiedad transitiva.
15a. 29.73 cm. **15b.** 6.045 cm.
15c. Suma y resta de segmentos iguales.
17. Suma de ángulos iguales.
19. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$, *ALA*; $\overline{AB} = \overline{DC}$, *PCTCC*; $\overline{AC} = \overline{DB}$, suma de segmentos iguales.
21. $AB = BC$; $m\angle ABF = m\angle CBG$, suma de ángulos iguales; $\triangle FBA \cong \triangle GBC$, *LAL*; $\angle F \cong \angle G$, $\triangle FBD \cong \triangle GBE$, *ALA*; *PCTCC*.
23. $\overline{AC} \cong \overline{CD}$; $m\angle ACB = m\angle DCE$, suma de ángulos iguales; $\triangle ACB \cong \triangle DCE$, *ALA*; $\angle E \cong \angle B$, $\overline{EC} \cong \overline{BC}$, *PCTCC*; *ALA*.
25. $\overline{AE} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DB}$, *PCTCC*; $AC - BC = DB - CB$; *LAL*.
27. $\triangle ABE \cong \triangle DCE$, *LAL*; $\angle AEB \cong DEC$, *PCTCC*; $m\angle EAF = m\angle EDG$, resta de ángulos iguales; $\triangle AEF \cong DEG$, *ALA*; $\overline{FE} \cong GE$, *PCTCC*.

Solución de problemas Obsérvese que se pueden colocar 9 triángulos para formar un triángulo con 6 símbolos en el centro.



páginas 364 y 365

1. $\angle COB$. **3.** $\angle 1$ o bien $\angle 2$.
5. Complementos de ángulos congruentes.
7. $\angle COF$, $\angle EOD$. **9.** $\angle HOA$, $\angle FOD$.
11. Complementos del mismo ángulo, $\angle AOC$.
13. Complementos del mismo ángulo, $\angle COE$.
15. $90 - x$. **17.** $x + 4x = 180$; 36, 144.
19. $\angle BAD \cong \angle BCD$, suplementos congruentes; *ALA*.
21. $BW = BX = YD = DZ$; $\angle WBX \cong \angle ZDY$, suplementos congruentes; *LAL*.
23. $\angle EBC \cong \angle EDC$, complementos congruentes; $\angle BEC \cong \angle DEC$, suplementos congruentes; *ALA*.
25. Empléese el diagrama de la página 217 con $\angle D \cong \angle C$, $\angle A$ es complementario de $\angle C$, $\angle B$ es complementario de $\angle D$; $m\angle A + m\angle C = 90$, $m\angle B + m\angle D = 90$; $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D$, sustitución; $m\angle A = m\angle B$, resta; $\angle A \cong \angle B$.

Solución de problemas $x \doteq 1.618$; $y \doteq 0.618$;

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1};\ x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\ x \doteq 1.618.$$

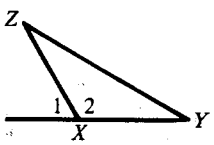
páginas 368 y 369

1. $\angle COE, \angle BOF; \angle BOC, \angle FOE.$
3. Ejemplo: $\angle AOC, \angle FOD.$
5. 145. **7.** 145. **9.** 40. **11.** 50.
13. $CO = DO, \angle COA \cong \angle DOB$, ángulos verticales; $ALA.$
15. $\angle AEB \cong \angle DEC; \triangle AEB \cong \triangle DEC, LAL.$
17. $\angle AEB \cong \angle DEC; \triangle AEB \cong \triangle DEC, LAL;$ $\angle A \cong \angle D, \overline{AB} \cong \overline{DC}, PCTCC;$ $AE + EC = DE + EB; LAL.$
19. $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios, dado; $m\angle 1 + m\angle 2 = 180; 2m\angle 1 = 180,$ sustitución, suma; $m\angle 1 = 90.$

Solución de problemas Dibújese $\overline{AM}$ y $\overline{DM}$. $AB = 2a; m\angle AMD = 90; AM = DM = a\sqrt{5}.$

páginas 372 y 373

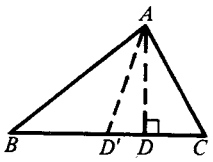
1. Seis; ángulos $ICB, FCA, CAD, HAB, ABG,$ $EBC.$
3. $\angle ACB, \angle ABC.$
5. No, no forma par lineal con $\angle CAB.$
7. Angulo vertical. **9.** Angulo exterior.
11. $m\angle 3 > m\angle 1; m\angle 1 > m\angle 4$, ángulo exterior, transitiva.
13. $m\angle ABD > m\angle BDC; m\angle BDC = m\angle EDF.$
15. $m\angle RCB > m\angle B; m\angle RCB > 90.$
17. En $\triangle XYZ$, $\angle 2$ es un ángulo obtuso,



dado; $m\angle 2 > 90,$ definición de ángulo obtuso; $m\angle 1 + m\angle 2 = 180; 90 > m\angle 1;$ $m\angle 1 > m\angle Z, m\angle 1 > m\angle Y,$ teorema del ángulo exterior; $90 > m\angle Z,$ $90 > m\angle Y,$ transitiva.

19. Usese el diagrama del ejercicio 17; en $\triangle XYZ$, sea $\angle 2$ un ángulo recto, dado; $m\angle 1 > m\angle Z, m\angle 1 > m\angle Y,$ teorema del ángulo exterior; $\angle 1$ es un ángulo recto, resta; $90 > m\angle Z, 90 > m\angle Y,$ definición de ángulo recto, sustitución; ni $\angle Z$ ni $\angle Y$ son ángulos obtusos (Ejercicio 16); en $\triangle XYZ$, sea $\angle 2$ un ángulo obtuso, dado; $90 > m\angle Z, 90 > m\angle Y$ (Ejercicio 17); ni $\angle Z$ ni $\angle Y$ son ángulos rectos.

Solución de problemas Si el triángulo no es isósceles, el punto medio de $\overline{BC}$ y el pie de la perpendicular son dos puntos distintos.



páginas 376 a 379

1. $\ell \not\perp m$; los ángulos formados no son ángulos rectos.
3. Los lados adyacentes son paralelos. Los lados adyacentes no se intersecan.
5. $\overline{AB} \ncong \overline{CD}; AB \neq CD.$
7. $\angle A$ no es un ángulo agudo. $m\angle A \geqslant 90.$
9. $\triangle ABC$ no es un triángulo isósceles. $AB \neq BC \neq AC.$
11. No es una contradicción.
13. Forma una contradicción.
15. Forma una contradicción. **17.** *c.*
19. $m\angle A + m\angle B \neq 90$ (Ejercicios 19 a 27, las respuestas pueden variar).
21. $\triangle ABC \ncong \in \triangle XYZ.$
23. $m\angle A \neq 117.$
25. $AB + EF = CD + EF.$
27. $m\angle 1 + m\angle 2 \neq 180.$
29. 1. Suposición de la prueba indirecta. 2. Dado. 4. Propiedad reflexiva. 5. Postulado $LAL.$ 6. $\overline{AB} \cong \overline{AC},$ $PCTCC.$ 7. $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$, dado. 8. $\overline{BD} \ncong \overline{DC}$, lógica de la demostración indirecta.
31. Un abogado descubre que un cliente suyo, acusado de un delito en Ponce, estaba en la ciudad de San Juan cuando se cometió el delito. El abogado hace la siguiente proposición: Si mi cliente estaba en San Juan, entonces no cometió el delito. El abogado usa este razonamiento: Supóngase

que mi cliente cometió el delito. El delito se cometió en Ponce. Mi cliente estaba en San Juan. No pudo haber estado en Ponce y en San Juan al mismo tiempo. Por tanto, mi cliente no cometió el delito.

33.

1. Supóngase que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos verticales.	1. Suposición de la demostración indirecta.
2. $\angle A \cong \angle B$.	2. Definición de ángulos verticales.
3. $\angle A \ncong \angle B$. (contradicción).	3. Dado.
4. $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.	4. Lógica de la demostración indirecta.

35.

1. Supóngase que $BC = QR$.	1. Suposición de la demostración indirecta.
2. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.	2. *LLL*.
3. $\angle A \cong \angle P$.	3. *PCTCC*.
4. $\angle A \ncong \angle P$ (contradicción)	4. Dado.
5. $BC \neq QR$.	5. Lógica de la demostración indirecta.

Solución de problemas Si se supone que Ana está diciendo la verdad, puede llegarse a una contradicción. Si se supone que Isa o Ive dicen la verdad, también se llega a una contradicción. Si se supone que Leo está diciendo la verdad, no se llega a una contradicción. Por tanto, Ana es la culpable.

página 381 Capítulo 4 Resumen

1a. Verdadero. **1b.** Falso. **1c.** Verdadero.
4a. $x = 22.5°$, $3x = 67.5°$. **4b.** 56.
4c. 100, 80. **5.** 45.
6. $\angle BCA \cong \angle DCE$; empléese *ALA*.
7. Empléese la suma de ángulos iguales.
8. $\triangle ABC \cong \triangle AED$, *ALA*; $\angle 3 \cong \angle 4$, *PCTCC*, empléense los suplementos de ángulos congruentes.
9a. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. **9b.** $\angle A$ y $\angle B$ no son suplementarios.

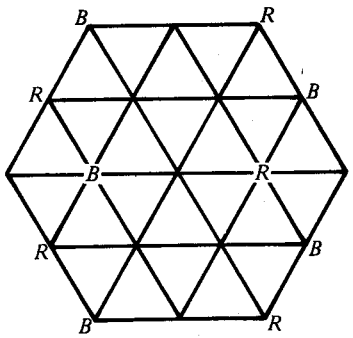
página 383 Técnicas de solución de problemas

1. 1296. **2.** 35. **3.** 45.

CAPITULO 5

páginas 388 y 389

1. Ejemplo $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{DH}$.
3. *EFGH* y *ABCD*, *BCGF* y *ADHE*, *ABFE* y *DCGH*.
5. $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 1$ y $\angle 8$.
7. *ABG* y *DJK*, *AGL* y *CDJ*, *ABC* y *JKL*.
9. $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{AE}$.
11. $\angle 14$ y $\angle 17$, $\angle 14$ y $\angle 11$.
Solución de problemas

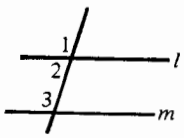


páginas 392 a 395

1a. *a* y *c*, 5.1. **1b.** *a* y *b*, 5.2.
1c. *b* y *c*, 5.4. **1d.** *a* y *c*, 5.2.
1e. *b* y *c*, 5.1. **1f.** *a* y *b*, 5.3.
3. Teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.
5. $\angle 2$ y $\angle 3$.
7. $\angle 8$ y ($\angle 4$ y $\angle 5$); $\angle 7$ y ($\angle 5$ y $\angle 6$).
9. *LLL*; $\angle 3 \cong \angle 2$, *PCTCC*; teorema 5.2.
11. $AF + FC = DC + CF$; $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, *LLL*; $\angle ACB \cong \angle DFE$; teorema 5.2.

13. Empléese el teorema 5.4.

15. $\angle 2$ es suplementario de $\angle 3$, dado; $\angle 2$ es suplementario de $\angle 1$, par lineal; $\angle 1 \cong \angle 3$, suplementos congruentes; $\ell \parallel m$, teorema 5.1.



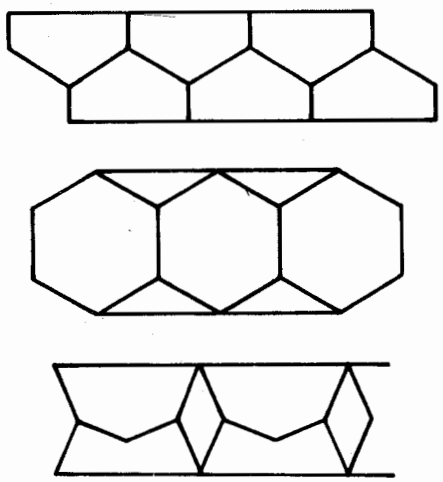
17. $\frac{1}{2}m\angle ABC = \frac{1}{2}m\angle BCD$, $\angle 2 \cong \angle 3$; teorema 5.2.

19. $(m\angle 2 + m\angle 3) + m\angle 1 = 180$; $m\angle 1 = m\angle 5$; $m\angle 1 = m\angle 4$; teorema 5.1.

21. Dibújense $\overline{DM}$ y $\overline{CM}$. Pruébese que $\triangle AMD \cong \triangle BMC$, LAL; $\overline{DM} \cong \overline{CM}$, $\angle DMA \cong \angle CMB$, $PCTCC$; $\angle DMP \cong \angle CMP$; $\triangle DMP \cong \triangle CMP$, LAL; $\angle DPM \cong \angle CPM$. Empléese el teorema 5.4.

23. La plomada es paralela a las puertas, ventanas y esquinas de las paredes.

Solución de problemas



páginas 398 y 399

3a. Verdadero. **3b.** Verdadero.
3c. Verdadero. **3d.** Verdadero.

5. No paralelas.

7. $q \parallel p$, teorema 5.4, $q \parallel r$, teorema 5.4; teorema 5.5.

9. Usese el teorema 5.1 o el 5.2.

11. $\overline{AB} \perp \overline{BG}$. $\overline{HG} \perp \overline{BG}$; $\overline{BA} \parallel \overline{HG}$; $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$; úsese el teorema 5.5.

Solución de problemas Sea E la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{CE} = \overline{DE}$; $\angle AEC \cong \angle BED$; $\triangle AEC \cong \triangle BED$, LAL; $\angle EDB \cong \angle ECA$, $PCTCC$; ángulos alternos interiores.

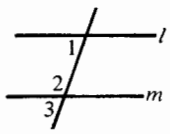
páginas 401 a 405

1. 125. **3.** 125. **5.** 55. **7.** 125.
9. 37. **11.** 37. **13.** 110. **15.** 28.
17. 70. **19.** 70. **21.** 42.

23. $m\angle ABC = m\angle CDA = 110$; $m\angle DAB = 70$.

25. $m\angle 1 = m\angle 5 = 78$; $m\angle 2 = 102$.

27. $\ell \parallel m$; $\angle 1 \cong \angle 3$, teorema 5.8; $\angle 2$ es suplementario de $\angle 3$, par lineal; $\angle 2$ es suplementario de $\angle 1$; sustitución.



29. Un ángulo interior formado por r y t es 90°, teorema 5.6; definición de perpendicular.

31. $m\angle 1 = m\angle 11$, $m\angle 11 = m\angle 7$, $m\angle 1 = m\angle 7$, transitiva; $m\angle 2 = m\angle 4$, $m\angle 4 = m\angle 9$, $m\angle 2 = m\angle 9$, transitiva.

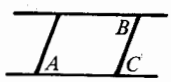
33. $\angle 9$ es suplementario de $\angle 6$, teorema 5.9; $\angle 1 \cong \angle 6$, suplementos de ángulos congruentes; úsese el teorema 5.2.

35. $\angle B \cong \angle DEF$, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, ALA.

37. $\angle 4 \cong \angle 2$, teorema 5.8; $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$, teorema 5.9; $m\angle 1 + m\angle 4 = 180$, sustitución.

39. $\angle B$ es suplemento de $\angle A$, $\angle D$ es suplemento de $\angle A$, teorema 5.9; suplemento de ángulos congruentes.

41. Los bordes del papel tapiz deben ser paralelos de tal manera que $\angle A \cong \angle C$; dado que el piso es paralelo al techo, $\angle B \cong \angle C$. Por tanto, $\angle A \cong \angle B$.



Solución de problemas

1. Dado que $\overrightarrow{AB}$ sufre la misma inclinación al entrar que al salir, se forma un par de ángulos

correspondientes congruentes al hacer que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.
2. Usese el teorema 5.5.

página 407 Capítulo 5 Resumen

1a. $\angle 3$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 5$.
1b. $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 1$ y $\angle 8$.
1c. $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$.
2a. Verdadero. **2b.** Falso.
2c. Verdadero. **3a.** ABE y DCF.
3b. $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{FC}$.
4. No. **5.** 55. **6.** 78.
7. $\angle 8 \cong \angle 11$, teorema 5.6. $\angle 10$ y $\angle 11$ son suplementarios. Usese el teorema 5.4.
8. $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, teorema 5.1. Usese el teorema 5.8.

página 409 Repaso de álgebra

1. 4. **3.** $-\frac{5}{2}$ **5.** -8. **7.** 2.
9. $\frac{4}{5}$ **11.** $x < 5$. **13.** $x < \frac{14}{3}$
15. $x > 36$. **17.** $-5 < x < 5$. **19.** $2\sqrt{2}$.
21. $4\sqrt{3}$. **23.** $3\sqrt{3}$. **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** $\frac{11\sqrt{2}}{4}$
29. $(-10, 34)$. **31.** $(4, 2)$. **33.** $(14, -4)$.
35. $(7, 14)$. **37.** 3, 9.

CAPITULO 6

páginas 416 y 417

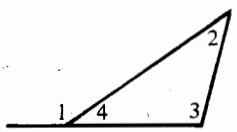
1a. Escaleno. **1b.** Equilátero.
1c. Isósceles. **1d.** Escaleno.
3a. $\angle N$. **3b.** $\overline{MN}$, $\overline{PN}$. **3c.** $\overline{MP}$.
3d. $\overline{MN}$, $\overline{PN}$.
9. Un triángulo equilátero debe ser un triángulo acutángulo.
11. $\triangle XYZ$, alturas $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZP}$; $\triangle ZPY$, $\overline{ZP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{YP}$; $\triangle PQY$, $\overline{PQ}$, $\overline{QW}$, $\overline{YW}$; $\triangle XPZ$, $\overline{XP}$, $\overline{ZP}$; $\triangle PQZ$, $\overline{PQ}$, $\overline{ZQ}$.
13. $\triangle HAB$, $\triangle CBA$.
15. Triángulos equiláteros ABC, DEF; triángulos escalenos DEA, FDC, EFB.
17. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \perp \overline{BC}$; $\angle CDB \cong \angle AEB$; $\angle B \cong \angle B$; $AB - AD = CB - CE$, $DB = EB$; $\triangle BAE \cong \triangle BCD$, ALA.
Solución de problemas 16 triángulos como $\triangle MON$; también los triángulos AJC, BKD, CLE, FMH, GNI, JOL, AMD, BNE, FOI, JLC, AOE.

páginas 420 a 423

1. $\angle B \cong \angle E$; $\angle ACD \cong \angle ADC$.
3. $\angle MNL$, $\angle MLN$; $\angle KNL$, $\angle KLN$.
5. $\triangle AEB$, $\triangle DEC$, $\triangle DEA$, $\triangle CEB$.
7. 50. **9.** 31.
11. 14. **13.** 30.
15. $m\angle X = m\angle Z = 72$; $m\angle Y = 36$.
17. $m\angle ABC - m\angle 3 = m\angle ACB - m\angle 4$.
19. $\angle ACD \cong \angle ADC$; $\angle ACB \cong \angle ADE$, suplementos de ángulos congruentes; $\triangle ACB \cong \triangle ADE$, LAL; $\overline{AB} \cong \overline{AE}$.
21. $\angle ABC \cong \angle ACB$; $m\angle EBC = m\angle DCB$; $\overline{BC} \cong \overline{CB}$; $\triangle DBC \cong ALA$.
23. $\angle ABC \cong \angle ACB$; $m\angle 3 = m\angle 4$; $\overline{DC} \cong \overline{DB}$.
25. $\angle D$ y $\angle ABD$ son suplementarios de $\angle ABC$; $\angle D \cong \angle ABD$; $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.
27. $\triangle ABC \cong \triangle BAE$, LAL; $\angle CAB \cong \angle EBA$, $PCTCC$.
29. En el triángulo equilátero ABC, $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle C$, teorema 6.1; $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$; transitiva.
31. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; sea el punto D la intersección de $\overline{BC}$ y la bisectriz de $\angle A$; $\angle BAD \cong \angle CAD$; $\triangle BAD \cong \triangle CAD$, LAL; $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\angle ADB \cong \angle ADC$, $CPCTC$; $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son ángulos rectos, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.
33. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ biseca a $\angle ABC$, $\overrightarrow{CE}$ biseca a $\angle ACB$, dado; $\angle ABC \cong \angle ACB$, ángulos de la base; $m\angle DBC = m\angle ECB$, mitades de iguales; $\triangle DBC \cong \triangle ECB$, ALA; $\overline{EC} \cong \overline{DB}$, $PCTCC$.
35. $\overline{XB} \cong \overline{YC}$; $\angle BXW \cong \angle CYZ$; $\angle ABC \cong \angle ACB$; $\triangle XBW = \triangle YCZ$, ALA.
37. $m\angle EAP = m\angle DBP$, resta; $\overline{AP} \cong \overline{BP}$; $\angle EPA \cong \angle DPB$; $\triangle EPA \cong \triangle DPB$, ALA; $\overline{EP} \cong \overline{DP}$.
Solución de problemas 29, 16.

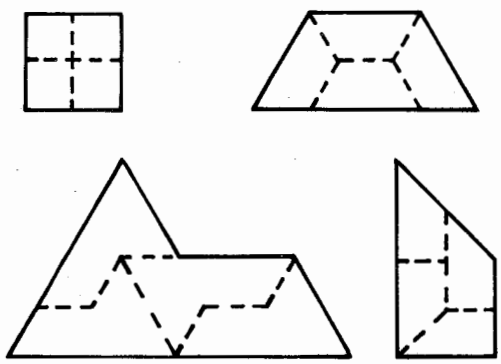
páginas 426 y 427

1. 54. **3.** 110. **5.** 55. **7.** 60.
9. 110. **11.** 55, 40, 85.
13. $180 - 90 = 90$; $\frac{90}{2} = 45$.
15. En el triángulo isósceles XYZ, $m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180$; $2m\angle X + m\angle Z = 180$; $m\angle X + \frac{1}{2}m\angle Z = 90$; $m\angle X < 90$; empléese la definición de ángulo agudo.
17. En el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto B, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$; $m\angle B = 90$; $m\angle A + m\angle C = 90$, resta; úsese la definición de ángulos complementarios.
19. $\angle DCE \cong \angle ECB$; $\angle A \cong \angle B$; úsese el teorema 6.6; $\angle ECB \cong \angle B$.
21. Dibújese $\overline{AC}$. $m\angle 1 + m\angle DAC = m\angle B + m\angle ACB$. $m\angle 2 = m\angle DAC + m\angle DCA$. Sumar.
23.



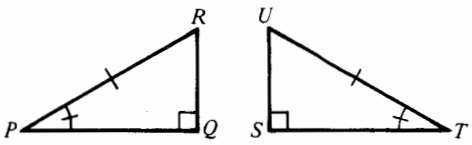
1. $m\angle 2+m\angle 3+m\angle 4=180$.	1. Teorema 6.4.
2. $m\angle 1+m\angle 4=180$.	2. Par lineal; def. de suplementos.
3. $m\angle 2+m\angle 3+$ $+(180-m\angle 1)=180$.	3. Sustitución.
4. $m\angle 2+m\angle 3=m\angle 1$.	4. Algebra.

Solución de problemas

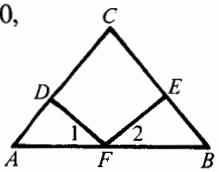


páginas 430 y 431

1. *HA*. **3.** *ALA*. **4.** *HA*.
7. $\angle CDA \cong \angle CDB$; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; *HA*.
9. *AAL*.
11. $BE + EC = FC + CE$; *AAL*.
13.



Usese el teorema *AAL*.
15. $\triangle EAB \cong \triangle BCA$, *LAL*; $\angle AEB \cong \angle BCA$, *PCTCC*; $\angle EFA \cong \angle CFB$; *AAL*.
17. Triángulo isósceles ABC con $\angle A \cong \angle B$, $\overline{FD} \perp \overline{AC}$, $\overline{FE} \perp \overline{BC}$, $m\angle ADF = m\angle BEF = 90$, definiciones de rectas perpendiculares y de ángulos rectos;

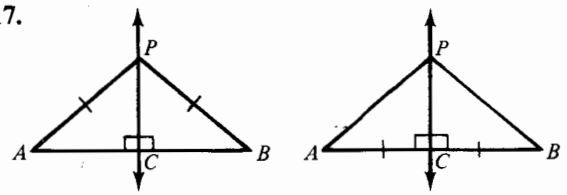


$m\angle A + m\angle ADF + m\angle 1 = m\angle B + m\angle BEF + m\angle 2$, teorema 6.4, transitiva; $m\angle 1 = m\angle 2$, resta.

Solución de problemas 4.

páginas 434 y 435

1. *HC*. **3.** *HA*. **5.** *ALA*.
7. No congruentes; hágase $PQ = 2ST$, $PR = 2SU$, $QR = 2TU$.
9. *LLL*. **11.** 35.
13. $\triangle ECB \cong \triangle DBC$, *HA*; $\angle DBC \cong \angle ECB$, *PCTCC*.
15. $\triangle EFB \cong \triangle DFC$ (Ejercicio 14); $\overline{EF} \cong \overline{DF}$; $\angle DEF \cong \angle FDE$; $\angle DEA \cong \angle EDA$, sumas de ángulos.
17.



Si P no está sobre $\overline{AB}$, entonces construyase la perpendicular de P a $\overline{AB}$; $ACP \cong \triangle BCP$, HC; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $PCTCC$. (Si P está sobre $\overline{AB}$, entonces P es el punto medio.) Si P está sobre la bisectriz perpendicular, entonces $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ por LAL, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $PCTCC$.

Solución de problemas A, sí; B, no; C, sí; D, no.

página 437 Capítulo 6 Resumen

1a. Falso. **1b.** Verdadero.
1c. Falso. **1d.** Falso.
2. 70. **3.** 80.
4. $m\angle CAB - m\angle DAB = m\angle CBA - m\angle DBA$.
5. $\overline{AB} \cong \overline{BA}$; $\triangle ADB \cong BCA$, AAL.
6. $\triangle ACD \cong \triangle ABD$, HA.
7. $\triangle CYA \cong \triangle AXC$, HC; $\angle YCA \cong \angle XAC$, $PCTCC$; $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.
8a. Un ángulo exterior iguala la suma de dos ángulos interiores no contiguos.
8b. 45.
9. $\overline{KM} \cong \overline{KN}$; $\angle KMN \cong KNM$; $\angle KMG \cong \angle KNH$, suplementos de ángulos congruentes; $\triangle KGM \cong \triangle KHN$, ALA; $\overline{KG} \cong \overline{KH}$.

página 439 Técnicas de solución de problemas

1. 37. **2.** 28. **3.** $T_5 = 15$, $T_6 = 21$, $T_{10} = 55$.
4. $P_5 = 35$, $P_6 = 51$, $P_{10} = 145$.
5. $H_3 = 18$, $H_4 = 34$, $H_{10} = 235$.

CAPITULO 7

páginas 444 a 447

1. Correcto. **3.** Incorrecto. **5.** Correcto.
7. 5. **9.** 8. **11.** $\sqrt{19}$.
13. 10. **15.** $2\sqrt{2}$. **17.** $\sqrt{5}$. **19.** Sí.
21. Sí. **23.** No.
25. $\sqrt{424} = 2\sqrt{106} \doteq 20.6$.
27. $4\sqrt{2}$ pies.
31. Area del cuadrado 1 = área del cuadrado 2; $4(1/2ab) + c^2 = 4(1/2ab) + a^2 + b^2$; $c^2 = a^2 + b^2$.
33. $\dfrac{\sqrt{1400}}{0.5} \doteq 19$ líneas.
35. 26.96 metros.

Solución de problemas
1a. 4. **1b.** 3. **1c.** 1. **1d.** 2.
2a. $\sqrt{521}$. **2b.** $23 = \sqrt{529}$.
2c. $\sqrt{545}$. **2d.** $\sqrt{565}$.

páginas 449 y 450

1. $2, 2\sqrt{2}$. **3.** $5, 5$. **5.** $2, \sqrt{3}$.
7. $2\sqrt{3}, 2$. **9.** $8\sqrt{7}, 8\sqrt{21}$. **11.** $38, 19\sqrt{3}$.
13. $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. **15.** $3\sqrt{3}$ m.
17. En el triángulo 30-60-90, el lado opuesto al ángulo de 30° es $\dfrac{s}{2}$; el lado opuesto al ángulo de 60° es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto más corto o bien $\dfrac{s\sqrt{3}}{2}$.
19. $\dfrac{s\sqrt{3}}{3}$.

Solución de problemas
1. $AB^2 + 1^2 = 2^2$, $AB = \sqrt{3}$.
2. $AD^2 + BD^2 = AB^2$; $AD = \sqrt{2}$.
3. No.

páginas 456 a 459

1. BX, BY, BZ. **3.** 3. **5.** 4.
13. Algunas veces.
13. Algunas veces. **17.** Algunas veces.
19. Obtuso, fuera; recto, sobre; o agudo, dentro.

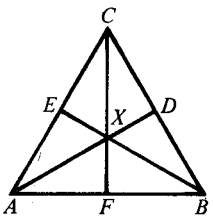
23. $\overline{AD} = \overline{DC}$, definición de mediana y de punto medio; $BA = BC$, definición de isósceles; $\angle A \cong \angle C$; $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, LAL; $\angle ABD \cong \angle CBD$, $PCTCC$; $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del ángulo.

25. En el triángulo equilátero $\triangle XYZ$, M es el punto medio de $\overline{XZ}$; $\triangle XYM \cong \triangle ZYM$, LLL; $\angle XMY$ y $\angle ZMY$ son congruentes y suplementarios, por tanto, ángulos rectos; $\overline{YM}$ es una altura.

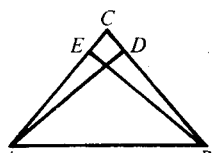
27. $\triangle NCB \cong \triangle MBC$, ALA; $\overline{MB} \cong \overline{CN}$, $\overline{MC} \cong \overline{NB}$, $PCTCC$; $\triangle MCN \cong \triangle NBM$, LAL; $\angle NMC \cong MNB$, $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

29. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

31. En el triángulo equilátero ABC, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas; $AF = BF$, definiciones de mediana y de punto medio; $\triangle AFC \cong \triangle BFC$, LLL; $\angle AFC$ y $\angle BFC$ son congruentes y suplementarios, y por tanto ángulos rectos; $\triangle AFX \cong \triangle BFX$, LAL; dado que $\triangle ACF \cong \triangle BCF$, $\angle XCE \cong \angle XCD$; $CE = CD$, mitades de iguales; $\triangle ECX \cong \triangle DCX$, LAL; repítase el modelo para $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$.



33. Triángulo isósceles ABC, $AC = BC$ con alturas $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$; $\angle CEB \cong \angle CDA$, definiciones de altura y ángulo recto; $\triangle CEB \cong \triangle CDA$, AAL; $\overline{BE} \cong \overline{AD}$, $PCTCC$.



Solución de problemas

1. $A'B = 5 = PR$; úsase AAL.

2. En $\triangle PQR$, $y^2 = RQ^2 + 5^2$; $y + RQ = x$; sustituir.

páginas 462 y 463

1. Sí. **3.** No. **5.** Sí. **7.** Sí.

9. Mayor que 2 y menor que 16.

11. Escoger C fuera de $\overrightarrow{AB}$; $AC + CB > AB$.

13. $AD + AB > BD$ y $CD + BC > BD$. Sumar.

15. H está en la intersección de las diagonales. $DH + HB = 4$. Fórmese un triángulo rectángulo con AC como hipotenusa. $2^2 + (4 + 2\sqrt{3})^2 = AC^2$; $AC \doteq 7.7$; $DB = 4$; mínimo $\doteq 11.7$.

Solución de problemas Encuéntrese la longitud de la perpendicular que va de la parte superior de la figura al punto O (diagrama izquierdo), $\sqrt{2}$; encuéntrese AO, $(\frac{1}{2}AB)^2 + \sqrt{2}^2 = AO^2$; $AO = \frac{\sqrt{17}}{2}$; dado que la longitud del cordón es el doble de AO, longitud $= \sqrt{17}$.

páginas 466 y 467

1. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. **3.** $\overline{GH}$, $\overline{GI}$.

5. $AC < BC < AB$.

7. $BC < AC < AB$.

9. $m\angle C < m\angle B < m\angle A$.

11. $CD < BC < BD < AB$ $(AD = AB)$.

13. En $\triangle ABD$, $BD < AB$; $CD = BD$; sustituir.

15. Úsese el ejercicio 14.

17a. Posible, no.

17b. Posible, no. **17c.** Posible, sí.

17d. No es posible. **17e.** No es posible.

Solución de problemas

$\sqrt{3^2 - (\frac{3}{2})^2} - \sqrt{2^2 - (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{7}{4}}$;

$\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \doteq 1.3$ m.

página 469 Capítulo 7 Resumen

1a. Falso. **1b.** Verdadero.

1c. Verdadero. **1d.** Verdadero.

2. $\overline{CD}$. **3.** $2\sqrt{2}$.

4. En el triángulo 30°-60°-90° $\triangle ABE$, $\overline{AE}$ es el ángulo opuesto de 60°. $AE = \sqrt{3}$; $AC = 2\sqrt{3}$.

6. Fórmese un triángulo. Constrúyanse dos bisectrices perpendiculares cualesquiera.

7. 16. **8.** 12.
9. Dibújese $\overline{XZ}$. En $\triangle XYZ$, $m\angle YXZ > m\angle YZX$. En $\triangle XWZ$, $m\angle ZXW > m\angle XZW$. Sumar.

página 471 Resumen global, capítulos 4 a 7

1. Ejemplo $\overleftrightarrow{DF}$. **1b.** Ejemplo $\overleftrightarrow{FE}$.
1c. Ejemplo $ABEH$. **1d.** $\overleftrightarrow{HB}$.
1e. $DGHA$. **2a.** 75. **2b.** $113\frac{1}{3}$, $66\frac{2}{3}$
2c. $123\frac{1}{3}$, $56\frac{2}{3}$
3. $\overline{AB} \cong \overline{AE}$; úsese ALA.
4. $BC + CD = ED + DC$; $\angle 5 \cong \angle 6$; úsese LAL.
10a. 88. **10b.** 75. **10c.** 163.
11. $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$.

CAPITULO 8

páginas 478 y 479

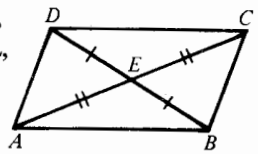
1. $\overline{DC}$. **3.** $\overline{DC}$, $\overline{AB}$.
5. Verdadero. **7.** Falso.
9. Verdadero. **11.** Verdadero.
19. Rombo. **21.** 5.4 cm, 10.6 cm.
23. *c*.
Solución de problemas $ABGI$, $DEGJ$, $HCID$; $HEGB$, $BJDH$, $JIEF$, $HFGG$, $CEDA$, $AJGC$.

páginas 482 a 485

1. $\overline{AB}$, $\overline{DC}$; $\overline{AD}$, $\overline{BC}$.
3. $\angle A$, $\angle D$; $\angle D$, $\angle C$; $\angle C$, $\angle B$; $\angle B$, $\angle A$.
5. 132. **7.** 90. **9.** 132. **11.** 4 cm.
13. 122. **15.** 58.
17. Si los lados opuestos de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un paralelogramo.
19. Rombo o trapecio con 3 lados congruentes.
21. No es un paralelogramo, contrapositiva del teorema 8.1.
23. No es un paralelogramo, contrapositiva del teorema 8.1.
25. 17°, 163°. **27.** 17. **29.** 85.
31. $\overline{CD} \parallel \overline{BA}$; $\angle CDB \cong \angle ABD$; ángulos verticales; $\triangle BEG \cong \triangle DEF$, ALA; $\overline{FE} \cong \overline{GE}$.
33. $\overline{DC} \cong \overline{BA}$, $\angle D \cong \angle B$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$; $AD - AE = CB - CF$; $\triangle DEC \cong \triangle BFA$, LAL, $PCTCC$.
35. Paralelogramo $ABCD$ con ángulo recto A, dado; $m\angle A = m\angle C = 90$, ángulos opuestos; $\angle D$ es suplemento de $\angle A$; $m\angle D = 90$; $m\angle D = m\angle B = 90$, úsese la definición de rectángulo.
37. $\angle A \cong \angle CBF$, teorema 5.8; $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, úsese HA; $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$; úsese el ejercicio 35.
39. Usese la definición de paralelogramo y el teorema 5.9.
41. 90. **43.** 40.
45. $\overline{KJ} \cong \overline{XY}$; $\overline{AB} \cong \overline{KJ}$; transitiva.
47. $\overline{BC} \cong \overline{PQ}$, teorema 8.2; $\overline{BC} \cong \overline{KJ}$, definición de polígono regular; $\overline{KJ} \cong \overline{XY} \cong \overline{PS}$, teorema 8.2; $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$, sustitución.
Solución de problemas
1. La sección transversal corta por lo menos un par de planos paralelos.
2. Cualquier conjunto de cinco caras del cubo debe contener dos pares de aristas paralelas.

páginas 488 a 491

1. Sí. **3.** Sí. **5.** No. **7.** 14 mm.
9. 60°. **11.** $81\frac{2}{3}$, 8.
13. $\overline{X_1X_2}$ e $\overline{Y_1Y_2}$ son congruentes y paralelas. $\overline{X_1X_2Y_2Y_1}$ es un paralelogramo. $\overline{X_1Y_1} \parallel \overline{X_2Y_2}$.
15. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{FE}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{FE} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{FE}$; úsese el teorema 8.5.
17. $\triangle HAE \cong \triangle FCG$, $\triangle DHG \cong \triangle BFE$, LAL, $\overline{HE} \cong \overline{FG}$, $\overline{HG} \cong \overline{FE}$, $PCTCC$; úsese el teorema 8.4.
19. $\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$; $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$; úsese el teorema 8.5.
21. $AE = EC$, $DE = EB$, dado; $\triangle AEB \cong \triangle CED$, $\triangle DEA \cong \triangle BEC$, LAL, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $PCTCC$, úsese el teorema 8.4.



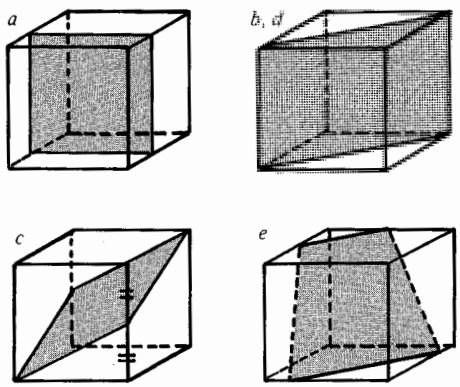
23. $AEGD$ y $ABFH$ son paralelogramos, teorema 8.5; $\overline{GE} \parallel \overline{DA}$, $\overline{HF} \parallel \overline{AB}$; úsese la definición de paralelogramo.

25. $\triangle AED \cong \triangle CDE$, LAL; $\angle CED \cong \angle ADE$; $\triangle AED$ y $\triangle CDE$ son isósceles; $m\angle EAD = 36$, suma de triángulo de 180; $m\angle EFD = 108$, suma de triángulo de 180, $m\angle BAF = m\angle BCF = 72$; $ABCF$ es un paralelogramo, teorema 8.6; $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

27. Dibújese FB; $\triangle EBF \cong \triangle CBF$, HC; $EF = FC$; $\angle BDC \cong \angle DBC$, ángulos base; $\angle DFE \cong \angle DBC$, $180 - m\angle EFC$; $\angle BDC \cong \angle DFE$.

29. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, ángulos correspondientes; úsese el teorema 8.5.

Solución de problemas a, b, c, d, e



páginas 494 a 497

1. 4. **3.** 10. **5.** 34. **7.** 5. **9.** 7.5.
11. 8, 16. **13.** 20. **15.** $b = 7$.
17. $a = 31.5$. **19.** 5, 10. **21.** No.
23. Usese teorema 8.7, $\overline{FD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$.
25. $ABDE$ es paralelogramo; $\overline{AE} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$; obténgase $YX = ZW$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$.
27. $WZYX$ es un paralelogramo, teorema 8.8; las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.
29. $\overline{WZ} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, teorema 8.7.
31. $WG = GY$, $XG = GZ$, diagonales de paralelogramo; úsese la propiedad transitiva.
33. $YX = \frac{1}{2}DB$, $ZW = \frac{1}{2}DB$, $YX = ZW$; $\overline{YX} \parallel \overline{DB}$, $\overline{ZW} \parallel \overline{DB}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$; úsese el teorema 8.5.
35. En $\triangle AOB$, A' y B' son puntos medios de los lados, en $\triangle DOC$, D' y C' también son puntos medios; úsense los teoremas 8.7 y 8.5.

Solución de problemas

1. Pruébese que los triángulos rectángulos son congruentes con $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ como partes correspondientes.

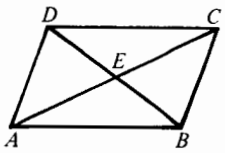
2. $1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \text{longitud}^2$; $\text{longitud} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

páginas 500 a 503

1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{DB} \cong \overline{AC}$, $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{AE}$, $\overline{AE} \cong \overline{EB}$, $\overline{CE} \cong \overline{BE}$.
3. $\angle DEA$, $\angle DEC$, $\angle CEB$, $\angle BEA$.
5. No. **7.** Sí. **9.** No. **11.** Sí.
13. No. **15.** Falso. **17.** Verdadero.
19. Falso. **21.** Rectángulo.
23. No es posible. **25.** Cuadrado.
27. $4x + 10 = 90$; $x = 20$; 116.
29. $DB = AC$, $BE = AC$; $DB = BE$, transitiva.
31. Pruébese que cuatro triángulos son congruentes con EF, FG, GH y HE por $PCTCC$; $m\angle DHG + m\angle GHE + m\angle AHE = 180$; $\angle DHG \cong \angle AEH$, $PCTCC$; $\triangle AEH$ y $\angle AHE$ son complementarios, $\angle DHG$ y $\angle AHE$ son complementarios, sustitución; $\angle GHE$ es un ángulo recto.
33. $ZV = XV$, $WV = YV$; $\overline{ZX} \perp \overline{WY}$; úsese LAL.
35a. Si las diagonales son congruentes, entonces la figura es un rectángulo.
37. Dibújese $GFEH$; $\triangle DGH$ $\triangle DGH \cong \triangle CFG \cong \triangle BEF \cong \triangle AHE$, LAL; $\overline{GF} \cong \overline{FE} \cong \overline{EH} \cong \overline{HG}$ teorema 8.10.

39. 1. Si cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos, entonces un paralelogramo es un rombo;



$\angle DAB \cong \angle DCB$, $\angle DCA \cong \angle DAC$, dado, mitades de ángulos iguales; $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; dado que los lados opuestos también son congruentes, entonces todos los lados son congruentes. 2. Si un paralelogramo es un rombo, entonces cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos; $\triangle DCE \cong \triangle BCE$, HC; $\angle DCE \cong \angle BCE$, $PCTCC$; obténgase $\angle DAE \cong \angle BAE$.

Solución de problemas

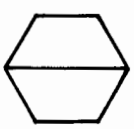
1. $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 12.

páginas 506 y 507

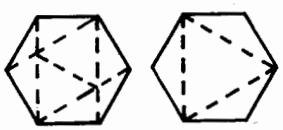
1. 33.5. **3.** 36. **5.** 17.15.
7. 21. **9.** 18.
11. $\angle DAP \cong \angle PAB$, bisectriz del ángulo; $\angle DPA \cong \angle PAB$, ángulos alternos internos.
13. Trácense las perpendiculares de D a $\overleftrightarrow{AB}$ que se intersecan en E y de C a $\overleftrightarrow{AB}$ que se intersecan en F; $\triangle DEA \cong \triangle CFB$, HC; $\angle DAB \cong \angle CBA$, sup. congruente; $\triangle DAB \cong \triangle CBA$, LAL.
15. Dibújese $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ con E sobre $\overline{AB}$; $DEBC$ es un paralelogramo; $\overline{DE} \cong \overline{CB}$; $\overline{DE} \cong \overline{DA}$; $\angle A \cong \angle DEA$; $\angle DEA \angle B$, ángulos correspondientes; $\angle A \cong \angle B$, transitiva.

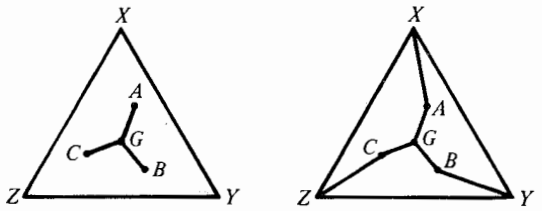
Solución de problemas

1a.

1b. 

1c.

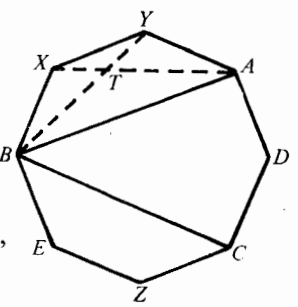
2. 

3. 

Trácese la figura con forma de Y en el centroide del triángulo de manera que (1) $AG = BG = CG$, (2) $m\angle AGB = m\angle BGC = m\angle AGC = 120$, (3) $\overline{AG}$ no está sobre una altura. Complétese la figura dibujando $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$. $XAGCZ$, $YBGAX$ y $ZCGBY$ son pentágonos congruentes.

páginas 510 y 511

1. 8. **3.** $x - 2$. **5.** 1800°. **7.** 6120°.
9. $(p - 2)180°$. **11.** 13. **13.** 12.
15. 21. **17.** 140°. **19.** 156°.
21. 176.4°. **23.** 45°, 30°. **25.** 5.10.
27. $60° + 128\frac{4}{7}° + 171\frac{3}{7}° = 360°$.
29. Trácense $\overline{XA}$ e $\overline{YB}$ con intersección en T; $\triangle XYB \cong \triangle YXA$, LAL; $\overline{XA} = \overline{YB}$, $PCTCC$; $\triangle XAB \cong \triangle YBA$, LLL; $\angle XAB \cong \angle YBA$, $PCTCC$; $\overline{TB} \cong \overline{TA}$, lados opuestos de ángulos congruentes; $TX \cong TY$, resta; $\triangle BTA$ y $\triangle XTY$ son isósceles; $\angle TXY \cong \angle TYX$, $\angle TBA \cong \angle TAB$, ángulos base; $\angle XTY \cong \angle ATB$, ángulos verticales; $\angle TXY \cong \angle TAB$, suma de ángulos del triángulo, resta; $\overline{XY} \parallel \overline{BA}$; $\angle XBA$ es suplemento de $\angle BXY$, teorema 5.9; $m\angle BXY = 135$, octágono regular; $m\angle XBA = 45$; $m\angle EBC = 45$ (mismo modelo que el anterior); $m\angle ABC = 135 - 2(45) = 45$.



Solución de problemas **1.** 56. **2.** 50.

página 513 Capítulo 8 Resumen

1a. Falso. **1b.** Falso. **1c.** Verdadero.
1d. Falso. **2.** 40.
3. $\overline{DA} \cong \overline{CB}$; $\overline{EF} \cong \overline{CB}$; $\overline{DA} \parallel \overline{CB}$; $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$; úsese el teorema 8.5.
4. $m\angle 3 = m\angle 1 = 60$; $\angle 4 \cong \angle ADE$; $m\angle 4 = \frac{(180 - 60)}{2} = 60$; $\angle A \cong \angle B$.
5. $\angle 3 \cong \angle 1$, ángulos correspondientes; $\angle 4 \cong \angle 3$, transitiva.
6. $EFGH$ es un paralelogramo por el teorema 8.7; $m\angle EHG = 100$; $m\angle EFG = 100$.
7. 20. **8.** 150. **9.** 100°. **10.** 6.5.

página 515 Repaso de álgebra

1. 4. **3.** 7. **5.** 12. **7.** 9. **9.** ± 3.
11. $(0, -5)$. **13.** $(-\frac{3}{2}, 2)$. **15.** $(-3, 3)$.
17. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$. **18.** 81. **21.** 7.
23. -2. **25.** $-2, 5$. **27.** 5. **29.** $4, -3$.
31. 36°, 54°, 90°.

CAPITULO 9

páginas 522 y 523

1a. Teorema 9.4. **1b.** Teorema 9.2.
1c. Teorema 9.3. **3a.** $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$.
3b. $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$. **3c.** $\frac{2}{3} = \frac{XY}{MN}$.
3d. $\frac{AB}{EF} = \frac{GH}{CD}$.
5a. Si $ad \neq bc$, entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.
7. \$70. **9.** 67.5, 112.5.
11. $12\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$. **13.** 3, 5.
Solución de problemas
1. 128 pies NS, 133 pies EW.
2. NS: $\frac{32 \text{ pies}}{19 \text{ mm}} = \frac{x \text{ pies}}{76 \text{ mm}}$; EW: $\frac{32 \text{ pies}}{19 \text{ mm}} = \frac{y \text{ pies}}{79 \text{ mm}}$.
3. Aproximadamente \$7000.

páginas 526 y 527

1a. Verdadero. **1b.** Verdadero.
1c. Verdadero. **1d.** Falso. **1e.** Verdadero.
1f. Falso. **3.** $2\frac{2}{3}$. **5.** 2.4. **7.** 10.
9. Teorema 9.6. **11.** 6, 24. **13.** 42 cm.
15. $7\frac{1}{5}$, $10\frac{4}{5}$,
Solución de problemas $\frac{12}{5}, \frac{18}{5}$.

páginas 530 y 531

1. Sí. **3.** No.
5. $\angle I \cong \angle I'$, $\angle J \cong \angle J'$, $\angle H \cong \angle H'$.
7. $6\frac{6}{7}$, $10\frac{2}{7}$.
9. $\angle A \cong \angle A$, $\angle ADE \cong \angle B$, $\angle AED \cong \angle C$; úsese la definición de polígonos semejantes.
11. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$; $\angle ADE \cong \angle ABC$, $\angle AED \cong \angle ACB$, $\angle A \cong \angle A$.
13. Hágase la hipotenusa de 2 unidades de largo.
15. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, AA; $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$; $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$; $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$.
Solución de problemas $13, 4s + 1, 41$.

páginas 534 a 537

1. $\triangle XYZ$. **3.** $\triangle YZX$.
5. Cada uno contiene dos pares de angulos congruentes.
7. 10. **9.** $3\frac{3}{8}$.
11. No, ángulos agudos diferentes.
13. Sí, AAA.
15. $\angle ALB \cong \angle A'LB'$, $\angle B' \cong \angle B$.
17. $\angle 3 \cong \angle 4$, ángulos verticales; $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, teorema 9.8.
19. $\triangle AED \cong \angle CEB$, ángulos verticales $\angle EBC \cong \angle EDA$, ángulos alternos internos; AA.

21. $\angle B \cong \angle E$, $m\angle BGA = m\angle EHD = 90$, $\angle BGA \cong \angle EHD$; $\triangle BGA \sim \triangle EHD$, AA; úsese la definición de triángulos semejantes.
23. Fórmense paralelogramos; $\angle E \cong \angle EHY$, ángulos opuestos; $\angle A \cong \angle HNY$, AA.
25a. $\angle R \cong \angle R$; $\angle S \cong \angle RUS$; AA.
25b. $\overline{RS} \parallel \overline{UV}$, $\angle R \cong \angle VUT$, $\angle 1 \cong \angle 2$; AA.
27. $m\angle BAD = m\angle FEH$, mitades de ángulos iguales; $\triangle ABD \sim \triangle EFH$, AA.
29. Trácese $\overline{BG}$ intersecando a $\overline{CF}$ en H; úsese el teorema fundamental de la proporcionalidad $\frac{BC}{CD} = \frac{BH}{HG}$ y $\frac{BH}{HG} = \frac{EF}{FG}$; úsese la propiedad transitiva.
31. $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, $\triangle BDA \sim \triangle BFC$, $\triangle CDA \sim \triangle CEB$; $\frac{AF}{AE} = \frac{FC}{EB}$, $\frac{BD}{BF} = \frac{DA}{FC}$, y $\frac{CE}{CD} = \frac{EB}{DA}$; $\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{FC}{EB} \cdot \frac{DA}{FC} \cdot \frac{EB}{DA} = 1$.
33. $\triangle ACB \sim \triangle ABD$, AA; $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$.

Solución de problemas

1. $\frac{x}{20} = \frac{AB}{A'B'}$; $A'B' = \frac{20AB}{x}$.
2. Se duplica $A'B'$.

páginas 540 y 541

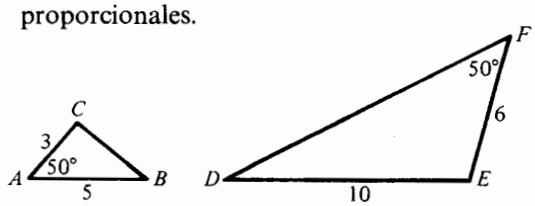
1. 6. **3.** $2\sqrt{5}$. **5.** AD y DB.
7. AB y AD. **9.** 6. **11.** 16. **13.** 15.
15. $\frac{60}{13}$ **17.** 2.
19. $EG = 12$; $HE = 6\sqrt{5}$; $72\sqrt{5}$. **21.** $\frac{7}{5}$
23. En $\triangle CDA$, $BD^2 = BC \cdot BA$, $BD = \sqrt{BC \cdot BA}$. En $\triangle ADE$, $DF^2 = AF \cdot FE$, $DF = \sqrt{AF \cdot FE}$; $BD \cdot DF = \sqrt{BC \cdot BA \cdot AF \cdot FE}$.
25. $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{BC + AB}{AB} = \frac{AB + AC}{AC}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{AC + CD}{AC}$.

Solución de problemas

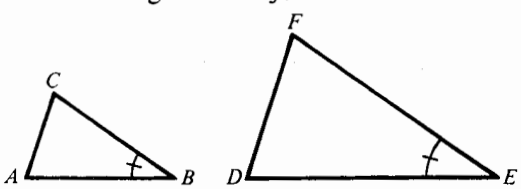
$\frac{AF + CX}{AF} = \frac{AF}{CX}$, $\frac{CX + XB}{CX} = \frac{CX}{XB}$; $AF^2 = AF \cdot CX + CX^2$; $CX^2 = CX \cdot XB + XB^2$, $CX^2 = AF - AF \cdot CX$, sumar; $2CX^2 = 2AF \cdot XB$. Usese el teorema de Pitágoras, $2CX^2 = EX^2$, $2AF^2 = AE^2$, $2XS^2 = XY^2$, $AE^2 \cdot XY^2 = 2AF^2 \cdot 2XB^2 = 4AF^2 \cdot XB^2$ o $AE \cdot XY = 2AF \cdot XB$. $EX^2 = AE \cdot XY$, sustitución.

páginas 544 y 545

1. Sí, LLL. **3.** No. **5.** $\frac{4}{7}$
7. $\angle DOC \cong \angle AOB$, ángulos verticales; $\angle CAB \cong \angle DCA$, ángulos alternos interiores; AA.
9. $\frac{JK}{NM} = \frac{KL}{MP} = \frac{\frac{1}{2}KL}{\frac{1}{2}MP} = \frac{KI}{MO}$, $\angle K \cong \angle M$; $\triangle KJI \sim \triangle MNO$, LAL semejanza; partes proporcionales.
11.



$\frac{AB}{DE} = \frac{5}{10}$; $\frac{AC}{EF} = \frac{3}{6}$; $\angle A \cong \angle F$; no son triángulos semejantes.
13.



$\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son triángulos isósceles con $\angle B \cong \angle E$; $\frac{(180 - m\angle B)}{2} = m\angle A$; $\frac{(180 - m\angle E)}{2} = m\angle D$; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, AA.

Solución de problemas Algunas respuestas posibles son: pentágono $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$;

estrella con los puntos $ABCDE \sim$ estrella con los puntos $A'B'C'D'E'$; triángulo obtusángulo, $AA'B \sim A'BB'B'$;
triángulo acutángulo, $AE'B \sim A'A''B'$;
triángulo isósceles, $AE'A' \sim A'A''B''$,
$AEB \sim A'E'B'$, $C'CD \sim C'D''D'$; rombo,
$ABC'E \sim E'A'C''D'$; trapecio isósceles,
$ABC'D' \sim E'A'C''D''$, $ABCE \sim A'B'C'E'$.

páginas 548 y 549

1. $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ **3.** 0.2924. **5.** 0.3839.
7. 0.7002. **9.** 37°. **11.** 17°. **13.** 4°.
15. $10 \operatorname{sen} 40° = 6.4$. **17.** $25, 24, \frac{24}{7}$
19. 53°, 37°. **21.** 35.7 m. **23.** 0.42 cm.
Solución de problemas $\tan 40° = \dfrac{DC}{200 + BC}$,
$\tan 60° = \dfrac{DC}{BC}$; 325.5 m.

página 551

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\sqrt{3}$. **5.** $\dfrac{1}{2}$.
9. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ó $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\sqrt{3}$. **13.** 30°.
15. $2 \operatorname{sen} 30° = 2(\frac{1}{2}) = 1$;

$$2 \operatorname{sen} 30° \cos 30° = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen}(2 \cdot 30°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$2 \operatorname{sen} A \cos A = \operatorname{sen} 2A$.

17. $\tan 2(30°) = \tan 60° = \sqrt{3}$; $2 \tan 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

$$\frac{2 \tan 30}{1 - (\tan 30)^2} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3};$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - (\tan A)^2}.$$

19. $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$. **21.** $4\sqrt{3}$.

página 553 Capítulo 9 Resumen

1a. Verdadero. **1b.** Verdadero.
1c. Falso. **1d.** Verdadero. **1e.** Verdadero.
2a. $12\frac{1}{2}$ **2b.** $3\frac{3}{5}$ **2c.** $2\frac{4}{7}$ **2d.** 6.
3. $\triangle ABC \sim \triangle DCE$, AA; $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BC}{CE}$.
4a. $\frac{16}{3}$ **4b.** 9. **4c.** 9.
5a. $\frac{8}{15}$ **5b.** $\frac{40}{41}$ **5c.** $\frac{4}{5}$
6. 67.5 pies.
7a. $\angle EDF \cong \angle ECB$, teorema 5.8; AA.
7b. $\angle EFD \cong \angle BFA$, ángulos verticales;
$\angle DEF \cong \angle ABF$, teorema 5.7; AA.
7c. $\angle A \cong \angle C$, ángulos opuestos;
$\angle CEB \cong \angle ABF$; AA.

página 555 Técnicas para la resolución de problemas

1a. Recto. **1b.** Sí. **1c.** DF.
1d. $EF = CF$, $AF = 6$.
2. $EF = 4.2$. **3b.** 90.
3c. $m\angle C = 90$,
$m\angle 2 + m\angle 4 = 90$, $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$;
$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180$;
$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle DEF = 180$,
$m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle GFE = 180$, sumar;
$180 + m\angle DEF + m\angle GFE = 360$; $\angle DEF$ y $\angle GFE$ son suplementarios.

CAPITULO 10

páginas 560 y 561

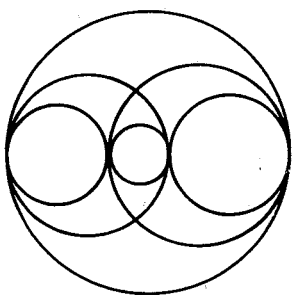
1. $\overline{AE}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BE}$. **3.** $\overset{\frown}{AE}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{AB}$.
11. $\angle CAD, \angle ACD, \angle CDA, \angle CDB, \angle ADB$.
13. $\angle AOB, \angle BOF, \angle FOE, \angle EOB, \angle AOF$.
21. El arco más corto es la circunferencia máxima.
Solución de problemas
3. Son los mismos que los de la lista del número 1.

páginas 564 y 565

1. Sí, no. **3a.** 90. **3b.** 150. **3c.** 270. **3d.** 210. **5a.** 70. **5b.** 50. **5c.** 310. **7.** $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE}$. **9.** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. **11.** Sí. **13.** Fórmense triángulos congruentes, *LLL*; ángulos centrales congruentes; definición de arco menor. **15.** $m\overset{\frown}{EA} + m\overset{\frown}{AS} = m\overset{\frown}{AS} + m\overset{\frown}{SY}$; $m\overset{\frown}{EA} = m\overset{\frown}{SY}$. **17.** $m\overset{\frown}{ACB} = m\overset{\frown}{DAC}$; $m\overset{\frown}{DA} + m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AC}$; $m\overset{\frown}{DA} = m\overset{\frown}{BC}$; $DA = BC$, teorema 10.2; $m\overset{\frown}{ACB} = m\overset{\frown}{DBC}$; $m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{CB} = m\overset{\frown}{DB} + m\overset{\frown}{BC}$; $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{DB}$; $AC = DB$, teorema 10.2; úsese el teorema 8.4. **19.** $\triangle SOR$ es isósceles, $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 4 \cong \angle 2$, transitiva.

Solución de problemas

2. Cuatro.



3. Prolónguese el segmento que une los centros de C_1 y C_2 hasta el punto más lejano de cada círculo. Biséquese el segmento. Use el centro como un nuevo radio.

páginas 568 y 569

1. 3, teorema 10.3.

3. $\overline{OM} \cong \overline{ON}$, teorema 10.3; $\dfrac{(180 - 150)}{2} = 15$.

5. Teorema 10.4.

7. $\overline{OX} \cong \overline{OY}$, lados opuestos de ángulos congruentes; teorema 10.4.

9. Teorema 10.3.

11. $\triangle XOZ \cong \triangle YOZ$, *HA*; $\overline{OX} \cong \overline{OY}$, *PCTCC*; teorema 10.4.

Solución de problemas Usese la figura de la página 533; cuerdas iguales son equidistantes del centro; trácese un segmento perpendicular desde el centro a cada cuerda; el segmento perpendicular interseca a la cuerda en su punto medio; empléense los triángulos congruentes para demostrar que los segmentos perpendiculares son radios iguales; radios iguales determinan un círculo.

páginas 572 a 575

3. $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{CB}$, teorema 10.6. **5.** Teorema 10.6. **7.** Teorema 10.5. **9.** 5. **11.** 3 cm. **13.** $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, teorema 10.7; $AO^2 = AM^2 + OM^2$; 8. **15.** 2. **17.** $OB = 4$; x = distancia; $4 = x\sqrt{2}$; $x = 2\sqrt{2}$. **19.** Trácense dos cuerdas del arco; constrúyanse bisectrices perpendiculares para cada cuerda; la intersección da el centro. **21.** $\overline{AB} \perp \overline{XY}$, $\overline{CD} \perp \overline{XY}$, teorema 10.7; dos rectas perpendiculares a la misma recta son paralelas. **23.** Encuéntrese la distancia de O a $\overline{AB}$, $x^2 = 10^2 - 8^2$, $x = 6$; la distancia de F al punto medio $\overline{CD}$ también es 6; 15. **25.** $\angle MOQ \cong \angle MOP$; arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes. $\triangle XOM \cong \triangle YOM$, *HA*; *PCTCC*. **27.** $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, teorema 10.2; $\overline{OA} \cong \overline{OB}$; úsese el teorema 6.10.

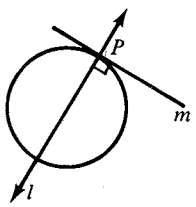
Solución de problemas $DC = AC$, $DB = AB$; *LLL*.

páginas 578 y 579

3. 39. **5.** $\overline{PB} \perp \overline{OB}$, $\overline{PA} \perp \overline{OA}$, teorema 10.9; $\overline{PA} \parallel \overline{BO}$, $\overline{PB} \parallel \overline{AO}$, teorema 5.4; $AOBP$ es un paralelogramo; $OA = OB = 4$;

lados opuestos congruentes; $\angle P$ es un ángulo recto.

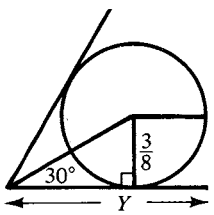
7. $\overline{OA} \perp \overline{AP}$, $\overline{OB} \perp \overline{BP}$, teorema 10.9; $\triangle OAP \cong \triangle OBP$, HC; $PCTCC$.
9. $\triangle PAO \cong \triangle PBO$, HC; $\overline{PA} \cong \overline{PB}$; $\overline{AO} \cong \overline{OB}$; teorema 6.10.
11. Trácese $\overline{OB}$; $2m\angle OCB + m\angle COB = 180$, $2m\angle AOP + m\angle COB = 180$; $\angle AOP \cong \angle OCB$; teorema 5.1.
13. $\ell \perp m$ en P, dado; supóngase que ℓ no contiene al centro del círculo; trácese el radio del centro O al punto P; $\overline{OP} \perp m$, teorema 10.9; hay exactamente una recta que pasa por P perpendicular a m; la recta ℓ contiene al centro del círculo.



Solución de problemas Unase D con el punto de tangencia sobre $\overrightarrow{BC}$; muéstrese que los tres triángulos son congruentes por HC.

páginas 582 y 583

1. 5 cm. **3.** 10 cm. **5.** 20.
7. Denomínese x a la distancia de A al círculo; y a la distancia de B al círculo; z a la distancia de C al círculo; $x + y = 6$; $x + z = 10$; $y + z = 8$; $y = 2$, $OX = 2$.
9. E es el punto de intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ y $\overline{BE} \cong \overline{CE}$, $AE + BE = ED + CE$.
11. $Y = \frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8} \doteq 1.025$. $X = 2Y + 3$. $X \doteq 5.05$.



Solución de problemas Trácese una recta perpendicular de A a ℓ que interseque a ℓ en D; $\triangle ADB$ es un triángulo 30-60-90 con $AB = \frac{d}{2}\sqrt{3}$.

páginas 586 a 589

1. 25. **3.** 65.
5. $m\angle A = 80$, $m\angle B = 55$, $m\angle C = 45$.
7. 100, 120, 140. **9.** 80. **13.** 40.
15. 10. **17.** 120. **19.** 87.
21a. 50. **21b.** 40. **21c.** 50. **21d.** 80.
23. $\angle AEB$ y $\angle CED$, vertical; $\angle ABE$ y $\angle ECD$ interceptan al mismo arco; $\angle BAE$ y $\angle EDC$ interceptan al mismo arco.
25. $m\angle E = m\angle D = 90$; $\angle ABE \cong \angle CBD$, ángulos verticales.
27. Trácese un segmento de P al centro del círculo dado; biséquese el segmento; úsese la mitad de este segmento como radio, úsese el centro como punto medio del segmento, constrúyase el círculo; los puntos de intersección con el círculo dado son puntos de tangencia.
29. Suma de los arcos interceptados por vértices opuestos = 360°; $\frac{1}{2} \cdot 360 = 180$.
31. Los ángulos opuestos son congruentes y suplementarios.
33. $\angle CAD \cong \angle ADB$, ángulos alternos interiores; ángulos congruentes inscritos interceptan a arcos congruentes.
35. $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}$; $m\overset{\frown}{DA} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} = 360$; $\angle ADC$ intercepta $\overset{\frown}{AB}$ más $\overset{\frown}{BC}$, $\angle DAB$ intercepta a $\overset{\frown}{BC}$ más $\overset{\frown}{CD}$; $m\angle ADC + m\angle DAB = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD}) = 180$; $\angle ADC$ y $\angle DAB$ son suplementarios; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Solución de problemas $\overset{\frown}{MP}$ del círculo Q es congruente con $\overset{\frown}{MN}$ del círculo O; $m\overset{\frown}{MP} = m\overset{\frown}{MN} = t$; $\angle MAP$ es un ángulo inscrito, así que $m\angle MAP = \frac{t}{2}$, teorema 10.12.

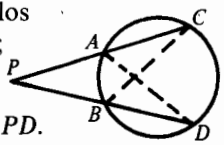
páginas 592 y 593

1. 25. **3.** 60. **5.** 55, 110.
7. 55, 55, 75, 50, 20.
9. O es la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $m\angle AOD = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{BC})$; $m\angle AOC = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{BD})$.
11. $90 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{CD})$, $90 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{BC})$; $m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{BC}$.

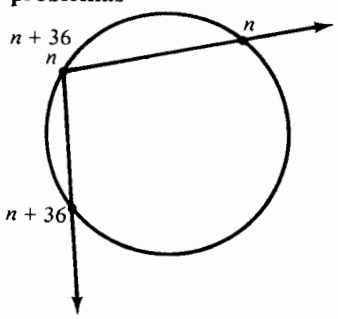
Solución de problemas 36, 60, 84, 108, 132.

páginas 598 a 601

1. 120. **3.** $22\frac{1}{2}$. **5.** 20. **7.** 3.
9. 8. **11.** 23. **13.** 30. **15.** 85.
17. 30. **19.** 110, 100.
21. $6^2 = x(x + 9)$; $x = 3$; $6^2 = 4(4 + y)$; $y = 5$.
23. 40. **25.** 20. **27.** 70.
29. No, $\angle 1$ y $\angle 2$ no son suplementarios.
31. 7, 8.
33. Sea X el punto de intersección de $\overline{AB}$ y ℓ_2; los ángulos verticales en X son congruentes; los arcos mayores son congruentes; los ángulos alternos interiores son congruentes.
35. $m\angle 3 = \frac{1}{2}y$; $m\angle 2 = \frac{1}{2}x$; $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 3$, ángulo externo; $m\angle P = \frac{1}{2}(x - y)$.
37. $\angle PCB \cong \angle PDA$; los ángulos inscritos interceptan a $\overset{\frown}{AB}$; $\triangle PCB \sim \triangle PDA$, AA; $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$; $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.



Solución de problemas



Se traza un rayo a partir de cada n roja a través de la n negra para cada entero 0, 1, 2, ..., 71. Dado que los numerales rojos mantienen un espacio de 10°, un numeral rojo n, $0 \leqslant n \leqslant 35$, y una n roja + 36 designan al mismo punto. ¿Qué relación existe entre los números n negros y los $n + 36$? El punto con n negra + 36 está 180° alrededor del círculo a partir del punto n. El resultado se desprende del teorema 10.13.

página 603 Capítulo 10 Resumen

1. Verdadero. **2.** Falso. **3.** Falso.
4. Verdadero.
5a. 60. **5b.** 30. **5c.** 75. **5d.** 90.
6. Trácese $\overline{AC}$; $\angle BAC \cong \angle DCA$, arcos menores congruentes; ángulos alternos interiores.
7a. 20. **7b.** 110. **7c.** 40. **7d.** 70. **7e.** 20.
8a. 4. **8b.** 24. **9.** 17 cm.
10. $\sqrt{51}$, 12.

página 605 Resumen global Capítulos 8 a 10

1a. Verdadero. **1b.** Falso.
1c. Verdadero. **1d.** Falso.
2a. $4\sqrt{2}$. **2b.** 4 ó 9. **2c.** $\frac{144}{13}$. **2d.** AA.
3. 144. **4a.** 100. **4b.** 50. **4c.** 30. **4d.** 80.
5. $\triangle ANB \sim \triangle CND$, AA; $\frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND}$.
6. 40.
7. $AB = \frac{1}{2}MP$, $DC = \frac{1}{2}MP$, $BC = \frac{1}{2}QN$, $AD = \frac{1}{2}QN$.
Teorema del segmento medio; $DC = AB$, $AD = BC$; $ABCD$ es un paralelogramo, lados opuestos congruentes; $AB = AD = DC = BC$ dado que $MP = QN$.

CAPITULO 11

páginas 612 y 613

3. No. **5.** Postulado del área.
7. Triángulo con base 20, altura 7; rectángulo con longitud 10, ancho 7.
9. 630. **11.** 6. **13.** 3. **15.** $3\frac{1}{2}$ **17.** 720.
19. $2(32 \cdot 10\sqrt{2}/32) \cdot 1.1 = 31.1$; 32 hojas.
21. $A(\triangle ACE) = A(\triangle AGE)$; $A(\triangle AHI) + A(HIFG) + A(\triangle FIE) = A(\triangle ABI) + A(BCDI) + A(\triangle IDE)$; $A(\triangle AHI) = A(\triangle ABI)$, $A(\triangle FIE) = A(\triangle IDE)$; restar.
Solución de problemas $\frac{9}{4}$, no.

páginas 616 y 617

1. 147. **3.** $90\frac{3}{4}$ **5.** 12.
7. $14 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = 35\sqrt{3}$.

9. $12 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$. **11.** $\frac{8}{3}$

13. Cuadruplicado. **15.** Igual. **17.** 13.

Solución de problemas **1.** Sí. **2.** No.

páginas 620 a 623

1. 429. **3.** 264. **5.** 425.
7. 198. **9.** $512\frac{1}{2}$
11. 8.75. **13.** 5 pies. **15.** 12.5. **17.** 30.
19. Sea h = distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$;
$A(AECD) = \frac{1}{2}h(AE + DC)$;
$A(EBCD) = \frac{1}{2}h(EB + DC)$; $AE = EB$.
21. $\triangle ABD$ y $\triangle BDC$ tienen la misma altura y bases iguales, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$.
23. $A(ABCD) = (h_1 + h_2)AB$; $A(\triangle CDX) =$
$= \frac{1}{2}h_1 AB$; $A(\triangle ABX) = \frac{1}{2}h_2 AB$;
$A(\triangle CDX + \triangle ABX) = \frac{1}{2}h_1 AB + \frac{1}{2}h_2 AB =$
$= \frac{1}{2}AB(h_1 + h_2)$.
25. $A(\triangle BAA') = A(\triangle CAA')$, tienen la misma altura y bases iguales; sea H el centroide de $\triangle ABC$; $A(\triangle BHA') = A(\triangle CHA')$;
$A(\triangle AHB) = A(\triangle AHC)$, resta;
$A(\triangle BHC') = A(\triangle AHC') = A(\triangle AHB') =$
$= A(\triangle CHB')$;
repítase el procedimiento con
$A(\triangle BAB') = A(\triangle CBB')$ como primer paso.
27. $A(ABCD) = \frac{1}{2}h(AB + DC)$; $A(\triangle ADE) =$
$= A(ABCD) + (A(\triangle DCE) + A(\triangle ABE))$;
trácense las perpendiculares de E a $\overleftrightarrow{DC}$ y de E a $\overleftrightarrow{AB}$; longitudes de estas alturas =
$= \frac{1}{2}h$; $A(\triangle ADE) = \frac{1}{2}h(AB + DC) -$
$- (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}hDC + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}hAB) = \frac{1}{4}h(AB + DC)$;
$\frac{1}{2}A(ABCD)$.
29. Usese el ejercicio 25; suma de áreas.
31. $x\sqrt{2} = 3 - 2x$; $x = \dfrac{3}{2 + \sqrt{2}}$
33. En el triángulo 30-60-90, $CG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$$A(\triangle CFG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Solución de problemas

1. $\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

páginas 626 y 627

1. 102. **3.** 104. **5.** 72. **7.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, $25\sqrt{3}$.
9. 11, 484. **11.** $20k$.
13. $20\sqrt{3}$ m, $50\sqrt{3}$ m^2.
15. $20\sqrt{3}$ pies, 5 pies.
17. 2, 96; 5, 225; 10, 400; 15, 525; 20, 600; 25, 625; encerrar un cuadrado.
Solución de problemas $10 + 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$;
$4 + 3\sqrt{5} + \sqrt{17}$;
$3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$.

páginas 630 y 631

1. 1:2. **3.** 13:20. **5.** 3:4.
7. 200, 72; $25x + 9x = 272$.
9. $\dfrac{YZ}{BC} = \dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.
11. 2:1. **13.** $\sqrt{288} \doteq 17$.
Solución de problemas 1:16.

páginas 634 y 635

1. Circunferencia.
3. $3\frac{1}{7}$, 3.14, 3.1416. **5.** 3, 6π.
7. 4, 8. **8.** Diámetro.
11. 36π pulgadas^2. **13.** $(32 + 4\pi)$ pies.
15. $(10 + 4\pi)$ m. **17.** 6 pies.
Solución de problemas $AD^2 + OD^2 = AO^2$;

$$OD^2 = 1 - \frac{s^2}{4}; \quad OD^2 = \frac{4}{4} - \frac{s^2}{4}, \quad OD = \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2};$$

$$CD = 1 - \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2}; \quad x^2 = CD^2 + AD^2;$$

$$x^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{4 - s^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2;$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{4 - s^2}.$$

páginas 638 y 639

1. 4π, $\frac{121}{4}\pi$, π^3, 3π.
3. π, 9π, $\frac{3}{2}\pi$, $\dfrac{25}{\pi}$. **5.** 18π cm^2.

7. $\frac{25\pi}{24}$ cm^2. **9a.** 3.93 cm^2. **9b.** 5.89 m^2.
9c. 13.08 pulgadas^2. **11.** 16:25.
13. $2\sqrt{2}:\sqrt{5}$. **15.** $9-\frac{9}{4}\pi$.
17. $9-\frac{9}{4}\pi$. **19.** $12\pi-9\sqrt{3}$.
21. 21.5 %; $\frac{(9-\frac{9}{4}\pi)}{9}$.
23. $\frac{1}{2}\pi(\frac{3}{2}AB)^2-\frac{1}{2}\pi AB^2+\frac{1}{2}(\pi(\frac{1}{2}AB)^2)=\frac{3}{4}\pi AB^2$ sombreada; la fracción del círculo es $\frac{1}{3}$
25. Teorema de Pitágoras, $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=$
$=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)=\frac{\pi}{8}(c^2)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$.
27. $A_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{BC}{2}\right)^2$,
$A_1=\frac{\pi((AC+BC)^2-AC^2-BC^2)}{8}$,
$A_1=\frac{\pi AC\cdot BC}{4}$; $A_2=\pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2$,
$CD^2=AC\cdot BC$, $A_2=\frac{\pi AC\cdot BC}{4}$.
29. Area del cuadrado —área de cuatro cuartos de círculo— área del círculo pequeño = área sombreada; sea $2x$ = longitud de un lado del cuadrado; dibújese un triángulo 30-60-90 con vértice en el centro y longitudes x, x, $x\sqrt{2}$; radio del círculo pequeño $= x\sqrt{2}-x$; $(2x)^2-\pi x^2-$ $-\pi(x\sqrt{2}-x)^2=4x^2-4\pi x^2+2\pi x^2\sqrt{2}$; razón del área sombreada con el área del círculo $=\frac{4}{\pi}-4+2\sqrt{2}$ ó 10 %.

Solución de problemas $\frac{1}{7}$

página 643 Capítulo 11 Resumen

1a. $5\sqrt{2}$. **1b.** 40. **1c.** $5\sqrt{119}$. **1d.** 50.
2a. 3. **2b.** $\frac{27}{4}$. **3.** 2:1. **4.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.
5. $\overline{AD}$.
6. Triángulo 30-60-90, $OB=2$, $OA=1$, $BA=\sqrt{3}$; $\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}=4\pi-3\sqrt{3}$.
7. 1:4. **8.** 4π.

página 645 Repaso de álgebra

1. 24 cm^2. **3.** 87.92 cm.
5. 3658.7π cm^3 ó 11 488.2 cm^3.
7. $h=3.6$ cm.
9. $A=58.5\pi$ pulgadas^2 o 183.69 pulgadas^2.
11. -2, 3. **13.** -2. **15.** -3, -2.
17. 10, -9. **19.** $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$. **21.** 2, 3.
23. 7900 yardas^2. **25.** 93.75 cm^2.
27. 486 mm^2. **29.** 2 m.

CAPITULO 12

páginas 652 a 655

1. *b*. **3.** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$.
5. $\triangle FBC$, $\triangle FAB$, $\triangle FAE$, $\triangle FDE$, $\triangle FDC$.
7. $\overline{EF}$, $\overline{HG}$, $\overline{IJ}$, $\overline{LK}$, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.
9. Misma.
11. $EFGH$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$.
13. $ADHE$. **15.** 5. **17.** 6.
19. $\overline{BH}$, $\overline{AG}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$.
23. $15^2+8^2=289=17^2$. **25.** $2\sqrt{33}$.
27. $5\sqrt{3}$. **29.** 6.
31. $\overline{AF}$, $\overline{FC}$ y $\overline{AC}$ son diagonales congruentes y forman la base de un triángulo equilátero; $\overline{FB}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ son aristas congruentes y forman aristas laterales congruentes.
33. 8; *BDEA*, *ACFB*, *BDGC*, *ACHD*, *AFHE*, *BEGF*, *CFHG*, *DEGH*.
35. Las diagonales del paralelogramo *AHGB* se bisecan entre sí.
37. En el paralelogramo *ABGH*, *O* es el punto medio de $\overline{AG}$ y $\overline{BH}$ (Ejercicio 35); en el paralelogramo *ACGE*, las diagonales $\overline{AG}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en el punto medio; el punto medio de $\overline{AG}$ es *O*.
39. Sea *E* la esquina interior; *CABE* y *ABDE* son paralelogramos, definición; $CE=ED=$ $=9\sqrt{2}$, lados opuestos congruentes; sumar

Solución de problemas Método 1, 32; Método 2, $\sqrt{544} \doteq 23.3$.

páginas 658 y 659

1. c. **3.** 24. **5.** 120. **7.** $12 + 2\sqrt{3}$.
9. $72\sqrt{3} + \frac{81}{2}\sqrt{3} = 112.5\sqrt{3}$.
11. 6 cm, 12 cm.
13. Determínese la arista, $x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = c^2$,

$c^2 = \frac{5}{4}x^2$; $\frac{5}{4}x^2 + (2\sqrt{2})^2 = \text{altura}^2$;

altura $= 2\sqrt{3}$ cm.

15. Cada molde necesita 880 cm^2,

$$880 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10\,000 \text{ cm}^2} = 0.088 \text{ m}^2,$$

$$100 \text{ m}^2 \cdot \frac{x \text{ moldes}}{0.088 \text{ m}^2} = 1136 \text{ moldes.}$$

Solución de problemas

1. Muévase el cubo de arriba de la derecha un espacio hacia adentro.

2. Muévase el cubo inferior delantero de la esquina hacia arriba y hacia atrás.

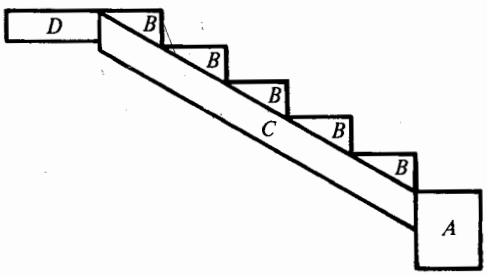
páginas 662 y 663

1. 24 cm^3. **3.** 64.6 cm^3. **5.** 2 cubos.
7. 42 cubos. **9.** 60. **11.** $432\sqrt{3}$.
13. Ocho veces. **15.** 102 cm^3. **17.** 5 pies.
19. $\frac{1}{2}$(8 pies)(30 pies + 14 pies) $\times$ 620 pies $\times$

$$\times \frac{1 \text{ yarda}^3}{27 \text{ pies}^3} \times \frac{\$1.50}{\text{yardas}^3} = \$6062.22;$$

$\$6062.22 \times 1.1 = \$6668.44$.

Solución de problemas



A. $1' \times 4'7\frac{1}{2}'' \times 4\frac{1}{2}' = 1 \times \frac{37}{8} \times \frac{9}{2} = \frac{333}{16} =$
$= 20.81$ pies^3.

B. $\frac{1}{2} \times 5 \times 1' \times \frac{9}{2}' \times \frac{15}{24}' = \frac{225}{32} \doteq 7.03$ pies^3.

C. $5\frac{11}{12}' \times \frac{1}{2}' \times \frac{9}{2}' = \frac{71}{12} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \doteq \frac{213}{16} =$
$= 13.31$ pies^3.

D. $\frac{1}{3}' \times \frac{5}{2}' \times \frac{9}{2}' = \frac{45}{12} = 3.75$ pies^3.
$20.81 + 7.03 + 13.31 + 3.75 = 44.90$ pies^3.
$44.90 \div 27 = 1.66$ yardas^3.

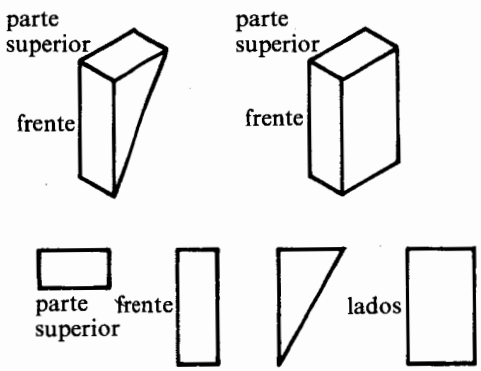
páginas 666 y 667

1. Verdadero. **3.** Falso. **5.** Falso.
7. $26\frac{2}{3}$ **9.** $4583\frac{1}{3}$
11. $3456\sqrt{3}$. **13.** 9:4.
15. $\frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 5 = 129$.
17. $40^2 = 8^2 + h^2$; $h = \sqrt{1536}$; $V = 2\sqrt{1536}$;

$$2\sqrt{1536}\ m^3 \times \frac{1000\ell}{1 \text{ m}^3} \times \frac{1 \text{ min}}{50\ell} \times$$

$$\times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \doteq 26.1 \text{ h.}$$

Solución de problemas



páginas 670 y 671

1. 768π unidades cuadradas, 2880π unidades cúbicas.
3. 300π unidades cuadradas, 625π unidades cúbicas.
5. $\frac{1700\pi}{27} \doteq 197.8$ yardas^3. **7.** 5.1 cm.

9. $512 - 128\pi$ pulgadas^3; $384 - 32\pi + 64\pi$ pulgadas^2.
11. r = radio de la lata; h = profundidad de la caja; volumen de las latas $= 6\pi r^2 h$; volumen de la caja $= 24r^2h$; razón $4{:}\pi$.

Solución de problemas $\frac{54\pi}{16} + \frac{27}{32}$ pulgadas^3; $\frac{228\pi}{16} + \frac{9}{8} + \frac{9\sqrt{5}}{8}$ pulgadas^2.

páginas 674 y 675

1. 320π; 200π. **3.** $\frac{25\pi\sqrt{119}}{3}$; 85π. **5.** 6.
7. $36\pi + 4\pi\sqrt{10}$ cm^3.
9. $8\pi\sqrt{113} + 16\pi\sqrt{165}$.
11. 0.001 pulgadas^3.
13. $3{:}2$; $\frac{3\sqrt{13}+9}{2\sqrt{13}+4}$

Solución de problemas 1-4, 2-5, 3-3, 4-6, 5-1, 6-2.

páginas 678 y 679

1. 972π cm^3. **3.** $\frac{32\pi^4}{3}$. **5.** 3. **7.** $\sqrt{2}$.
9. $1800\pi + \frac{4000}{3}\pi$.
11. 228π unidades cúbicas. **13.** 3 pies.
15. Sea r = radio de la esfera; sea $h = 2r$; área lateral $= 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.
17. $1{:}2$.

Solución de problemas Volumen de la esfera $=$ $= 972\pi$; determínese la altura del cilindro,
$9^2 = 3^2 + h_1{}^2$,
$h_1 = 6\sqrt{2}$, altura $= 12\sqrt{2}$;
volumen del cilindro $= \pi \cdot 9 \cdot 12\sqrt{2} = 108\pi\sqrt{2}$;
$h = 9 - 6\sqrt{2} \doteq 0.515$;
volumen del casquete $= \frac{1}{2}\pi \cdot 9(0.515) +$
$+ \frac{1}{6}\pi(0.515)^3 \doteq 7.35$; volumen del sólido $=$
$= 972\pi - 108\pi\sqrt{2} - 2(7.35) \doteq 2559$ cm^2.

páginas 682 y 683

1. Tetraedro regular; octaedro regular, icosaedro regular.
3. Los «tejados» no se juntan.
5. Tetraedro. **13.** Sí. **15.** Sí.

Solución de problemas **1.** 12. **2.** 30. **3.** 30. **4.** 20.

página 685 Capítulo 12 Resumen

1. 96 cm^2; 64 cm^3. **2a.** 156 cm^2.
2b. $72 + 12\sqrt{3}$ cm^2. **3a.** $\frac{200}{3}$ cm^3.
3b. $32\sqrt{3}$ cm^3. **4.** 60π cm^2.
5. 90π cm^3. **6.** 8. **7.** 36π cm^3.
8. El volumen se duplica.
9. 3 cm. **10.** 400π cm^2.

página 687 Técnicas para la solución de problemas

1. 7 veces. **2.** 5 veces. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 23 min.